BỘ SÁCH TOÁN CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

LÊ TUẤN HOA

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

QUA CÁC VÍ DỤ & BÀI TẬP

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐHQG Hà Nội

SÁCH ĐÃ IN TRONG BỘ NÀY:

2000:

Phương trình vi phân đạo hàm riêng (Tập 1)	Trần Đức Vân

2001:

Giáo trình Đại số tuyến tính	Ngô Việt Trung
Phương trình vi phân đạo hàm riêng (Tập 1+2)	Trần Đức Vân
Nhập môn Lý thuyết điều khiển	Vũ Ngọc Phát

2002:

Giải tích các hàm nhiều biến	Đ.T. Lục, P.H. Điển, T.D. Phượng
Lý thuyết Hệ động lực	Nguyễn Đình Công

2003:

Lôgic toán và Cơ sở toán học	Phan Đình Diệu
Giáo trình Đại số hiện đại	Nguyễn Tự Cường
Lý thuyết không gian Orlicz	Hà Huy Bảng
Đại số máy tính: Cơ sở Groebner	Lê Tuấn Hoa
Hàm thực và Giải tích hàm	Hoàng Tụy
Số học thuật toán	H.H. Khoái, P.H. Điển

2004:

Mã hóa thông tin: Cơ sở toán học và ứng dụng	P.H. Điển, H.H. Khoái
Lý thuyết Tổ hợp và Đồ thị	Ngô Đắc Tân
Xác suất và Thống kê	Trần Mạnh Tuấn

2005:

Giải tích Toán học: Hàm số một biến	Đ.T. Lục, P.H. Điển, T.D. Phượng
Lý thuyết Phương trình vi phân đạo hàm riêng (Toàn tập)	Trần Đức Vân
Công thức kiểu Hopf-Lax-Oleinik cho phương trình Hamilton-Jacobi	Trần Đức Vân
Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập	Lê Tuấn Hoa
Lý thuyết Galois	Ngô Việt Trung

Có thể đặt mua sách trực tiếp tại Viện Toán học, 18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội
Điện thoại 84-4-7563474/205 (Văn phòng); 84-4-7563474/302 (Thư viện)
Fax: 84-4-7564303 E-mail: nldan@math.ac.vn (VP), cnanh@math.ac.vn (TV)

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
QUA CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

Lê Tuấn Hoa
Viện Toán học, Viện KH&CN Việt Nam

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

BỘ SÁCH TOÁN CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (*Chủ tịch*)
Ngô Việt Trung
Phạm Huy Điển (*Thư ký*)

Lời giới thiệu

Trong những năm gần đây, nhu cầu sách tham khảo tiếng Việt về tc của sinh viên các trường Đại học, nghiên cứu sinh, cán bộ nghiên c và ứng dụng toán học tăng lên rõ rệt. Bộ sách "Toán cao cấp" c Viện Toán học ra đời nhằm góp phần đáp ứng yêu cầu đó, làm phong phú th nguồn sách tham khảo và giáo trình đại học vốn có.

Bộ sách Toán cao cấp sẽ bao gồm nhiều tập, đề cập đến hầu hết các lĩnh khác nhau của toán học cao cấp, đặc biệt là các lĩnh vực liên quan đến các hư đang phát triển mạnh của toán học hiện đại, có tầm quan trọng trong sự phát tr lý thuyết và ứng dụng thực tiễn. Các tác giả của bộ sách này là những người nhiều kinh nghiệm trong công tác giảng dạy đại học và sau đại học, đồng thờ những nhà toán học đang tích cực nghiên cứu. Vì thế, mục tiêu của các cuốn s trong bộ sách này là, ngoài việc cung cấp cho người đọc những kiến thức cơ b nhất, còn cố gắng hướng họ vào các vấn đề thời sự liên quan đến lĩnh vực mà c sách đề cập đến.

Bộ sách Toán cao cấp có được là nhờ sự ủng hộ quý báu của Viện Khoa và Công nghệ Việt Nam, đặc biệt là sự cổ vũ của Giáo sư Đặng Vũ Minh và G sư Nguyễn Khoa Sơn. Trong việc xuất bản Bộ sách, chúng tôi cũng nhận được giúp đỡ tận tình của Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội. Nhiều nhà toán trong và ngoài Viện Toán học đã tham gia viết, thẩm định, góp ý cho bộ sách. V Toán học xin chân thành cám ơn các cơ quan và cá nhân kể trên.

Do nhiều nguyên nhân khác nhau, Bộ sách Toán cao cấp chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để bộ s được hoàn thiện hơn.

Chủ tịch Hội đồng biên tập
GS-TSKH Hà Huy Khoái

Mục lục

Lời nói đầu

Phần I: Tóm tắt lí thuyết, ví dụ và đề bài

1 Không gian véc tơ
1 Các cách nhận biết một không gian véc tơ . . . . . .
2 Độc lập tuyến tính - Hệ sinh . . . . . .
3 Cơ sở, chiều và hạng của một hệ véc tơ . . . . . .
4 Tổng trực tiếp . . . . . .

2 Ma trận
5 Các phép toán cơ bản của ma trận . . . . . .
6 Ma trận nghịch đảo . . . . . .
7 Hạng của ma trận . . . . . .
8 Ma trận đa thức . . . . . .

3 Định thức
9 Hoán vị . . . . . .
10 Các phương pháp tính . . . . . .
11 Một số tính chất của định thức . . . . . .
12 Các bài toán tổng hợp về định thức . . . . . .

4 Ánh xạ tuyến tính và ma trận biểu diễn
13 Các tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính . . . . . .
14 Không gian thương và các định lí đồng cấu . . . . . .
15 Các cách xác định một ánh xạ tuyến tính . . . . . .

5 Hệ phương trình tuyến tính
16 Cấu trúc tập nghiệm . . . . . .
17 Phương pháp giải . . . . . .

6 Toán tử tuyến tính 117
18 Véc tơ riêng và giá trị riêng 117
19 Không gian con bất biến 123
20 Toán tử đa thức 128
21 Không gian xích 134
22 Dạng chuẩn Jordan 137

7 Không gian Oclit và không gian unita 145
23 Định nghĩa và các tính chất cơ bản 145
24 Góc, véc tơ chiếu và thể tích 155
25 Toán tử trực giao và toán tử unita 161
26 Toán tử liên hợp và toán tử tự liên hợp 171

8 Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương 179
27 Định nghĩa và các tính chất 179
28 Dạng toàn phương thực 189
29 Dạng Hermite và dạng toàn phương Hermite 197

9 Đại số đa tuyến tính 203
30 Ánh xạ đa tuyến tính 203
31 Tích tenxơ 206
32 Đại số đối xứng và đại số ngoài 212

10 Hình học giải tích 221
33 Không gian afin và ánh xạ afin 221
34 Không gian con afin 226
35 Không gian Oclit afin 231
36 Siêu mặt bậc hai trong không gian afin 238
36.1 Siêu mặt bậc hai trong không gian afin tổng quát . 238
36.2 Siêu mặt bậc hai trong không gian afin trên trường số thực 240
36.3 Siêu mặt bậc hai trong không gian Oclit afin 241

11 Đôi điều tản mạn 249
37 Một vài ứng dụng 249
37.1 Định lí cơ bản của Đại số 249
37.2 Qui hoạch tuyến tính 251

38 Sử dụng MAPLE 25

Phần II: Lời giải, chỉ dẫn, đáp số

Lời giải, chỉ dẫn chương 1 26
Lời giải, chỉ dẫn chương 2 27
Lời giải, chỉ dẫn chương 3 29
Lời giải, chỉ dẫn chương 4 31
Lời giải, chỉ dẫn chương 5 32
Lời giải, chỉ dẫn chương 6 33
Lời giải, chỉ dẫn chương 7 35
Lời giải, chỉ dẫn chương 8 37
Lời giải, chỉ dẫn chương 9 39
Lời giải, chỉ dẫn chương 10 41
Lời giải, chỉ dẫn chương 11 43

Tài liệu tham khảo 44
Tra cứu 44

Lời nói đầu

Đại số tuyến tính là một môn học cơ bản của Toán cao cấp và được dạy ngay từ năm thứ nhất ở các trường đại học, cao đẳng. Bởi vậy có không ít sách bài tập về môn này, chẳng hạn xem [8, 11, 12, 14, 16]. Vậy tại sao cần có một quyển sách bài tập mới? Có một số lí do để tác giả thực hiện công trình này.

Trước hết, theo tác giả, muốn nắm vững kiến thức môn học này - một trong những môn học đầu tiên của Toán học trừu tượng - thì sinh viên cần biết kĩ ví dụ minh họa từng khái niệm và ví dụ vận dụng kết quả mới. Do hạn chế về mặt thời gian và số lượng trang, điều này không thể nào thể hiện đầy đủ được ở các sách giáo trình cũng như các bài giảng. Vì vậy mục đích đầu tiên của quyển sách này là thông qua việc cung cấp hơn 100 ví dụ sẽ giúp sinh viên có thể hiểu sâu hơn môn học.

Tiếp theo, tác giả cho rằng việc làm một số bài tập tính toán là cần thiết, nhưng để hiểu được bản chất môn học thì không cần làm quá nhiều bài tập loại này. Nhất là hiện nay với sự trợ giúp của các phần mềm toán học mạnh như Maple, Mathematika,... thì sau khi nắm vững kiến thức, ta có thể dễ dàng giải được nhiều bài tập tính toán trong thời gian không đáng kể. Trong khi đó, việc giải một số bài tập có tính chất lí thuyết, dù là đơn giản, sẽ giúp sinh viên hiểu kĩ hơn môn học rất nhiều. Rất tiếc, trong các sách bài tập bằng tiếng Việt về Đại số, chỉ có một ít bài tập như vậy. Đối với độc giả Việt Nam ta, quyển sách nổi tiếng của Proskulyakov [14] có thể xem như một quyển bách khoa về bài tập môn này. Tuy nhiên quyển này hiện không được lưu hành rộng rãi (một phần cũng vì ít người biết tiếng Nga).

Một lí do nữa là không có quyển giáo trình nào trình bày một cách hệ thống các phương pháp giải bài tập. Chỉ có thể bổ sung điều này trong sách bài tập. Trên thế giới từ lâu cũng đã có những tác giả thực hiện việc đó, chẳng hạn xem [12]. Nhưng cách giải bài tập thì muôn hình muôn vẻ, không thể có hi vọng viết nên một cẩm nang đầy đủ. Đây là chỗ có thể tìm tòi tiếp. Trong quyển sách này, sau khi nêu những khái niệm hoặc kết

quả then chốt là phần trình bày phương pháp giải. Nếu phương pháp giải đã được nêu sẵn trong bản thân kết quả, thì những ví dụ kèm theo sẽ chỉ cho độc giả thấy rõ điều đó. Trong nhiều trường hợp, những phương pháp đơn lẻ được trình bày thông qua các bài tập và chỉ dẫn của chúng. Một khi nắm tốt những phương pháp chính nêu ra trong quyển sách, độc giả có thể dễ dàng giải được các bài tập tính toán, và có thể giải được nhiều bài tập lí thuyết.

Phần lớn bài trong số hơn 800 bài tập của quyển này được tuyển chọn từ quyển sách [14] đã nêu ở trên. Dù rằng tác giả đã sưu tầm thêm một số lượng khá lớn bài tập khác (chủ yếu từ các quyển sách [5, 7, 10, 13]), nhưng đó không phải là điểm khác biệt chính. Ngoài điểm khác biệt lớn nhất là cung cấp khá hệ thống ví dụ và phương pháp giải như đã nêu ở trên, thì điểm khác biệt lớn tiếp theo là trong quyển sách này là trình bày lời giải hoặc chỉ dẫn khá chi tiết cho tuyệt đại đa số bài tập. Vì vậy nhiều bài tập với những chỉ dẫn đơn sơ (hoặc không có) trong quyển [14] là khá khó hoặc rất khó, thì bây giờ có thể trở nên vừa tầm hơn đối với phần lớn sinh viên đại học tổng hợp. Cũng cần nói ngay là quyển sách này không nhằm mục đích cung cấp lời giải cho quyển [14]. Do vậy rất nhiều bài tập tính toán và một số bài tập khó của quyển đó không được nêu ở đây. Độc giả nào muốn thử sức của mình, nên tìm hiểu quyển sách đó với gần 2000 bài tập.

Như trên đã nêu, mục đích chính của bài tập là để hiểu kĩ và sâu hơn lí thuyết. Ngược lại, để làm tốt được bài tập thì phải hiểu kĩ lí thuyết. Vì vậy, trước mỗi phần bài tập là phần tóm tắt lý thuyết. Điều đó không chỉ tạo điều kiện dễ dàng cho việc theo dõi phương pháp hoặc chỉ dẫn cách giải bài tập, mà còn giúp độc giả hệ thống hóa lại kiến thức đã học.

Đối tượng chính quyển sách này nhằm phục vụ là sinh viên các trường tổng hợp và sư phạm. Tuy nhiên nó cũng sẽ bổ ích cho sinh viên các trường đại học khác muốn tìm hiểu kĩ hơn về môn Đại số tuyến tính. Mặc dù phần lời giải sơ lược và chỉ dẫn đủ để một sinh viên khá có thể giải được tất cả các bài tập, tác giả không khuyến khích sinh viên xem ngay phần này khi chưa đầu tư đủ thời gian để suy nghĩ. Ngược lại, nếu ai đó xem phần chỉ dẫn (hoặc thậm chí lời giải sơ lược) mà trình bày được chi tiết lời giải thì cũng là điều bổ ích.

Việc chia chương mục ở quyển sách dựa theo truyền thống của hầu hết sách về Đại số tuyến tính. Nó gồm 10 chương chính. Tuy nhiên, vì đây không phải là giáo trình, cho nên trình tự kiến thức không nhất thiết được trình bày tuần tự, mà có thể lặp đi lặp lại. Lí do chủ yếu là nhiều khi vận dụng kiến thức học sau đó, ta lại có thêm công cụ để giải quyết các bài tập trước đó. Ngược lại, vì chủ ý của tác giả là cung cấp một cách có hệ thống

các phương pháp giải, nên đối với người mới bắt đầu học môn này, có một số bài tập để giải nó cần những kiến thức vượt quá phần lí thuyết (nhiều hay ít còn tùy thuộc vào trình tự kiến thức của giáo trình được học). Điều này khó có thể đánh dấu chính xác được, song hầu như (mặc dù không luôn luôn) có thể nhận biết được dễ dàng qua đề bài. Khi đó độc giả cứ việc bỏ qua những bài tập như vậy, và hãy quay trở lại khi đã được học thêm kiến thức mới. Cách tiếp cận này có thể hơi rối rắm, nhưng bù lại tác giả tin rằng nó sẽ khá hữu ích với những người muốn ôn lại môn học này. Ngay cả những sinh viên lần đầu học môn này, trong quá trình học cũng có thể thỉnh thoảng nhìn lại để có cách nhìn nhất quán hơn các phần đã học.

Chương cuối cùng (Chương 11) có hai mục đích. Một mặt nó cung cấp cho độc giả một giải trí nho nhỏ sau thời gian dài mệt mỏi với phần bài tập, bằng cách giới thiệu vài ứng dụng lí thú. Mặt khác nó chỉ dẫn cho độc giả cách sử dụng một phần mềm toán học là Maple để giải các bài tập tính toán bằng số, hoặc thậm chí tự ra đề bài được. Dù trình bày ở chương cuối, tác giả khuyên các sinh viên nên đọc Mục 38 sớm để có thể dùng máy tính kiểm tra các kết quả tính toán của mình. Hi vọng là khi đó độc giả sẽ thấy bài tập môn này khá dễ!

Quyển sách được biên soạn bằng phần mềm LATEX. Độc giả có thể tham khảo quyển sách [4] về cách sử dụng. Các mục được đánh số độc lập với chương. Các định nghĩa, định lí, bài tập, ... được đánh số theo mục. Bài tập khó được đánh dấu *. Khi nào trường số không được nêu rõ thì ta xem đó là trường số thực.

Quyển sách này được viết dựa trên kinh nghiệm bản thân tác giả thu được từ quá trình học đại học, nghiên cứu, cũng như những năm dạy đại học và sau đại học gần đây. Mặc dù vậy, quyển sách không tránh khỏi thiếu sót.

Tác giả cũng đã nhận được những lời góp ý quý báu của giáo sư Nguyễn Tự Cường và giáo sư Đỗ Long Vân - những người đã đọc rất kĩ bản thảo. Qua đó một số thiếu sót cũng như một số lỗi ấn loát đã được kịp thời sửa chữa. Tuy nhiên, chắc chắn vẫn còn tiềm ẩn những sai sót và chỉ có bản thân tác giả là người phải chịu trách nhiệm về nó. Tác giả hi vọng sẽ nhận được sự đóng góp ý kiến của độc giả và đồng nghiệp để có thể chỉnh lí trong những lần tái bản sau.

Cuối năm 2005

Tác giả

Phần I

TÓM TẮT LÍ THUYẾT, VÍ DỤ VÀ ĐỀ BÀI

Chương 1

Không gian véc tơ

1 Các cách nhận biết một không gian véc tơ

Trong toàn bộ quyển sách này, nếu không nói gì khác thì K là một trường tùy ý. Chẳng hạn K có thể là trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, trường các số thực $\mathbb{R}$, trường các số phức $\mathbb{C}$, hay trường hữu hạn gồm q phần tử $\mathbb{F}_q$.

Để chứng tỏ một tập hợp là không gian véc tơ (trên trường K), có hai phương pháp chính.

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

Định nghĩa 1.1 Tập hợp $V \neq \emptyset$ cùng với phép cộng véc tơ $V \times V \to V$: $(x, y) \mapsto x + y$ và phép nhân vô hướng $K \times V \to V$: $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ được gọi là *không gian véc tơ* trên trường K nếu với mọi $x, y, z \in V$ và $\alpha, \beta \in K$ các điều kiện sau đây thỏa mãn:

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(ii) $x + y = y + x$.

(iii) Tồn tại véc tơ 0, gọi là véc tơ không, có tính chất $0 + x = x + 0 = x$.

(iv) Tồn tại véc tơ $-x$, gọi là véc tơ đối của x, sao cho $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(v) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(vii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(viii) $1x = x$.

Ta gọi phần tử của V là *véc tơ*, phần tử của K là *phần tử vô hướng*.

Dưới đây là một số ví dụ đơn giản về không gian véc tơ:

Ví dụ 1.1 (i) Từ định nghĩa trên ta thấy ngay trường K là một không gian véc tơ trên chính nó. Ở đây phần tử của K vừa đóng vai trò là véc tơ, vừa là phần tử vô hướng.

(ii) Tập các véc tơ tự do trên mặt phẳng hoặc trong không gian thỏa mãn tất cả các tiên đề trên. Để kiểm tra điều đó, ta cần phải chú ý rằng các véc tơ cùng phương và cùng độ dài thì bằng nhau (trên quan điểm lí thuyết tập hợp, mỗi véc tơ tự do là một lớp tương đương của các đoạn thẳng định hướng), còn phép cộng được định nghĩa theo qui tắc hình bình hành. Khi đó việc kiểm tra các tính chất trên là những bài tập đơn giản của hình học sơ cấp. Vậy các véc tơ tự do trên mặt phẳng hoặc trong không gian lập thành các không gian véc tơ trên trường số thực.

(iii) Nếu K là trường con của trường L và V là không gian véc tơ trên L, thì nó cũng là không gian véc tơ trên K. Chẳng hạn $\mathbb{C}$ vừa là không gian véc tơ trên chính nó, vừa là không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ và cũng là không gian véc tơ trên $\mathbb{Q}$.

Mặc dù về nguyên tắc phải kiểm tra tất cả tám tiên đề trên, song trong phần lớn các trường hợp, chủ yếu chỉ cần chứng tỏ các phép toán cộng và nhân vô hướng được hoàn toàn xác định, nghĩa là các qui tắc nêu ra đúng là các phép toán, và sau đó phải chỉ ra phần tử đối và phần tử không.

Ví dụ 1.2 (i) Xét tập tất cả các đa thức một biến $K[x]$ với phép cộng đa thức thông thường và phép nhân đa thức với phần tử của trường. Vì tổng của hai đa thức lại là một đa thức, và tích của đa thức với phần tử của trường lại là đa thức, nên các phép cộng và phép nhân thông thường thực sự là các phép toán trên $K[x]$. Đa thức 0 đóng vai trò véc tơ không, còn đa thức đối là véc tơ đối. Các tiên đề còn lại là những tính chất quen biết của đa thức. Vậy $K[x]$ lập thành một không gian véc tơ.

(i') Tương tự, tập tất cả các đa thức một biến $K[x]$ bậc nhỏ hơn hoặc bằng một số $n \geq 0$ cho trước là một không gian véc tơ.

(i") Tuy nhiên tập tất cả các đa thức một biến $K[x]$ bậc lớn hơn hoặc bằng một số $n \geq 0$ cho trước với phép cộng đa thức thông thường và phép nhân đa thức với phần tử của trường nêu trên không phải là một không gian véc tơ. Lí do ở đây là tổng của hai đa thức bậc lớn hơn hoặc bằng n có thể có bậc nhỏ hơn n, nên phép cộng thông thường không phải là phép toán (trên tập đang xét)! (Trong khi đó, cả 8 tiên đề trên đều thỏa mãn!)

Ta cũng có thể mở rộng các kết quả trên ra cho vành đa thức nhiều biến trên một trường.

(ii) Tập hợp các hàm số thực xác định trên đoạn thẳng $[a, b]$, $a < b$, với các phép cộng và phép nhân với một số thông thường rõ ràng thỏa mãn cả 8 tiên đề nêu trên với véc tơ 0 là hàm đồng nhất bằng 0 và véc tơ đối của $f(x)$ là hàm $-f(x)$. Vậy nó là một không gian véc tơ.

(iii) Xét tập hợp $C[a, b]$ các hàm số liên tục trên đoạn thẳng thực $[a, b]$, $a < b$. Tổng của hai hàm liên tục lại là một hàm liên tục, và tích của một số với một hàm liên tục lại là hàm liên tục. Vậy các phép cộng và phép nhân thông thường là các phép toán trên tập $C[a, b]$. Hàm số đồng nhất bằng không cũng thuộc tập này, và đóng vai trò là véc tơ 0. Nếu $f(x)$ liên tục thì $-f(x)$ cũng liên tục, và đóng vai trò là véc tơ đối. Bây giờ ta thấy ngay 8 tính chất nêu trên là những tính chất quen biết của hàm số.

(iii') Tuy nhiên tập các hàm không liên tục trên đoạn thẳng thực $[a, b]$ với phép cộng và phép nhân (với một số) thông thường không lập thành không gian véc tơ. Lí do là tổng của hai hàm không liên tục có thể là hàm liên tục (hãy chỉ ví dụ). Do đó phép cộng thông thường không phải là phép toán trên tập này!

(iv) Cho V_i, $i \in I$, là một họ các không gian véc tơ trên trường K. Trên tích Đề-các $V = \prod_{i \in I} V_i$, với $u = (u_i)_{i \in I}$, $v = (v_i)_{i \in I} \in V$ và $\alpha \in K$, ta định nghĩa

$$u + v = (u_i + v_i)_{i \in I},$$
$$\alpha u = (\alpha u_i)_{i \in I}.$$

Với mỗi $i \in I$, V_i là không gian véc tơ. Do đó $u_i + v_i \in V_i$ và $\alpha u_i \in V_i$, tức là $u + v \in V$ và $\alpha u \in V$. Vậy các phép cộng và nhân ở trên đúng là các phép toán. Phần tử $\mathbf{0} = (0_i)_{i \in I}$, trong đó 0_i là các véc tơ không của V_i, đóng vai trò là véc tơ 0 của V, còn $(-u_i)_{i \in I}$ đóng vai trò là véc tơ đối của $u = (u_i)_{i \in I}$. Bây giờ ta thấy rằng việc kiểm tra 8 tiên

đề trên đối với V được đưa về việc kiểm tra chúng trên từng thành phần V_i. Nhưng các tiên đề đó đương nhiên thỏa mãn vì tất cả V_i là không gian véc tơ. Vậy V lập thành không gian véc tơ trên K, được gọi là *tích Đề-các* của các không gian véc tơ.

Phương pháp 2: Kiểm tra xem nó có là không gian con của một không gian véc tơ không, dựa vào kết quả sau:

Bổ đề 1.2 *Cho U là một tập con khác rỗng của không gian véc tơ V trên trường K. Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) U là không gian con của V, nghĩa là U đóng với phép cộng và phép nhân vô hướng, và cùng với hai phép toán cảm sinh, bản thân nó là một không gian véc tơ trên trường K.

(ii) U đóng với phép cộng và phép nhân vô hướng.

Ý nghĩa của điều kiện (ii) trong bổ đề trên là ở chỗ đó là một điều kiện cần và đủ để qui tắc cộng và nhân (của không gian V) khi hạn chế trên U thực sự là các phép toán trên U. Một khi (ii) đã thỏa mãn, thì khẳng định (i) của bổ đề nói rằng tự khắc U đã là không gian véc tơ.

Hệ quả 1.3 *Nếu U là không gian con của V, thì $0 \in U$.*

Khi áp dụng bổ đề trên, để chứng tỏ một tập hợp E nào đó là (hoặc không là) không gian véc tơ, trước hết ta phải xem nó như là một tập con của một không gian véc tơ V đã biết với "phép toán" giống như phép toán của V. (Chữ "phép toán" đầu được để trong dấu nháy vì thực ra nó có thể không phải là phép toán trên E, còn chữ sau phản ánh đúng nghĩa của nó!) Chẳng hạn, nếu như công nhận Ví dụ 1.2(i), thì ta có cách giải khác đối với các Ví dụ 1.2(i'), (ii") như sau: tập tất cả các đa thức một biến $K[x]$ bậc nhỏ hơn hoặc bằng một số $n \geq 0$ là tập con khác rỗng của tập tất cả các đa thức, và đóng với cả hai phép toán. Do đó nó là không gian con, tức là một không gian véc tơ. Còn tập tất cả các đa thức một biến $K[x]$ bậc lớn hơn hoặc bằng một số $n \geq 0$ không đóng kín đối với phép cộng, nên nó không là không gian véc tơ. Tương tự, nếu công nhận Ví dụ 1.2(ii), thì tập hợp trong Ví dụ 1.2(iii) đóng với cả hai phép toán, nên nó là không gian con, còn tập hợp trong Ví dụ 1.2(iii') không là không gian con vì nó không đóng với phép cộng (nó cũng không đóng với phép nhân vì $0.\mathrm{f} = 0$ không thuộc tập này). Sau đây là các ví dụ khác.

Ví dụ 1.3 Cho V_i, $i \in I$, là một họ các không gian véc tơ trên trường K. Tập con $U = \oplus_{i\in I} V_i$ của tích Đề-các $V = \prod_{i\in I} V_i$ gồm các phần tử $u = (u_i)_{i\in I}$, sao cho $u_i = 0_i$ trừ một số hữu hạn chỉ số $i \in I$, là không gian con của V. Thật vậy, nếu $u = (u_i)_{i\in I} \in U$ với tập chỉ số $A = \{i;\ u_i \neq 0_i\}$ hữu hạn và $\alpha \in K$, thì $(\alpha u)_i = 0$ với mọi $i \notin A$, nên $\alpha u \in U$. Nếu $v = (v_i)_{i\in I} \in U$ là một véc tơ thứ hai với tập chỉ số $B = \{i;\ v_i \neq 0_i\}$ hữu hạn, thì $(u+v)_i = u_i + v_i = 0_i$ với mọi $i \notin A \cup B$. Do $A \cup B$ cũng hữu hạn, nên $u + v \in U$. Vậy U đóng với cả hai phép toán. Do đó nó là không gian con theo bổ đề trên.

Ta gọi U là *tổng trực tiếp ngoài* của các không gian V_i. Chú ý rằng khi I hữu hạn thì khái niệm tổng trực tiếp ngoài trùng với khái niệm tích Đề-các, tức là $\oplus_{i=1}^n V_i = \prod_{i=1}^n V_i$.

Ví dụ 1.4 Giao của một họ không gian con là một không gian con.

Thật vậy, cho V_i, $i \in I$, là một họ không gian con của V. Cho $u, v \in \cap V_i$ và $\alpha \in K$. Khi đó với mọi $i \in I$, $u, v \in V_i$. Theo Bổ đề 1.2, $u + v \in V_i$ và $\alpha u \in V_i$. Do đó $u+v$, $\alpha u \in \cap V_i$. Lại theo Bổ đề 1.2, $\cap V_i$ là không gian con.

Bài tập

Bài 1.1 Phương trình tuyến tính n ẩn trên trường K là biểu thức có dạng

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta,$$

trong đó $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta \in K$. Nếu $\beta = 0$ thì nó được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

Chứng minh rằng tập hợp nghiệm của một hệ (hữu hạn hoặc vô hạn) phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn trên trường K lập thành một không gian véc tơ trên K.

Bài 1.2 Chứng tỏ rằng tập hợp nghiệm của một hệ (hữu hạn hoặc vô hạn) phương trình tuyến tính không thuần nhất n ẩn trên trường K không lập thành một không gian véc tơ trên K.

Bài 1.3 Cho $a < b$ là hai số thực. Xét xem tập hợp nào trong số các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân (với một số) thông thường lập thành không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$:

a) Tập $L[a, b]$ các hàm thực khả tích trên $[a, b]$.

b) Tập $C^n(a, b)$ các hàm thực có đạo hàm cấp n liên tục trên khoảng (a, b).

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
THƯ VIỆN
M.4637

c) Tập $C^\infty(a,b)$ các hàm thực khả vi vô hạn lần.

d) Tập các hàm thực bị chặn trên đoạn $[a,b]$.

e) Tập các hàm không bị chặn trên đoạn $[a,b]$.

f) Tập các hàm thực f thỏa mãn $f(a)=0$.

g) Tập các hàm thực f thỏa mãn $f(a)=-1$.

h) Tập các hàm thực đơn điệu tăng trên $[a,b]$.

Bài 1.4 Xét xem tập hợp nào trong số các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân (với một số) thông thường lập thành không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$:

a) Tập các dãy số thực hội tụ.

b) Tập các dãy số thực phân kì.

c) Tập các dãy số thực bị chặn.

d) Tập các dãy số thực thỏa mãn $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p$ hội tụ, trong đó p là một số thực khác 0.

Bài 1.5 Xét xem tập hợp nào trong số các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân (với một số) thông thường lập thành không gian véc tơ trên trường K:

a) Tập các ma trận trên trường K với n hàng, m cột.

b) Tập các ma trận vuông đối xứng trên trường K.

c) Tập các ma trận vuông trên trường K giao hoán với một họ ma trận cho trước.

d) Tập các ma trận vuông trên trường K với đường chéo chính bằng 0.

e) Tập các ma trận (vuông) đường chéo trên trường K .

f) Tập các ma trận vuông trên trường K với định thức bằng 0.

Bài 1.6 Kí hiệu $\mathbb{R}_+$ là tập các số thực dương. Chứng tỏ rằng tập hợp này lập thành không gian véc tơ với hai phép toán được định nghĩa như sau: nếu $x,y\in\mathbb{R}_+$ và $\alpha\in\mathbb{R}$, thì

a) Phép cộng $(x,y)\mapsto xy$ (phép nhân thông thường).

b) Phép nhân vô hướng: $(\alpha,x)\mapsto x^\alpha$.

Bài 1.7 Cho S là một tập hợp khác rỗng tùy ý và V là một không gian véc tơ trên K. Kí hiệu $M(S,V)$ là tập tất cả các ánh xạ từ S vào V. Với $f,g \in M(S,V)$ và $\alpha \in K$, ta định nghĩa

Phép cộng: $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ với mọi $s \in S$.

Phép nhân vô hướng: $(\alpha f)(s) = \alpha f(s)$.

Chứng tỏ rằng với hai phép toán trên, $M(S,V)$ lập thành một không gian véc tơ trên K.

Bài 1.8 Cho $V = K \times K$ với các phép toán xác định như sau:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad \text{và} \quad k(a,b) = (ka, 0).$$

Chứng tỏ rằng V không là không gian véc tơ.

Bài 1.9 Cho U là không gian con của V. Chứng tỏ rằng hiệu tập hợp $V \setminus U$ không bao giờ là không gian con của V.

Bài 1.10 Cho V_i, $i \in I$ là một họ không gian con của V. Kí hiệu $\sum_{i\in I} V_i$ là tập các phần tử có dạng $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}$, trong đó $i_1, ..., i_n \in I$ (n thay đổi) và $x_{i_j} \in V_{i_j}$ với mọi $j = 1, ..., n$. Chứng tỏ rằng tập này lập thành một không gian con của V (được gọi là *tổng* của các không gian con).

Bài 1.11* Cho K là một trường vô hạn và $V_1, ..., V_n$ là các không gian con của V. Chứng minh rằng $V_1 \cup ... \cup V_n$ là không gian con khi và chỉ khi có một không gian con V_i chứa tất cả các không gian còn lại. Khi trường K hữu hạn thì sao?

Bài 1.12 Cho $\mathcal{X}$ là một họ không gian con của V thỏa mãn: nếu $V_1, V_2 \in \mathcal{X}$ thì tồn tại $V_3 \in \mathcal{X}$ chứa cả V_1, V_2. Chứng tỏ rằng hợp các không gian con trong $\mathcal{X}$ lập thành một không gian con của V.

Bài 1.13* Một số phức được gọi là số đại số nếu nó là nghiệm của một đa thức với hệ số hữu tỉ. Chứng minh rằng tập các số đại số lập thành một không gian véc tơ trên $\mathbb{Q}$.

Bài 1.14 Cho K là trường vô hạn. Chứng tỏ rằng mọi không gian véc tơ không tầm thường trên K có vô số phần tử.

Bài 1.15 Chứng tỏ rằng trên tập $\mathbb{Q}$ có thể định nghĩa vô hạn cấu trúc không gian véc tơ trên $\mathbb{Q}$, nhưng không thể xác định một cấu trúc không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$.

Bài 1.16 Cho U và V_1, V_2 là các không gian con của V. Chứng tỏ rằng

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \subseteq U \cap (V_1 + V_2).$$

Tìm ví dụ để có bao hàm thức thực sự.

Bài 1.17 Cho U là một không gian con của V. Chứng tỏ rằng tồn tại không gian con W sao cho $V = U + W$ và $U \cap W = 0$.

Bài 1.18 Cho $I_1, ..., I_r$ là các iđêan thuần nhất khác iđêan thuần nhất cực đại của vành đa thức $K[x_1, ..., x_n]$ trên trường vô hạn K. Chứng tỏ rằng tồn tại một dạng tuyến tính không nằm trong $\cup_{i=1}^{r} I_i$.

2 Độc lập tuyến tính - Hệ sinh

Các khái niệm then chốt trong mục này là

Định nghĩa 2.1 Cho V là không gian véc tơ trên trường K. Ta nói các véc tơ $v_1, ..., v_n$ *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Ta nói tập véc tơ S là phụ thuộc tuyến tính nếu nó chứa một hệ hữu hạn véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Tập véc tơ không phụ thuộc tuyến tính được gọi là *độc lập tuyến tính*.

Biểu thức $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các phần tử $v_1, ..., v_n$. Nếu v là một tổ hợp tuyến tính của $v_1, ..., v_n$ thì ta cũng nói v *biểu diễn tuyến tính* qua $v_1, ..., v_n$.

Từ định nghĩa trên ta có:

Phương pháp 1: Để chứng tỏ hệ S phụ thuộc tuyến tính thì phải chỉ ra bộ $\alpha_1, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn hệ thức trên.

Một cách đối ngẫu, muốn chứng minh một tập S các véc tơ là độc lập tuyến tính, thông thường ta giả sử có một quan hệ tuyến tính

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0,$$

trong đó $v_1, ..., v_n$ là các phần tử khác nhau trong S. Sau đó chứng minh rằng $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Nhìn chung trong cả hai trường hợp, để xét tính độc lập tuyến tính của hệ véc tơ $v_1, ..., v_n$, ta đều đi đến **giải một hệ phương trình tuyến tính**

thuần nhất với ẩn là $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Hệ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hệ phương trình tương ứng chỉ có nghiệm tầm thường.

Chú ý: Từ định nghĩa ta thấy một hệ vô hạn véc tơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi mọi tập hữu hạn véc tơ của nó độc lập tuyến tính. Một hệ vô hạn véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi nó chứa một tập hữu hạn véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Như vậy khi xét tính độc lập tuyến tính của một hệ vô hạn véc tơ, thực chất ta vẫn làm việc với hữu hạn véc tơ.

Ví dụ 2.1 (i) Hãy xét xem ba véc tơ $(1,-2,1)$, $(2,1,-1)$, $(7,4,-1)$ trong $\mathbb{Q}^3$ có độc lập tuyến tính hay không?

Để giải bài này, ta sẽ cố gắng tìm một quan hệ tuyến tính giữa chúng, tức xét xem có tồn tại $x, y, z \in \mathbb{Q}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$x(1,-2,1) + y(2,1,-1) + z(7,4,-1) = (0,0,0).$$

Do $x(1,-2,1) + y(2,1,-1) + z(7,4,-1) = (x+2y+7z, -2x+y+4z, x-y-z)$, đẳng thức trên tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y+7z &= 0, \\ -2x+y+4z &= 0, \\ x-y-z &= 0, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x+2y+7z &= 0, \\ 5y+10z &= 0, \\ -3y-6z &= 0, \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} x+2y+7z &= 0, \\ y+2z &= 0. \end{cases}$$

Hệ cuối cùng có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $z = 1$, $y = -2$, $x = -3$. Vậy ba véc tơ trên phụ thuộc tuyến tính.

(ii) Trong không gian véc tơ $R = K[x]$, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta chọn một đa thức $f_n \neq 0$ có bậc đúng bằng n. Tập f_0, f_1, $f_2, ...$ có độc lập tuyến tính không?

Xét một quan hệ tuyến tính giữa các phần tử của tập này:

$$\alpha_1 f_{n_1} + \cdots + \alpha_p f_{n_p} = 0, \ \alpha_1, ..., \alpha_p \in K.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $n_1 < \cdots < n_p$. Ta chứng minh qui nạp theo p là $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Khi $p = 1$, nếu $\alpha_1 \neq 0$ thì vế trái là một đa thức bậc đúng bằng n_1, nên nó không thể là đa thức 0. Vô lí. Vậy phải có $\alpha_1 = 0$. Giả sử khẳng định đã

đúng với $p-1$. Xét trường hợp p đa thức. Nếu $\alpha_p \neq 0$, thì vì $\alpha_1 f_1$ hoặc là 0, hoặc có bậc là $n_1 < n_p$,..., $\alpha_{p-1} f_{p-1}$ hoặc là 0, hoặc có bậc là $n_{p-1} < n_p$, nên $\alpha_1 f_{n_1} + \cdots + \alpha_p f_{n_p}$ là đa thức bậc đúng bằng n_p. Do đó nó khác 0. Vô lí. Vậy ta phải có $\alpha_p = 0$. Từ đó suy ra

$$\alpha_1 f_{n_1} + \cdots + \alpha_{p-1} f_{n_{p-1}} = 0.$$

Theo giả thiết qui nạp, ta có $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{p-1} = 0$. Vậy hệ đã cho độc lập tuyến tính.

Phương pháp 2: Các kết quả sau đây nhiều khi cũng cho phép thu được lời giải ngắn gọn:

Hệ quả 2.2 *(i) Tập con của một tập độc lập tuyến tính là độc lập tuyến tính*

(ii) Một tập chứa một tập phụ thuộc tuyến tính là phụ thuộc tuyến tính.

Bổ đề 2.3 *Tập S phụ thuộc tuyến tính khi nó chứa một véc tơ biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại.*

Phương pháp 3: Dựa trên kết quả về chiều ở mục tiếp theo:

Hệ quả 2.4 *Nếu $\dim V = n$ thì mọi tập từ $n+1$ phần tử trở lên đều phụ thuộc tuyến tính, còn tập có tối đa $n-1$ phần tử không thể là hệ sinh.*

Phương pháp 4: Dựa trên một kết quả cơ bản trong lí thuyết định thức các ma trận

Định lí 2.5 *Một ma trận vuông có định thức khác không khi và chỉ khi các véc tơ dòng (t.ứ[1] cột) của nó độc lập tuyến tính.*

Ví dụ 2.2 (i) Xét xem các véc tơ $v_1 = (1,2,-3,4)$, $v_2 = (3,0,-7,5)$, $v_3 = (-2,4,9,3)$, $v_4 = (-1,6,6,7) \in \mathbb{R}^4$ có độc lập tuyến tính không?

Nhận xét rằng $v_4 = v_1 + v_3$. Vậy v_1, v_3, v_4 phụ thuộc tuyến tính, và do đó hệ ban đầu phụ thuộc tuyến tính (theo phương pháp 2).

(ii) Xét xem các véc tơ $v_1 = (1,2,-3,4)$, $v_2 = (0,0,-7,5)$, $v_3 = (0,0,0,3) \in \mathbb{R}^4$ có độc lập tuyến tính không?

[1] Viết tắt chữ "tương ứng"

Đặt $v = (0, 1, 0, 0)$. Lập ma trận với các dòng là các véc tơ v_1, v, v_2, v_3, ta được

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Đây là ma trận tam giác trên, nên $|A| = -21 \neq 0$. Vậy 4 véc tơ vừa nói là độc lập tuyến tính. Do đó v_1, v_2, v_3 cũng độc lập tuyến tính (kết hợp phương pháp 2 và 4).

(iii) Bốn đa thức $t^2 + 3t + 1$, $2t^2 - t$, $6t - 7$, $-t^2 + 3t - 2$ là phụ thuộc tuyến tính vì chúng thuộc không gian ba chiều gồm các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 (theo phương pháp 3).

Khái niệm gần như "đối ngẫu" với độc lập tuyến tính là khái niệm hệ sinh.

Định nghĩa 2.6 Cho S là một tập con của không gian véc tơ V. Ta gọi tập hợp các tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc S là *bao tuyến tính* của S và kí hiệu là $E(S)$. S được gọi là *hệ sinh* của V nếu $E(S) = V$. Ta nói hệ sinh S là *tối tiểu* nếu nó không chứa một tập con thực sự cũng là hệ sinh.

Không gian véc tơ có một hệ sinh hữu hạn được gọi là *không gian hữu hạn sinh* hay *không gian hữu hạn chiều.*

Bổ đề 2.7 *$E(S)$ là không gian con nhỏ nhất của V chứa S.*

Ví dụ 2.3 (i) Nếu $S = \emptyset$ hoặc $S = \{0\}$ thì $E(S) = 0$.

(ii) Tập các véc tơ $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, $e_n = (0, ..., 0, 1)$ lập thành một hệ sinh của không gian K^n, vì mọi véc tơ $x = (x_1, ..., x_n)$ có thể viết thành $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$.

(iii) Tập các đơn thức $\{t^n;\ n \geq 0\}$ là một hệ sinh của không gian các đa thức $K[t]$.

(iv) Nếu S là hệ sinh của V thì mọi tập chứa nó cũng là hệ sinh của V. Nói riêng V là hệ sinh của V.

Để chứng tỏ S là một hệ sinh của không gian véc tơ hữu hạn sinh V, ta phải chứng tỏ một tập con hữu hạn $v_1, ..., v_n$ của nó là một hệ sinh của V.

Để chứng tỏ $v_1, ..., v_n$ là một hệ sinh của V ta có hai phương pháp chính sau đây.

Phương pháp 1 (theo định nghĩa): Chứng tỏ với mọi $v \in V$ tìm được $\alpha_1, ..., \alpha_n$ để

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Trong K^m điều kiện cần phải là $n \geq m$ (Hệ quả 2.4) và điều kiện tương đương là hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

luôn có nghiệm với mọi $(b_1, ..., b_m) \in K^m$, trong đó $v_i = (a_{1i}, ..., a_{mi})$, $i = 1, ..., n$.

Nếu trong V đã có một cơ sở (xem mục tiếp theo), thì sử dụng tọa độ của các véc tơ, ta luôn có thể đưa bài toán chứng minh $v_1, ..., v_n$ là một hệ sinh về việc xét hệ phương trình vừa nêu.

Phương pháp 2: Nếu đã biết trước một hệ sinh $u_1, ..., u_m$ của V, thì ta chỉ cần chứng tỏ mỗi véc tơ u_i biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, ..., v_m$, $i = 1, ..., m$.

Nếu sử dụng định thức thì ta có thêm phương pháp

Phương pháp 3: Điều kiện cần và đủ để m véc tơ dòng của ma trận $A \in M(m, n; K)$ $(m \geq n)$ sinh ra K^n là A có định thức con cấp n khác 0. Tương tự, n véc tơ cột của ma trận $A \in M(m, n; K)$ $(n \geq m)$ sinh ra K^m nếu A có định thức con cấp m khác 0.

Ví dụ 2.4 Cho 4 véc tơ $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 2, 1)$, $w = (0, 0, 4)$, $z = (2, 4, 5)$. Ta sẽ chứng tỏ chúng sinh ra $\mathbb{R}^3$. Theo phương pháp 1, ta xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 2x_4 & = & b_1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_4 & = & b_2, \\ 3x_1 & & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & b_3, \end{cases}$$

Rõ ràng hệ này có nghiệm $x_4 = 0$, $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2/2 - b_1$, $x_3 = (b_3 - 3b_1)/4$. Vậy u, v, w, z là hệ sinh.

Theo phương pháp 2, ta thấy $e_3 = w/4$, $e_2 = v/2 - w/8$, $e_3 = u - v - w/2$. Vì e_1, e_2, e_3 là hệ sinh, nên u, v, w, z là hệ sinh.

Theo phương pháp 3, định thức $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8$, nên u, v, w, z là hệ sinh.

Mối liên hệ đẹp đẽ và bất ngờ của hai khái niệm chính xét trong mục này là

Định lí 2.8 *Tập S là hệ sinh tối tiểu của $E(S)$ khi và chỉ khi S độc lập tuyến tính.*

Bài tập

Bài 2.1 Tìm điều kiện cần và đủ để một hệ gồm
a) một véc tơ,
b) hai véc tơ,
là phụ thuộc tuyến tính.

Bài 2.2 Trong không gian các ma trận vuông cấp 2 trên $\mathbb{R}$, xét xem các ma trận sau có độc lập tuyến tính không?

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 2.3 Xét xem trong $\mathbb{Q}^3$ các hệ véc tơ nào trong số sau là độc lập tuyến tính

a) $(1, 2, -3)$, $(1, -3, 2)$, $(2, -1, 5)$,

b) $(4, 1, 2)$, $(1, 3, 5)$, $(-1, -7, 2)$, $(3, 4, 0)$, $(2, 3, -1)$,

c) $(12, 6, -3)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 2)$.

Bài 2.4 Xét xem trong không gian các đa thức một biến $\mathbb{R}[t]$, hệ véc tơ nào trong số sau là độc lập tuyến tính

a) $t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, $t^3 - t^2 + 8t + 2$, $2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$,

b) $t^3 + 4t^2 - 2t + 3,\ t^3 + 6t^2 - t + 4,\ 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7,$

c) $t^3 + 2t^2 - t + 1,\ 2t^3 - 3t^2 + 4t - 2,\ t^3 - 12t^2 + 11t - 7.$

Bài 2.5 Trong không gian các hàm số thực từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ hãy chứng tỏ rằng các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính

a) $f = e^t,\ g = t^2 + 1,\ h = |t|,$

b) $f = \sin(t),\ g = \cos(t),\ h = \sin(2t), l = \cos(2t).$

Bài 2.6 Cho $v_1, ..., v_n$ là các véc tơ của K^m, $(m > 1)$. Cho $p < m$ và với mỗi $i \leq n$ kí hiệu u_i là véc tơ của K^p gồm p thành phần đầu tiên của v_i. Chứng tỏ rằng:

a) Nếu $u_1, ..., u_n$ độc lập tuyến tính, thì $v_1, ..., v_n$ cũng độc lập tuyến tính.

b) Nếu $v_1, ..., v_n$ phụ thuộc tuyến tính, thì $u_1, ..., u_n$ cũng phụ thuộc tuyến tính.

Bài 2.7 Chứng tỏ rằng trong không gian véc tơ V, nếu $v_1, ..., v_n$ là các véc tơ độc lập tuyến tính, thì mỗi véc tơ v có không quá một biểu diễn tuyến tính qua $v_1, ..., v_n$.

Bài 2.8 Chứng tỏ rằng một hệ được sắp các véc tơ $v_1, ..., v_n$ khác 0 là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi không có véc tơ v_i nào biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ đứng trước nó.

Bài 2.9* Không dùng định lí Steinitz (và các hệ quả của nó), hãy chứng tỏ rằng không gian $C[a, b]$, $a < b$, không hữu hạn sinh.

Bài 2.10 Không dùng định lí Steinitz (và các hệ quả của nó), hãy chứng tỏ rằng không gian các đa thức $n \geq 1$ biến không hữu hạn sinh.

Bài 2.11 Giả sử $u_1, ..., u_n$ là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính và $a_{ij} \in K;\ i \leq j \leq n$. Chứng minh rằng các véc tơ

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1, \\ v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \\ &\cdots\cdots \\ v_n &= a_{n1}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n, \end{aligned}$$

là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0$.

Bài 2.12 Giả sử $u_1, ..., u_n$ là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính và $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. Chứng minh rằng các véc tơ $u - u_1, ..., u - u_n$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $a_1 + \cdots + a_n \neq 1$.

Bài 2.13 Cho V là không gian véc tơ trên $\mathbb{C}$. Khi đó V cũng là không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$, và để khỏi nhầm lẫn ta kí hiệu nó là V'. Chứng tỏ rằng:

a) Nếu $v_1, ..., v_n$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$ (tức trong V) thì cũng độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$ (tức trong V'), và $v_1, ..., v_n$ là hệ sinh của V' thì cũng là hệ sinh của V. Các điều ngược lại không đúng.

b) Nếu $v_1, ..., v_n$ là hệ sinh của V thì $v_1, iv_1, ..., v_n, iv_n$ là hệ sinh của V'.

Bài 2.14* Trong không gian $\mathbb{R}^n$ xét hệ véc tơ $v_1 = (v_{11}, ..., v_{1n}), ..., v_p = (v_{p1}, ..., v_{pn})$, $p \leq n$, có tính chất

$$|v_{ii}| > \sum_{j \neq i} |v_{ij}|.$$

Chứng tỏ rằng hệ này độc lập tuyến tính.

Bài 2.15 Chứng tỏ rằng các hệ véc tơ sau đây độc lập tuyến tính trong không gian các hàm liên tục $C[0, 1]$:

a) $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin(3x)$, $\cos(3x)$, ...,

b) e^x, e^{2x}, e^{3x}, ...

Bài 2.16 Chứng tỏ rằng hệ véc tơ $x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n}$, trong đó $\alpha_1, ..., \alpha_n$ là các số thực khác nhau, là độc lập tuyến tính trong không gian các hàm liên tục $C[0, 1]$.

Bài 2.17 Xem trong $\mathbb{C}^3$ các hệ véc tơ nào là hệ sinh:

a) $(1, 2, 3)$, $(2, -5, 6)$, $(0, 0, 0)$,

b) $(2, -5, 1)$, $(1, 0, 3)$, $(4, 3, 2)$, $(-1, -1, -1)$,

c) Các véc tơ có đúng hai thành phần bằng nhau và khác 0.

Bài 2.18 Tìm điều kiện trên $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ để nó thuộc không gian con sinh bởi các véc tơ: $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -3, 2)$ và $w = (0, 7, -4)$.

Bài 2.19 Cho không gian véc tơ V và $S \subseteq V$. Chứng tỏ rằng $E(S)$ bằng giao của các không gian con chứa S. Từ đó suy ra $E(E(S)) = E(S)$.

Bài 2.20 Chứng minh rằng

a) Nếu $S \subseteq T$ thì $E(S) \subseteq E(T)$.

b) Nếu S là hệ sinh của không gian con V_1 và T là hệ sinh của không gian con V_2 thì $S \cup T$ là hệ sinh của $V_1 + V_2$. Nói cách khác $E(S \cup T) = E(S) + E(T)$.

Bài 2.21* Chứng minh rằng từ mọi hệ sinh của V luôn tìm được một tập con là hệ sinh tối tiểu.

Bài 2.22 Không dùng Định lí Steinitz, hãy chứng minh mọi hệ sinh của không gian hữu hạn sinh đều chứa một hệ sinh con hữu hạn.

Bài 2.23* Cho K là trường có đặc số khác 2. Chứng minh rằng tập hợp $\{e_i + e_j;\ 1 \leq i \neq j \leq n\}$ là hệ sinh của K^n $(n \geq 3)$. Khi đặc số bằng 2 thì sao?

Bài 2.24 Cho L là trường con của trường K và $v_1, ..., v_m, v \in L^n$. Chứng minh rằng v biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, ..., v_m$ xét như các phần tử của L^n khi và chỉ khi v biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, ..., v_m$ xét như các phần tử của K^n.

Bài 2.25 Cho L là trường con của trường K và $v_1, ..., v_m \in L^n$. Chứng minh rằng $v_1, ..., v_m$ là độc lập tuyến tính xét như các phần tử của L^n khi và chỉ khi $v_1, ..., v_m$ là độc lập tuyến tính xét như các phần tử của K^n.

Bài 2.26 Tìm ví dụ chứng tỏ các tính chất độc lập tuyến tính và trở thành hệ sinh phụ thuộc vào đặc số của trường.

Bài 2.27 Cho $S_1 \subseteq V_1$ và $S_2 \subseteq V_2$, trong đó V_1, V_2 là hai không gian véc tơ trên K. Chứng minh rằng

a) $(S_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S_2)$ là hệ sinh của $V_1 \times V_2$ khi và chỉ khi S_1, S_2 tương ứng là các hệ sinh của V_1 và V_2.

b) $(S_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S_2)$ độc lập tuyến tính trong $V_1 \times V_2$ khi và chỉ khi S_1, S_2 độc lập tuyến tính.

3 Cơ sở, chiều và hạng của một hệ véc tơ

Cơ sở và chiều là những khái niệm quan trọng bậc nhất của không gian véc tơ.

Định nghĩa 3.1 Ta gọi hệ véc tơ $S \subset V$ là *cơ sở* của V nếu mỗi véc tơ của V có thể được biểu diễn tuyến tính duy nhất qua hệ S.

Nếu tập được sắp hoàn toàn $S = \{v_i,\ i \in I\}$ là cơ sở của V và $v \in V$, thì bộ phần tử $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ được gọi là *tọa độ* của v theo S khi

$$v = \sum \alpha_i v_i.$$

Định lí 3.2 (Định lí đánh tráo Steinitz)*: Số véc tơ trong mọi cơ sở của không gian véc tơ V hữu hạn sinh là như nhau. Số này được gọi là* chiều *của V, và được kí hiệu là* $\dim V$.

Như vậy, khi ta cố định một cơ sở, thì mỗi véc tơ được xác định duy nhất bằng tọa độ của nó. Chú ý rằng tọa độ phụ thuộc vào cả thứ tự các phần tử của cơ sở.

Ví dụ 3.1 Kiểm tra trực tiếp theo định nghĩa, dễ thấy

(i) Các véc tơ $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, $e_n = (0, ..., 0, 1)$ lập thành một cơ sở của không gian K^n. Ta gọi cơ sở này là *cơ sở tự nhiên (hoặc chính tắc).* Như vậy $\dim K^n = n$. Véc tơ $v = (x_1, ..., x_n)$ có tọa độ theo cơ sở này là $(x_1, ..., x_n)$. Tuy nhiên tọa độ của nó theo cơ sở $e_2, e_1, e_3, ..., e_n$ lại là $(x_2, x_1, x_3, , ..., x_n)$.

(ii) Tập tất cả các đơn thức (kể cả đơn thức 1) lập thành cơ sở của không gian các đa thức $R = K[x_1, ..., x_n]$. Tọa độ của một đa thức theo cơ sở này chính là dãy các hệ số (kể cả 0) của nó. Nói riêng, các đơn thức bậc không quá r lập thành cơ sở của không gian con $R_{\leq r}$ gồm các đa thức bậc không quá r. Do đó $\dim R_{\leq r} = \binom{n+r}{r}$.

Sau đây là các tiêu chuẩn và tương ứng là 6 phương pháp khác nhau để kiểm tra một tập có là cơ sở của một không gian véc tơ hay không. Tiêu chuẩn (iv) hay được sử dụng hơn cả, sau đó là các tiêu chuẩn (v), (vi), (vii).

Định lí 3.3 *Cho S là hệ véc tơ của không gian V. Các điều kiện sau tương đương:*

(i) S là cơ sở của V.

(ii) S là một hệ sinh tối tiểu.

(iii) S là một hệ độc lập tuyến tính cực đại.

(iv) S *vừa là hệ sinh, vừa độc lập tuyến tính.*

Khi $\dim V = n < \infty$ *thì các điều kiện trên cũng tương đương với:*

(v) S *là một hệ sinh có đúng* n *phần tử.*

(vi) S *là một hệ độc lập tuyến tính có* n *phần tử.*

(vii) S *có đúng* n *phần tử và ma trận với các cột (dòng) là các véc tơ tọa độ của các phần tử của* S *theo một cơ sở đã biết có định thức khác không.*

Ví dụ 3.2 (i) Cơ sở của không gian $\mathbb{C}$ trên $\mathbb{R}$ là 1 và i, vì mọi số phức đều biểu diễn được dưới dạng $a + bi = a.1 + b.i$ và $a.1 + b.i = 0$ chỉ khi $a = b = 0$. Nói riêng $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(ii) Trong không gian véc tơ $R = K[x]$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chọn một đa thức f_n có bậc đúng bằng n. Tập hợp $S = \{f_0,\ f_1,\ f_2, ...\}$ lập thành cơ sở của R. Nói riêng $\dim R = \infty$.

Thật vậy, theo Ví dụ 2.1(ii) tập hợp này độc lập tuyến tính. Cho $f \in R$ là một đa thức tùy ý. Giả sử đa thức này có bậc là r và hệ số cao nhất là a, còn hệ số cao nhất của f_r là b. Khi đó ta có thể viết $f = \frac{a}{b} f_r + g$, trong đó g là đa thức có bậc nhỏ hơn r. Bằng qui nạp ta suy ra f biểu diễn tuyến tính qua S, tức là S là hệ sinh. Vậy S là cơ sở của R (theo điều kiện (iv)).

Cách giải khác sau đây tuy cồng kềnh hơn, nhưng cho phép thấy được quan hệ giữa các mệnh đề trong định lí vừa nêu: Với kí hiệu như trên, ta có f thuộc không gian con $R_{\leq r}$ gồm các đa thức bậc tối đa r. Theo Ví dụ 3.1(ii), $\dim R_{\leq r} = r + 1$. Vì $r + 1$ véc tơ $f_0, ..., f_r \in R_{\leq r}$ và độc lập tuyến tính (theo Ví dụ 2.1(ii)), nên suy ra nó là cơ sở của $R_{\leq r}$ (theo điều kiện (vi)). Do đó nó cũng là hệ sinh, tức là f biểu diễn tuyến tính được qua $r + 1$ véc tơ đầu của S. Vậy S là hệ sinh, và lại theo Ví dụ 2.1(ii), S là cơ sở của R (theo điều kiện (iv)).

(iii) Giả sử $e_1,\ e_2,\ e_3$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Khi đó $e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ e_3 + e_1$ cũng lập thành cơ sở của V.

Thật vậy, định thức của ma trận các véc tơ dòng tọa độ của chúng tính theo khai triển Laplace là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Do đó S là cơ sở của V (theo điều kiện (vii)).

(iv) Giả sử V là không gian véc tơ $n \geq 2$ chiều trên $\mathbb{R}$ với cơ sở $e_1, ..., e_n$. Khi đó $e_1 + \cdots + e_{n-1}$, $e_2 + \cdots + e_n$, ..., $e_n + \cdots + e_{n-2}$ cũng là cơ sở của V.

Thật vậy, gọi W là không gian con sinh bởi các véc tơ này. Tổng các véc tơ này là $(n-1)(e_1 + \cdots + e_n) \in W$. Do đó $e = e_1 + \cdots + e_n \in W$. Lấy e trừ đi lần lượt các véc tơ trong hệ đã cho, ta được $e_1, ..., e_n \in W$. Vì $e_1, ..., e_n$ là cơ sở của V, nên $W = V$. Vậy hệ đã cho là hệ sinh của V. Theo điều kiện (vi) chúng là cơ sở của V.

Đôi khi để tìm một cơ sở cụ thể ta có thể xuất phát từ một hệ sinh hoặc một tập độc lập tuyến tính cực đại đã biết và áp dụng kết quả sau:

Hệ quả 3.4 *(i) Bất kì hệ sinh nào cũng chứa một cơ sở.*

(ii) Bất kì tập độc lập tuyến tính nào cũng mở rộng được thành cơ sở.

Từ đó suy ra

Hệ quả 3.5 *(i) Không gian con của một không gian hữu hạn chiều có chiều hữu hạn.*

(ii) Không gian chứa một không gian con vô hạn chiều là vô hạn chiều.

Ví dụ: Dựa vào Hệ quả 3.4 ta thấy các không gian trong Ví dụ 1.2(ii), (iii) là các không gian vô hạn chiều, vì nó chứa một cơ sở vô hạn (là cơ sở mở rộng tập độc lập tuyến tính gồm các đa thức $1, t, t^2, ...$). Chú ý rằng nếu thay vì đoạn $[a, b]$, ta xét toàn bộ trục số thì có thể áp dụng Hệ quả 3.5, vì khi đó các không gian đều chứa không gian các đa thức.

Trong nhiều trường hợp, việc tìm cơ sở của không gian con sinh bởi một số hữu hạn véc tơ được đưa về **thực hiện các phép biến đổi sơ cấp của ma trận** chỉ theo *dòng* hoặc đổi vị trí các cột cho nhau. Đến khi nào ta nhận được ma trận khối có dạng

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó A là ma trận tam giác cấp r nào đó có các phần tử trên đường chéo khác 0, thì chiều của không gian chính bằng r, và các véc tơ tương ứng với r dòng đầu của ma trận này sẽ là cơ sở. Các phép biến đổi sơ cấp theo dòng là:

- Hoán vị hai dòng cho nhau.
- Nhân một dòng với một phần tử vô hướng khác 0.
- Thêm vào một dòng một bội của dòng khác.

Nếu chỉ cần tìm chiều, ta có thể đồng thời thực hiện các phép biến đổi sơ cấp của ma trận theo dòng và cột. Khi đó việc tính toán đơn giản hơn, và ta luôn có thể đưa về ma trận khối có $A = I$.

Ví dụ 3.3 Tìm chiều và cơ sở của không gian véc tơ V sinh bởi $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$ và $a_5 = (0,1,2,3)$.

Lập ma trận và biến đổi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Như vậy $\dim V = 3$ và a_1, a_2, a_4 lập thành cơ sở của V (a_1, a_2, a_5 cũng lập thành cơ sở của V).

Ở trên, tại bước 1, ta trừ a_a, a_3, a_4 đi a_1. Tại bước 2, từ véc tơ thứ 3 ta lần lượt trừ đi bội của véc tơ thứ 2, rồi cho véc tơ 0 xuống cuối (tương ứng với a_3). Tại bước cuối cùng ta bớt véc tơ thứ 4 đi véc tơ thứ 3.

Để tìm chiều của giao hai không gian con, ta có thể áp dụng:

Định lí 3.6 (Định lí chiều giao) *Nếu V_1 và V_2 là hai không gian con hữu hạn chiều, thì*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2.$$

Số chiều đôi khi cũng là công cụ hữu hiệu để chứng minh hai không gian véc tơ bằng nhau.

Hệ quả 3.7 *Cho $U \subseteq V$ là hai không gian véc tơ hữu hạn chiều. Khi đó $\dim U \leq \dim V$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $U = V$.*

Bài tập

Bài 3.1 Kí hiệu O_{ij} là ma trận m-dòng và n-cột có phần tử ở dòng thứ i và cột thứ j bằng 1, còn các phần tử khác là 0. Chứng tỏ rằng $O_{11}, ..., O_{1n}, ..., O_{m1}, ..., O_{mn}$ lập thành một cơ sở của $M(K; m, n)$. Tìm tọa độ của một ma trận tùy ý theo cơ sở này và tìm $\dim M(K; m, n)$.

Bài 3.2 Xét xem hệ nào trong các tập sau đây lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

(i) $(2, 4, -4)$, $(3, 5, -2)$,

(ii) $(1, 0, -1)$, $(3, 2, 0)$, $(0, 4, -3)$, $(-2, 1, 3)$,

(iii) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(3, -2, 1)$,

(iv) $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$, $(5, 3, 4)$.

Bài 3.3 Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi:

$$(1, -2, 5, -3),\ (2, 3, -1, 1),\ (1, 12, -17, 11).$$

Tìm một cơ sở và chiều của V. Hãy mở rộng cơ sở đó thành cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Bài 3.4 Cho V là không gian con của $\mathbb{R}[t]$ sinh bởi các đa thức:

$$f_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad f_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1,$$
$$f_3 = t^3 + 6t - 5, \qquad f_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5.$$

Tìm một cơ sở của V và $\dim V$. Có thể mở rộng f_1, f_2 thành cơ sở của không gian các đa thức bậc không vượt quá 3 không? Cho ví dụ.

Bài 3.5 Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^n$ gồm các véc tơ thỏa mãn $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Hãy tìm cơ sở và chiều của V.

Bài 3.6 Tìm cơ sở và chiều của không gian con V của $\mathbb{R}^n$ gồm các véc tơ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$.

Bài 3.7 a) Tìm cơ sở và chiều của tập các ma trận vuông đối xứng cấp n.

b) Tìm cơ sở và chiều của tập các ma trận vuông đối xứng lệch (còn gọi là phản đối xứng, tức là $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi i, j) cấp n.

Bài 3.8 Tìm tọa độ của véc tơ v theo cơ sở $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ của $\mathbb{R}^3$ khi: a) $v = (4, -3, 2)$ b) $v = (a, b, c)$.

Bài 3.9 Tìm tọa độ của véc tơ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ trong cơ sở

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

của không gian véc tơ $M(2, \mathbb{R})$.

Bài 3.10 Tìm tọa độ của đa thức $f(x)$ bậc n trong cơ sở $1, x-2, (x-2)^2, ..., (x-2)^n$ của không gian các đa thức trên $\mathbb{R}$ có bậc không quá n.

Bài 3.11* Giả sử $\text{char}(K) \neq 2$ và $n \geq 3$. Hãy xem khi nào thì

$$e_1 + e_2, e_2 + e_3, ..., e_n + e_1$$

lập thành cơ sở của K^n. Khi $\text{char}(K) = 2$ thì sao?

Bài 3.12 Chứng minh rằng V là không gian chiều vô hạn nếu với mỗi n đều tìm được một hệ n véc tơ độc lập tuyến tính.

Bài 3.13 Cho V là một không gian chiều vô hạn. Hãy xây dựng một dãy tăng thực sự và một dãy giảm thực sự gồm vô hạn không gian con của V.

Bài 3.14 Cho $\dim V = n$. Chứng tỏ rằng mọi dãy lồng nhau các không gian con khác nhau của V có độ dài tối đa là n. Hơn nữa mọi dãy như vậy đều có thể bổ sung thành dãy có độ dài đúng bằng n.

Bài 3.15 Cho K là trường con của trường L, còn L là trường con của trường Q.

a) Chứng tỏ rằng L là không gian véc tơ trên K, còn Q là không gian véc tơ trên L và cũng là không gian véc tơ trên K.

b) Giả sử $\dim_K L = n$ và $\dim_L Q = m$. Chứng minh rằng $\dim_K Q = mn$.

Bài 3.16* Nghiệm của một đa thức với hệ số hữu tỷ được gọi là số đại số. Chứng minh rằng: tổng và tích của hai số đại số lại là một số đại số.

Bài 3.17* Chứng minh rằng $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.

Bài 3.18 Giả sử V_1 và V_2 là hai không gian con của không gian véc tơ hữu hạn chiều V thỏa điều kiện $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V$. Chứng minh rằng $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

Bài 3.19 Giả sử V_1 và V_2 là hai không gian con khác nhau chiều 4 của không gian véc tơ V có chiều 6. Hãy xác định các giá trị có thể có của $\dim(V_1 \cap V_2)$.

Bài 3.20 Giả sử V_1 và V_2 là hai không gian con của không gian véc tơ hữu hạn chiều V thỏa điều kiện $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$. Chứng minh rằng $V_1 + V_2$ trùng với một trong hai không gian con đã cho, còn $V_1 \cap V_2$ trùng với không gian con còn lại.

Bài 3.21 Giả sử $V_1, ..., V_4$ là các không gian con của không gian véc tơ hữu hạn chiều V. Chứng minh rằng

$$\dim(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 + \dim V_4 - \dim(V_1 \cap V_2) - \dim(V_3 \cap V_4) - \dim((V_1 + V_2) \cap (V_3 + V_4)).$$

Bài 3.22 Cho U là không gian con của V sinh bởi các véc tơ $v_1, ..., v_k$. Giả sử A là ma trận các véc tơ cột tọa độ của các véc tơ $v_1, ..., v_k$ theo một cơ sở nào đó. Chứng minh rằng chiều của U chính bằng hạng của ma trận A (được hiểu như số cột độc lập tuyến tính của A trong không gian $K^{\dim V}$), và mọi tập con độc lập tuyến tính cực đại của $\{v_1, ..., v_k\}$ là một cơ sở của U.

Bài 3.23 Cho U là không gian con sinh bởi

$$(1, 1, 0, -1),\ (1, 2, 3, 0),\ (2, 3, 3, -1),$$

và V là không gian con sinh bởi

$$(1, 2, 2, -2),\ (2, 3, 2, -3),\ (1, 3, 4, -3).$$

Tìm $\dim(U \cap V)$.

Bài 3.24 Cho U là không gian con sinh bởi

$$(1, 3, -2, 2, 3),\ (1, 4, -3, 4, 2),\ (2, 3, -1, -2, 9),$$

và V là không gian con sinh bởi

$$(1, 3, 0, 2, 1),\ (1, 5, -6, 6, 3),\ (2, 5, 3, 2, 1).$$

Tìm một cơ sở của $U + V$ và $U \cap V$.

Bài 3.25 Chứng minh rằng số phần tử của một trường hữu hạn bao giờ cũng có dạng p^n, trong đó p là một số nguyên tố và $n \geq 1$.

Bài 3.26 Chứng minh rằng nếu hệ véc tơ $v_1, ..., v_r$ độc lập tuyến tính và biểu diễn được qua các véc tơ $u_1, ..., u_s$, thì $r \leq s$.

Bài 3.27 Chứng minh rằng nếu mỗi véc tơ $v_1, ..., v_r$ biểu diễn tuyến tính được qua các véc tơ $u_1, ..., u_s$, thì hạng của $v_1, ..., v_r$ không vượt quá hạng của $u_1, ..., u_s$.

Bài 3.28 Chứng minh rằng véc tơ v biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, ..., v_r$ khi và chỉ khi hạng của $v_1, ..., v_r$ bằng hạng của $v_1, ..., v_r, v$.

Bài 3.29 Hai hệ véc tơ được gọi là tương đương nếu mỗi véc tơ của hệ này biểu diễn tuyến tính được qua hệ kia. Chứng minh rằng hai hệ véc tơ tương đương thì có cùng hạng. Ngược lại nếu hai hệ có cùng hạng và mỗi véc tơ của một hệ biểu diễn tuyến tính được qua hệ còn lại thì hai hệ tương đương.

4 Tổng trực tiếp

Cho V là không gian véc tơ trên trường K.

Định nghĩa 4.1 Cho $V_1, ..., V_r$ $(r \geq 2)$ là các không gian con của V. Ta gọi tổng $V_1 + \cdots + V_r$ (xem Bài 1.10) là *tổng trực tiếp (trong)*, nếu mỗi phần tử của $V_1 + \cdots + V_r$ chỉ viết được duy nhất dưới dạng $v_1 + \cdots + v_n$, trong đó $v_1 \in V_1, ..., v_n \in V_n$. Khi đó ta dùng kí hiệu $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ thay cho $V_1 + \cdots + V_r$.

Khái niệm này cũng có thể mở rộng được cho trường hợp vô hạn không gian con. Trước đây ta đã có khái niệm tổng trực tiếp ngoài (xem Ví dụ 1.3). Tuy nhiên, ta có thể đồng nhất hai khái niệm này với nhau (xem Bài 13.10). Vì vậy nhiều khi ta chỉ nói tổng trực tiếp, và tùy tình huống cụ thể sẽ hiểu ngay đó là tổng trực tiếp ngoài hay trong.

Việc phân tích một không gian véc tơ thành tổng trực tiếp các không gian con của nó là một công cụ rất quan trọng trong đại số tuyến tính (chẳng hạn, xem Chương 6).

Ngoài định nghĩa, kết quả sau đây cho ta hai phương pháp nữa để kiểm tra một tổng có là tổng trực tiếp không?

Định lí 4.2 *Cho $V_1, ..., V_r$ $(r \geq 2)$ là các không gian con của V. Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $V_1 + \cdots + V_r$ là tổng trực tiếp.

(ii) $(V_1 + \cdots + V_{j-1}) \cap V_j = 0$ *với mọi* $j = 2, ..., r$.

(ii') $(V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_r) \cap V_j = 0$ *với mọi* $j = 1, ..., r$.

(iii) Tồn tại các cơ sở $S_1, ..., S_r$ *của* $V_1, ..., V_r$ *đôi một không giao nhau sao cho* $S_1 \cup \cdots \cup S_r$ *là cơ sở của* $V_1 + \cdots + V_r$.

Tuy nhiên, khi các không gian con có chiều hữu hạn thì dùng hệ quả sau đây của định lí chiều giao, ta có một công cụ hữu hiệu hơn để nhận biết tổng trực tiếp.

Hệ quả 4.3 *Cho* $V_1, ..., V_r$ *là các không gian con hữu hạn chiều. Khi đó*

$$\dim(V_1 + \cdots + V_r) \leq \dim V_1 + \cdots + \dim V_r,$$

và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $V_1 + \cdots + V_r$ *là tổng trực tiếp.*

Ví dụ 4.1 (a) Cho $V = \mathbb{R}^2$, $V_1 = \{(a, a);\ a \in \mathbb{R}\}$ và $V_2 = \{(a, -a);\ a \in \mathbb{R}\}$. Khi đó $V = V_1 \oplus V_2$. Thật vậy, một véc tơ tùy ý của V có thể được viết như sau:

$$(a, b) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}) + (\frac{a-b}{2}, -\frac{a-b}{2}).$$

Do đó $V = V_1 + V_2$. Hơn nữa, nếu $(a, b) = (u, u) + (v, -v)$, thì ta có $u = \frac{a+b}{2}$ và $v = \frac{a-b}{2}$, tức là phân tích trên là duy nhất.

Ta cũng có thể sử dụng điều kiện (ii) của Định lí 4.2, bằng cách kiểm tra $V_1 \cap V_2 = 0$.

Cách thứ 3: Vì $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$, nên theo Hệ quả 4.1, $V_1 + V_2$ là tổng trực tiếp.

(b) Cho $e_1, ..., e_r$ là các véc tơ độc lập tuyến tính trong V. Đặt $V_i = Ke_i$. Khi đó, theo điều kiện (iii) của Định lí 4.2 ta có ngay $V_1 + \cdots + V_r$ là tổng trực tiếp.

Định nghĩa 4.4 Cho V_1 là một không gian con của V. Ta nói không gian con V_2 của V là *không gian con bù* của V_1, nếu $V = V_1 \oplus V_2$.

Hệ quả 4.5 *Cho* V_1, V_2 *là các không gian con của* V. *Các điều kiện sau là tương đương*

(i) V_2 *là không gian con bù của* V_1.

(ii) $V = V_1 + V_2$ *và* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

(iii) *Tồn tại các cơ sở* S_1, S_2 *của* V_1, V_2 *không giao nhau sao cho* $S_1 \cup S_2$ *là cơ sở của* V.

Khi $\dim V < \infty$, *thì ta có thêm điều kiện*

(iv) $V = V_1 + V_2$ *và* $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Bài tập

Bài 4.1 Cho S_1 và S_2 là hai cơ sở của hai không gian con V_1 và V_2 của V. Giả sử $S_1 \cap S_2$ là cơ sở của $V_1 \cap V_2$. Chứng minh rằng $S_1 \cup S_2$ là cơ sở của $V_1 + V_2$.

Bài 4.2 Chứng minh rằng mọi không gian con của V đều có không gian con bù. Hơn nữa không gian con bù nói chung không xác định duy nhất.

Bài 4.3 Cho V_2 là không gian con bù của V_1 trong V và U là một không gian con khác của V chứa V_1. Chứng minh rằng $V_2 \cap U$ là không gian con bù của V_1 trong U.

Bài 4.4 Cho V_1, V_2 là hai không gian con của V. Giả sử $V_1 \cap V_2 \neq 0$. Chứng minh rằng mỗi phần tử thuộc $V_1 + V_2$ đều có ít nhất hai cách viết thành tổng hai véc tơ của V_1 và V_2.

Bài 4.5 Cho $\text{char}(K) = 0$, $V = K^n$, $V_1 = \{(x_1, ..., x_n);\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, $V_2 = \{(x_1, ..., x_n);\ x_1 = \cdots = x_n\}$. Chứng tỏ rằng $V = V_1 \oplus V_2$. Khi $\text{char}(K) \neq 0$, khẳng định có còn đúng không?

Bài 4.6 Cho $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, và $S_1, ..., S_r$ là các cơ sở của $V_1, ..., V_r$. Chứng tỏ rằng $S_1, ..., S_r$ đôi một không giao nhau và $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ là cơ sở của V.

Bài 4.7 Cho $V = V_1 \oplus V_2$ và $U \subseteq V$. Chứng tỏ rằng $(U \cap V_1) + (U \cap V_2)$ là tổng trực tiếp, nhưng có thể xảy ra trường hợp $U \neq (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2)$.

Bài 4.8 Cho d là đường thẳng (không gian con chiều 1) và H là siêu phẳng (không gian con chiều $n-1$) của một không gian véc tơ V chiều n. Chứng tỏ rằng hai không gian con này hoặc bù nhau, hoặc chứa nhau.

Chương 2

Ma trận

5 Các phép toán cơ bản của ma trận

Ma trận m dòng, n cột trên trường K còn được gọi là ma trận kích thước $m \times n$. Ta kí hiệu tập các ma trận này là $M(m, n; K)$. Ma trận vuông là ma trận có số cột bằng số dòng. Ta kí hiệu $M(n, n; K)$ đơn giản là $M(n, K)$, còn n được gọi là cấp của ma trận. Hai cách viết chính của ma trận là

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận chỉ gồm 1 dòng chính là các véc tơ của K^n viết dưới dạng dòng. Tương tự, ma trận chỉ gồm 1 cột chính là các véc tơ của K^n viết dưới dạng cột. Cho $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Các phép toán cơ bản trên ma trận là:

(1) Phép nhân vô hướng với một phần tử của K: nếu $A \in M(m, n; K)$ và $\alpha \in K$, thì $\alpha A \in M(m, n; K)$. Phần tử trên dòng thứ i và cột thứ j của tích αA bằng αa_{ij}, tức là nếu $C = \alpha A$, thì $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

(2) Phép cộng hai ma trận cùng kích thước: nếu $A, B \in M(m, n; K)$, thì $A + B \in M(m, n; K)$. Phần tử trên dòng thứ i và cột thứ j của tổng $A + B$ bằng $a_{ij} + b_{ij}$, tức là nếu $C = A + B$, thì $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

(3) Tích của hai ma trận: nếu $A \in M(m, n; K)$ và $B \in M(n, l; K)$, thì $AB \in M(m, l; K)$. Tích này được tính theo qui tắc "dòng nhân cột", tức là nếu $C = AB$ thì

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

(4) Phép chuyển vị: ma trận nhận được từ A bằng cách đổi dòng thành cột được gọi là *ma trận chuyển vị* của A. Ma trận này thường được kí hiệu là A^T. Như vậy nếu $A \in M(m,n;K)$, thì $A^T \in M(n,m;K)$. Nếu kí hiệu $A^T = (a_{ij}^T)$, thì $a_{ji}^T = a_{ij}$.

Ví dụ: Ma trận chuyển vị của véc tơ cột là véc tơ dòng, và ngược lại.

(5) Khi xét trên trường số phức $\mathbb{C}$ ta kí hiệu

$$\bar{A} = (\overline{a_{ij}}),$$

trong đó $\overline{a_{ij}}$ là số phức liên hợp của a_{ij}. *Ma trận liên hợp* của A là ma trận

$$A^* = (\overline{a_{ji}}) = (\bar{A})^T.$$

Tên gọi này xuất phát từ ma trận biểu diễn của toán tử liên hợp của toán tử tuyến tính trong không gian unita (xem Mục 26).

(6) Đối với ma trận vuông: ma trận A cấp n được gọi là *ma trận khả nghịch* nếu tồn tại ma trận B cấp n sao cho $AB = BA = I$, trong đó I là *ma trận đơn vị*, tức là ma trận có các phần tử trên đường chéo là 1, còn các phần tử khác bằng 0. Trong trường hợp đó, ma trận B tồn tại duy nhất và được gọi là *ma trận nghịch đảo*, và được kí hiệu là A^{-1}.

Các tính chất cơ bản của các phép toán trên ma trận:

(i) Cùng với phép nhân vô hướng và phép cộng ma trận, $M(m,n;K)$ lập thành một không gian véc tơ trên K chiều mn. (Nói cách khác là nó có 8 tính chất - một cách nhớ hữu hiệu các tính chất của ma trận!). Một cơ sở thông dụng của không gian này là tập các ma trận $\{O_{ij};\ i \le m,\ j \le n\}$, trong đó O_{ij} có phần tử dòng i, cột j bằng 1, còn ở các vị trí khác đều bằng 0.

(ii) Phép nhân có tính kết hợp, và có tính phân phối (cả trái và phải) đối với phép cộng, tức là nếu $A, A' \in M(m,n;K)$, $B, B' \in M(n,p)$, $C \in M(p,q;K)$ thì

$$A(BC) = (AB)C,\ (A+A')B = AB + A'B,\ A(B+B') = AB + AB'.$$

Ngoài ra nếu kí hiệu I_m, I_n là các ma trận đơn vị cấp m, n và $\alpha \in K$, thì

$$I_m A = AI_n = A,\ \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Nói riêng $M(m,K)$ lập thành một vành kết hợp có đơn vị, thậm chí là một K-đại số.

(iii) Các hệ thức sau đây thỏa mãn nếu các phép toán xuất hiện có nghĩa:

$$(A^T)^T = A,\ (A+B)^T = A^T + B^T,\ (\alpha A)^T = \alpha A^T,\ (AB)^T = B^T A^T.$$

(iv) Nếu A là ma trận vuông khả nghịch thì A^T cũng khả nghịch và

$$(A^{-1})^{-1} = A,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Chú ý 5.1 Người ta cũng mở rộng khái niệm ma trận trên một trường thành ma trận trên một vành, hoặc thậm chí trên một không gian véc tơ, nhóm giao hoán, ... Khi đó một số phép toán trên vẫn còn có ý nghĩa. Chẳng hạn nếu $v_1, ..., v_n$ là các véc tơ cột của ma trận A, thì ta cũng xét ma trận gồm các véc tơ $(v_1, ..., v_n)$ và đồng nhất nó với ma trận A ban đầu! Khi đó, ta có thể cộng hai ma trận dạng $(v_1, ..., v_n)$ với nhau, nhưng không thể thực hiện phép nhân $(v_1, ..., v_n)$ với $(v_1, ..., v_n)^T$ (ít nhất thì vì lí do tích của hai véc tơ không có nghĩa).

Bài tập

Bài 5.1 Tính

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & -4 & 5 \\ 9 & -6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(iii) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Tính AB, BA, AA^T, A^TA.

Bài 5.2 Hãy xác định tất cả ma trận vuông A cấp 2 giao hoán với tất cả các ma trận vuông cấp 2, tức là với mọi $B \in M(2; K)$ ta đều có $AB = BA$.

Bài 5.3 Chứng minh rằng một ma trận vuông cấp n giao hoán với mọi ma trận đường chéo cùng cấp khi và chỉ khi nó là ma trận đường chéo.

Bài 5.4 Chứng minh rằng ma trận vuông A cấp $n \geq 2$ giao hoán với tất cả các ma trận vuông cùng cấp là *ma trận vô hướng*, tức là ma trận có dạng aI, trong đó $a \in K$ và I là ma trận đơn vị cấp n.

Bài 5.5 Tìm tất cả các ma trận giao hoán với

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

Bài 5.6 Tích của hai ma trận AB thay đổi thế nào, nếu

(i) Đổi chỗ dòng i và j của ma trận A cho nhau.

(ii) Cộng vào dòng thứ i của A tích vô hướng của α với dòng thứ j của A.

(iii) Đổi chỗ cột i và j của ma trận B cho nhau.

(ii) Cộng vào cột thứ i của B tích vô hướng của α với cột thứ j của B.

Bài 5.7 Tìm tất cả ma trận vuông cấp 2 có bình phương của nó bằng ma trận 0.

Bài 5.8 Tìm tất cả ma trận vuông cấp 2 có bình phương của nó bằng ma trận đơn vị.

Bài 5.9 *Vết* của ma trận vuông A là tổng các phần tử trên đường chéo chính của A và được kí hiệu là $\mathrm{tr}(A)$. Chứng minh rằng nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì AB và BA có cùng vết.

Bài 5.10 Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp. Chứng tỏ rằng

a) Nếu $AB \neq BA$ thì $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ và $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$.

b) Nếu $AB = BA$ thì ta có khai triển Niu-tơn

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n.$$

Bài 5.11 Chứng tỏ rằng không tồn tại ma trận A, B trên trường có đặc số bằng 0 thỏa mãn đẳng thức $AB - BA = I$. Nếu trường có đặc số khác không thì sao?

Bài 5.12 Một ma trận vuông được gọi là *ma trận đối xứng (t.ư đối xứng lệch, hay phản đối xứng)* nếu $a_{ij} = a_{ji}$ (t.ư $a_{ij} = -a_{ji}$) với mọi i, j. Chứng minh rằng nếu trường cơ sở có đặc số khác 2, thì tập các ma trận đối xứng và tập các ma trận đối xứng lệch lập thành các không gian con bù nhau trong không gian véc tơ các ma trận vuông cùng cấp. Nếu trường có đặc số 2 thì sao?

Bài 5.13 Cho A là một ma trận tùy ý. Chứng tỏ rằng AA^T và A^TA là các ma trận (vuông) đối xứng. Tìm ví dụ chứng tỏ hai tích này là khác nhau ngay cả khi A là ma trận vuông. Nếu $K = \mathbb{R}$, khi nào một trong hai ma trận này có vết bằng 0?

Bài 5.14 Cho A, B là hai ma trận đối xứng (t.ư đối xứng lệch) cùng cấp. Chứng tỏ rằng $C = ABAB...ABA$ là ma trận đối xứng (t.ư đối xứng lệch).

Bài 5.15 Cho $A \in M(m, n; K)$ là một ma trận. Dùng các đường ngang và dọc, ta có thể chia A thành ma trận của các ma trận có kích thước nhỏ hơn: $A_{11}, ..., A_{1q}, ..., A_{p1}, ..., A_{pq}$. Khi đó, A được gọi là *ma trận khối* và được viết dưới dạng:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ & \cdots & \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}.$$

Các ma trận con của ma trận khối cùng hàng (t.ư cột) sẽ có cùng số dòng (t.ư cột). Các phép toán trên ma trận khối cũng được định nghĩa tương tự như đối với ma trận bình thường, miễn sao cho các phép toán trên các ma trận phần tử thực hiện được. Chẳng hạn, để có thể thực hiện phép cộng $A, B \in M(m, n; K)$ thì ta phải chia A, B thành các khối kích thước giống nhau, nghĩa là $A = (A_{ij})_{i \le p, j \le q}$ và $B = (B_{ij})_{i \le p, j \le q}$ sao cho A_{ij} và B_{ij} có cùng kích thước. Để có thể nhân hai ma trận khối AB thì số cột khối của A phải bằng số dòng khối của B, và số cột của mỗi ma trận con A_{ij} phải bằng số dòng của B_{jl}.

Chứng minh rằng việc thực hiện phép toán trên các khối đối với ma trận khối cũng cho kết quả như khi thực hiện trên các ma trận thông thường.

Bài 5.16 Chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để bình phương của một ma trận khối có nghĩa là các khối ở đường chéo phải là ma trận vuông.

Bài 5.17 Cho A, B là hai ma trận đối xứng lệch cùng cấp. Chứng tỏ rằng AB là đối xứng lệch khi và chỉ khi $AB = -BA$. Tìm ví dụ hai ma trận đối xứng lệch khác 0 thỏa mãn điều kiện trên.

Bài 5.18 Ma trận vuông A được gọi là *ma trận lũy linh* nếu tồn tại $r \geq 1$ để $A^r = 0$. Chứng tỏ rằng nếu A, B là hai ma trận lũy linh và giao hoán với nhau thì tích và tổng của chúng là hai ma trận lũy linh.

Bài 5.19 Cho $A_1, \ldots, A_n$ là các ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử trên và dưới đường chéo chính bằng 0. Chứng tỏ rằng $A_1 \ldots A_n = 0$.

Bài 5.20 Chứng tỏ rằng ma trận tam giác là *ma trận lũy linh* khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo của nó bằng 0.

Bài 5.21 Chứng tỏ rằng tích của hai ma trận đối xứng (hoặc cùng phản đối xứng) là ma trận đối xứng khi và chỉ khi chúng giao hoán với nhau.

Bài 5.22 Chứng minh các tính chất sau của phép lấy liên hợp:

a) $(A + B)^* = A^* + B^*$. b) $(AB)^* = B^* A^*$.

c) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$. d) $(A^*)^* = A$.

Ở trên A, B là các ma trận để phép toán có nghĩa và $\alpha \in \mathbb{C}$.

Bài 5.23 Ma trận phức A được gọi là ma trận Hermite nếu $A = A^*$. Chứng tỏ rằng với mọi ma trận phức B thì BB^* và B^*B là các ma trận Hermite.

6 Ma trận nghịch đảo

Điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông A khả nghịch là định thức của nó khác 0. Có ba cách để tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A như sau:

Cách 1: Chú ý rằng nếu $AB = I$ thì ta cũng suy ra $BA = I$ (dùng lí thuyết định thức). Do đó từ hệ thức $AB = I$ ta có thể lập ra n hệ phương trình tuyến tính: mỗi hệ ứng với việc so sánh hai cột tương ứng của các ma trận ở hai vế. Nó gồm n phương trình và n ẩn là các phần tử trên một cột của B. A khả nghịch khi và chỉ khi tất cả n hệ lập thành có nghiệm duy nhất. Như vậy, khi sử dụng cách này ta không cần biết trước A có khả nghịch hay không. Chú ý rằng vế trái của n hệ phương trình này có chung ma trận hệ số. Do đó khi giải hệ phương trình theo phương pháp Gauss (tức đưa vế trái về dạng tam giác), tốt nhất ta xem vế phải như một véc

tơ tham số. Bằng cách đó ta chỉ cần biến đổi về trái một lần cho tất cả n hệ phương trình. Cách giải này đặc biệt hữu hiệu khi ma trận A có cấp bé, hoặc có dạng tam giác.

Ví dụ 6.1 Ma trận vuông A được gọi là *ma trận đường chéo* nếu các phần tử ngoài đường chéo chính của nó bằng 0, tức là $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$. Khi đó, A thường được kí hiệu là $\text{diag}(a_{11}, ..., a_{nn})$. Tìm điều kiện để một ma trận đường chéo là khả nghịch, và khi đó hãy tìm ma trận nghịch đảo của nó.

Cho $A = \text{diag}(a_1, ..., a_n)$. Hệ phương trình thứ i lập từ hệ thức $BA = I$ có dạng

$$\begin{cases} a_i b_{1i} & = 0, \\ .... & \\ a_i b_{(i-1)i} & = 0, \\ a_i b_{ii} & = 1, \\ a_i b_{(i+1)i} & = 0, \\ ... & \\ a_i b_{ni} & = 0. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ i ta suy ra $a_i \neq 0$ và $b_{ii} = 1/a_i$. Từ các phương trình còn lại ta suy ra $b_{ij} = 0$ nếu $j \neq i$. Vậy A khả nghịch khi và chỉ khi tất cả $a_1, ..., a_n$ khác 0. Ma trận nghịch đảo của nó là $\text{diag}(a_1^{-1}, ..., a_n^{-1})$.

Cách 2: Gọi D_{ij} là *phần bù đại số* của a_{ij}, tức là

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \mid A_{ij} \mid,$$

trong đó A_{ij} là ma trận con nhận được từ A bằng cách bỏ đi dòng i và cột j (A_{ij} được gọi là *ma trận con bù* của a_{ij}). Giả sử $\mid A \mid \neq 0$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{\mid A \mid} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 6.2 Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ta có $|A_{11}| = -1$, $|A_{12}| = -38$, $|A_{13}| = -27$, $|A_{21}| = -1$, $|A_{22}| = -41$, $|A_{23}| = -29$, $|A_{31}| = -1$, $|A_{32}| = -34$, $|A_{33}| = -24$. Do đó $|A| = 2.(-1) - 5(-38) + 7(-27) = -1$ và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Cách 3: Dựa trên mối liên hệ giữa các phép biến đổi sơ cấp dòng (xem Bài 6.8), ta có thể giải như sau:

Lập ma trận khối (A, I), trong đó I là ma trận đơn vị cùng cấp. Bằng phép biến đổi sơ cấp dòng liên tiếp, hãy đưa ma trận khối đó về ma trận khối dạng: (I, B). Khi đó $B = A^{-1}$.

Nhắc lại rằng các *phép biến đổi sơ cấp dòng* là các phép biến đổi sau đây :

(i) Đổi chỗ dòng i và j của ma trận A cho nhau.

(ii) Nhân dòng thứ i với một hằng số khác 0.

(iii) Cộng vào dòng thứ i của A tích vô hướng của α với dòng thứ $j \neq i$ của A.

Tương tự, thay chữ dòng bằng chữ cột, ta được khái niệm *phép biến đổi sơ cấp cột.*

Chú ý rằng dùng phép biến đổi sơ cấp dòng lần lượt ta có thể đưa cột thứ i, $i \leq n$, hoặc về dạng $(0, .., 0, 1, 0, ..., 0)^T$, trong đó 1 đứng ở vị trí thứ i, hoặc dạng $(*, ..., *, 0, ..., 0)^T$, trong đó có không quá $(i-1)$ phần tử đầu khác 0. Nếu rơi vào trường hợp sau ta không thể đưa được A về dạng (I, B) và khi đó ta có thể kết luận ngay A không khả nghịch.

Ví dụ 6.3 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Để giải, ta lập ma trận (A, I) và biến đổi dòng

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài tập

Bài 6.1 Chứng tỏ rằng nếu A là ma trận lũy linh thì $I + A$ là ma trận khả nghịch.

Bài 6.2 Ma trận được gọi là *ma trận tam giác trên (t.ư dưới)* nếu mọi phần tử dưới (t.ư trên) đường chéo chính của nó đều bằng 0. Ma trận được gọi là *ma trận tam giác* nếu nó là ma trận tam giác trên (hoặc dưới). Chứng minh rằng ma trận tam giác là khả nghịch khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo chính khác 0. Trong trường hợp đó ma trận nghịch đảo của nó cũng là ma trận tam giác. Hãy nêu cách tìm ma trận nghịch đảo đó.

Bài 6.3 Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Bài 6.4 Cho A là ma trận phức khả nghịch. Chứng tỏ rằng $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Bài 6.5 Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 6.6 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(a cách 1 một khoảng đúng bằng $r \leq n-1$).

Bài 6.7 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 6.8 Cho A là ma trận kích thước $m \times n$.

a) Chứng tỏ rằng mỗi phép biến đổi sơ cấp dòng (t.ư cột) tương đương với việc nhân bên trái với một ma trận vuông cấp m (t.ư. nhân bên phải với một ma trận vuông cấp n).

b) Chứng tỏ rằng các phép biến đổi sơ cấp dòng (t.ư cột) có phép biến đổi ngược, và do đó các ma trận tương ứng với chúng trong câu a) là khả nghịch.

c) Cho $A \in M(n;K)$ và I là ma trận đơn vị cấp n. Chứng tỏ rằng nếu ma trận khối (A, I) được đưa về dạng (I, B), thì $B = A^{-1}$.

Bài 6.9 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 6.10 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp n (nếu có):

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}.$$

Bài 6.11* Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp n trên trường $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 6.12 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp n (nếu có):

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

Bài 6.13* Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp n trên trường $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \cdots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a+h & a+2h & a+3h & \cdots & a+(n-1)h & a \end{pmatrix}.$$

Bài 6.14* Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp n trên trường $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \epsilon^3 & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \epsilon^6 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \epsilon^{3(n-1)} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

trong đó $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Bài 6.15 Ma trận nghịch đảo A^{-1} thay đổi thế nào, nếu:

a) Hoán vị hai dòng của A?

b) Nhân một dòng với một hằng số khác 0?

c) Thêm vào dòng thứ i tích của dòng thứ $j \neq i$ với một số α?

d) Tương tự như trên, nhưng thực hiện các phép biến đổi theo cột?

Bài 6.16 Chứng tỏ rằng ma trận vuông với hệ số nguyên có ma trận nghịch đảo nguyên khi và chỉ khi định thức của nó bằng ± 1.

Bài 6.17 Cho L là mở rộng của trường K. Chứng tỏ rằng ma trận vuông $A \in M(n;K)$ khả nghịch trên K khi và chỉ khi nó khả nghịch trên L.

Bài 6.18 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận khối $A = \begin{pmatrix} I_k & B \\ 0 & I_l \end{pmatrix}$, trong đó I_k, I_l là các ma trận đơn vị cấp k và l.

Bài 6.19 Chứng tỏ rằng ma trận khối $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, trong đó B, C là các ma trận vuông, là khả nghịch khi và chỉ khi B, C khả nghịch. Khi đó $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Bài 6.20* Cho A là ma trận vuông khả nghịch cấp n, B là ma trận kích thước $n \times p$, còn C là ma trận kích thước $p \times n$. Giả sử ma trận khối $R = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}$ được đưa về ma trận khối $R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ bằng các phép biến đổi sơ cấp trên n dòng đầu hoặc thêm vào dòng có số thứ tự lớn hơn n tích của một trong n dòng đầu tiên với số α nào đó. Chứng tỏ rằng khi đó $X = CA^{-1}B$.

Bài 6.21* Cho A là ma trận vuông khả nghịch cấp n, I là ma trận vuông đơn vị cấp n. Giả sử ma trận khối $R = \begin{pmatrix} A & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ được đưa về ma trận khối $R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ bằng các phép biến đổi sơ cấp trên n dòng đầu hoặc thêm vào dòng có số thứ tự lớn hơn n tích của một trong n dòng đầu tiên với số α nào đó. Chứng tỏ rằng khi đó $X = A^{-1}$.

Bài 6.22 Cho A và B là hai ma trận vuông khả nghịch cùng cấp. Chứng tỏ rằng bốn đẳng thức sau tương đương với nhau:

$$AB = BA,\ AB^{-1} = B^{-1}A,\ A^{-1}B = BA^{-1},\ A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

7 Hạng của ma trận

Hạng của ma trận được tính dựa vào định lí sau:

Định lí 7.1 *Đối với một ma trận A tùy ý, các số sau bằng nhau:*

(i) Cấp cực đại của các định thức con khác 0 của A.

(ii) Số cực đại các cột độc lập tuyến tính của A.

(ii') Số phần tử của một tập con các cột độc lập tuyến tính cực đại của A.

(iii) Số cực đại các dòng độc lập tuyến tính của A.

(iii') Số phần tử của một tập con các dòng độc lập tuyến tính cực đại của A.

Ta gọi số xác định như trên là hạng của ma trận

Trên thực tế, việc dùng định thức con của ma trận $A \in M(m,n;K)$ để tính hạng của nó chỉ được áp dụng khi dễ dàng tìm thấy định thức con cấp khá lớn của nó khác 0: chẳng hạn, khi ta tìm được định thức con khác 0 có cấp bằng $\min(m,n)$, thì hạng của ma trận bằng $\min(m,n)$; hoặc nếu A là ma trận vuông cấp n và ta đã tìm được ngay một định thức con khác 0 cấp $n-1$, thì chỉ việc tính $\mid A \mid$ nữa thôi.

Cách thông dụng hơn là dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng hoặc cột, ta đưa A về dạng ma trận khối

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó C là ma trận tam giác trên có các phần tử đường chéo khác 0. Đây là *ma trận hình thang*. Khi đó hạng của A chính bằng cấp của C.

Một cách khác để nghiên cứu tính chất của hạng ma trận là người ta dùng ánh xạ tuyến tính nhận nó làm ma trận biểu diễn. Bằng cách này ta sẽ tránh được nhiều tính toán cồng kềnh.

Ví dụ 7.1 Cho $A \in M(m,n;K)$, $B \in M(m;K)$, $C \in M(n;K)$ sao cho B và C là ma trận khả nghịch. Chứng tỏ rằng $\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(AC) = \operatorname{rank} A$.

Gọi $\varphi : K^m \longrightarrow K^m$ là ánh xạ tuyến tính nhận B làm ma trận biểu diễn (theo cơ sở tự nhiên), và $\psi : K^n \longrightarrow K^m$ là ánh xạ tuyến tính nhận A làm ma trận biểu diễn (theo các cơ sở tự nhiên). Khi đó ma trận biểu diễn của $\varphi\psi$ là BA, và vì B khả nghịch, nên φ là đẳng cấu. Ta có

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim(\varphi\psi(K^n)) = \dim\varphi(\psi(K^n)) = \dim(\psi(K^n)) = \operatorname{rank} A.$$

Chú ý rằng đẳng thức $\dim\varphi(\psi(K^n)) = \dim(\psi(K^n))$ được suy ra từ tính đẳng cấu của φ.

Với AC ta có thể chứng minh tương tự.

Bài tập

Bài 7.1 Chứng tỏ rằng các phép biến đổi sơ cấp dòng hay cột không làm thay đổi hạng của ma trận.

Bài 7.2 Chứng tỏ rằng ma trận $A \in M(m, n; K)$ có hạng không lớn hơn $\min(m, n)$.

Bài 7.3 Tìm hạng của các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bài 7.4 Tìm hạng của các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Bài 7.5 Xác định α để hạng của ma trận sau là nhỏ nhất

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 7.6 Ma trận A có m dòng và hạng bằng r. Chứng tỏ rằng bất kì s dòng nào của A cũng lập thành ma trận có hạng ít nhất là $r + s - m$.

Bài 7.7 Chứng tỏ rằng nếu thêm một dòng vào ma trận đã cho thì hạng không giảm nhưng tăng tối đa là 1, còn nếu bớt đi một dòng từ ma trận đã cho thì hạng không tăng nhưng giảm tối đa là 1.

Bài 7.8 Cho A, B là hai ma trận sao cho tích AB xác định. Chứng tỏ rằng

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

Bài 7.9 Cho A, B là hai ma trận cùng kích thước. Chứng tỏ rằng

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

Tìm ví dụ chứng tỏ $\text{rank}(A+B) < \text{rank}(A), \text{rank}(B)$; $\text{rank}(A+B) > \text{rank}(A), \text{rank}(B)$ và $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

Bài 7.10* Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A),\ \text{rank}(B)\}.$$

Bất đẳng thức sau được gọi là bất đẳng thức Sylvester.

Bài 7.11 Chứng minh rằng mỗi ma trận có hạng bằng r có thể viết thành tổng của r ma trận có hạng bằng 1, nhưng không thể viết thành tổng của ít hơn r ma trận như vậy.

Bài 7.12* Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $AB = 0$. Chứng tỏ rằng $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$. Hơn nữa với mọi k thỏa mãn $\text{rank}(A) \leq k \leq n$, luôn tìm được ma trận B sao cho $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = k$ và $AB = 0$.

Bài 7.13* Chứng tỏ rằng nếu A là ma trận vuông cấp n trên trường có đặc số khác 2 và thỏa mãn $A^2 = I$, thì

$$\text{rank}(A+I) + \text{rank}(A-I) = n.$$

Bài 7.14* Cho A là ma trận có hạng là r. Chứng minh rằng định thức con nằm trên giao điểm của r dòng độc lập tuyến tính và r cột độc lập tuyến tính của A bao giờ cũng khác 0.

Bài 7.15* Chứng minh rằng hạng của ma trận đối xứng lệch là một số chẵn (cho đặc số của trường khác 2).

Bài 7.16* Chứng minh rằng hạng của ma trận đối xứng được xác định bằng cấp cao nhất của *định thức con chính* khác 0 (định thức con chính là định thức con nằm trên các cột và dòng có cùng chỉ số).

Bài 7.17* Chứng minh rằng hạng của ma trận đối xứng lệch được xác định bằng cấp cao nhất của *định thức con chính* khác 0.

Bài 7.18* Cho $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, trong đó A là ma trận vuông khả nghịch cấp n. Chứng minh rằng hạng của R bằng n khi và chỉ khi $D = CA^{-1}B$.

Bài 7.19* Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ma trận $A \in M(m,n;K)$ có hạng r là A được viết dưới dạng $A = BC$, trong đó $B \in M(m,r;K)$ có r cột độc lập tuyến tính, còn $C \in M(r,n;K)$ có r dòng độc lập tuyến tính.

Bài 7.20 Cho $A \in M(m,n;K)$ và L là một trường mở rộng của K. Chứng tỏ rằng hạng của A trên K cũng bằng hạng của A trên L.

8 Ma trận đa thức

Nếu $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r \in K[t]$ là đa thức một biến và $A \in M(n;K)$ là ma trận vuông, thì ta gọi

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_r A^r$$

là *ma trận đa thức*. Các tính chất cơ bản của ma trận đa thức là

Định lí 8.1 *(i) Với mọi $f, g \in K[t]$ và $\alpha \in K$, thì*

$$(f+g)(A) = f(A)+g(A),\ (\alpha f)(A) = \alpha f(A) \text{ và } (fg)(A) = f(A)g(A).$$

(ii) (Cayley-Hamilton) Gọi $f_A(t) = |A - tI|$ là đa thức đặc trưng của A. Khi đó $f_A(A) = 0$.

(iii) Tồn tại duy nhất một đa thức đơn (tức là có hệ số cao nhất bằng 1) có bậc bé nhất nhận A làm nghiệm. Hơn nữa mọi đa thức nhận A làm nghiệm đều chia hết cho đa thức đó. Đa thức đó được gọi là đa thức cực tiểu của A.

Bài tập

Bài 8.1 Tìm giá trị của đa thức $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ tại các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 8.2 Kiểm tra trực tiếp rằng ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thỏa mãn phương trình

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0.$$

Bài 8.3 Không dùng Định lí Hamilton-Cayley, chứng tỏ rằng với mọi ma trận vuông A đều tồn tại đa thức $f(x)$ khác 0 nhận A làm nghiệm.

Bài 8.4 Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp và $f, g \in K[x]$ là hai đa thức tùy ý. Chứng tỏ rằng nếu A, B giao hoán với nhau, thì $f(A)$ và $g(B)$ giao hoán với nhau.

Bài 8.5 Cho A là ma trận vuông cấp 2 và k là số nguyên dương. Chứng minh rằng $A^k = 0$ khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

Bài 8.6 Cho A là ma trận khả nghịch. Chứng tỏ rằng tồn tại đa thức f để $A^{-1} = f(A)$.

Bài 8.7 Chứng tỏ rằng nếu A là ma trận đường chéo khối $\text{diag}(A_1, ..., A_s)$ với các ma trận $A_1, ..., A_s$ vuông và $f(x)$ là một đa thức thì $f(A) = \text{diag}(f(A_1), ..., f(A_s))$.

Bài 8.8 Hai ma trận vuông A, B cùng cấp được gọi là *đồng dạng với nhau* nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$ và được kí hiệu là $A \approx B$. Chứng tỏ rằng nếu $A \approx B$ thì với mọi đa thức $f(x)$, $f(A) \approx f(B)$.

Bài 8.9* Cho A là một ô Jordan, tức là

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cho $f(x)$ là một đa thức. Chứng minh rằng

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Bài 8.10 Tính $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$.

Bài 8.11 Tính $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$.

Bài 8.12* Tính $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}$.

Bài 8.13* Tính $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$.

Bài 8.14* Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận trên $\mathbb{C}$ và $f(x)$ là một đa thức tùy ý. Tính $f(A)$.

Bài 8.15 Cho $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, trong đó B, C là các ma trận vuông. Chứng tỏ rằng đa thức cực tiểu g_A là bội chung nhỏ nhất của các đa thức cực tiểu g_B và g_C.

Bài 8.16 Chứng tỏ rằng một ma trận vuông là khả nghịch khi và chỉ khi đa thức cực tiểu của nó có hệ số tự do khác 0.

Bài 8.17 Cho A là ma trận vuông và $f(x)$ là đa thức tùy ý. Chứng tỏ rằng $f(A)^T = f(A^T)$. Nói riêng, nếu A đối xứng thì $f(A)$ cũng đối xứng.

Bài 8.18 Cho A là ma trận tam giác và $f(x)$ là đa thức tùy ý. Chứng tỏ rằng $f(A)$ cũng là ma trận tam giác.

Chương 3

Định thức

9 Hoán vị

Định nghĩa 9.1 *Hoán vị (hoặc phép thế)* của tập $\{1, ..., n\}$ là một song ánh từ tập này vào chính nó. Tập hợp tất cả các hoán vị của tập $\{1, ..., n\}$ được kí hiệu là S_n.

Thông thường, ta kí hiệu một hoán vị $\pi \in S_n$ như sau:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Như vậy $(\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n))$ là một cách sắp xếp thứ tự của $\{1, ..., n\}$. Vì vậy, trong một số sách, để cho gọn, người ta cũng viết π dưới dạng $(\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n))$.

Một cách tổng quát, song ánh của một tập hợp A gồm n phần tử vào chính nó cũng gọi là một hoán vị của tập A. Nếu liệt kê các phần tử của A dưới dạng $A = \{a_1, ..., a_n\}$, thì một hoán vị π của A sẽ có dạng

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_n} \end{pmatrix},$$

trong đó $\{j_1, j_2, ..., j_n\} = \{1, ..., n\}$. Như vậy có thể đồng nhất phép thế này với

$$\pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

Ta có thể xét tích của hai phép thế trong S_n như phép hợp thành của hai ánh xạ. Khi đó S_n là một nhóm.

Ví dụ 9.1 a) Ánh xạ đồng nhất của $\{1, ..., n\}$ là một hoán vị. Nó đóng vai trò là phần tử đơn vị của S_n.

b) Cho $1 \leq i < j \leq n$. Phép hoán vị

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

đổi chỗ hai phần tử $i < j$ cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại được gọi là *chuyển vị* (hay *phép thế sơ cấp*). Nó được kí hiệu là (i, j).

c) Cho $a_1, ..., a_k$ là các phần tử khác nhau của $\{1, ..., n\}$. Hoán vị π giữ nguyên các phần tử khác $a_1, ..., a_k$ và thỏa mãn $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3, ..., \pi(a_{k-1}) = a_k$, $\pi(a_k) = a_1$ được gọi là một *xích* độ dài k. Nó được kí hiệu là $(a_1, ..., a_k)$. Dễ thấy

$$(a_1, ..., a_k) = (a_1, ..., a_{k-1}) \circ (a_{k-1}, a_k).$$

Mệnh đề 9.2 *Mọi hoán vị của* $\{1, ..., n\}$ *đều là tích của các chuyển vị (của tập hợp này).*

Định nghĩa 9.3 Ta gọi cặp $\{i, j\} \subseteq \{1, ..., n\}$ là một *nghịch thế* của hoán vị π, nếu $i - j$ trái dấu với $\pi(i) - \pi(j)$. Hoán vị với số nghịch thế chẵn (t.ư. lẻ) được gọi là *hoán vị chẵn (lẻ)*. *Dấu* của π nhận giá trị bằng 1 nếu π là một hoán vị chẵn và bằng -1 nếu π là một hoán vị lẻ và được kí hiệu là $\operatorname{sign}(\pi)$.

Ví dụ 9.2 Số nghịch thế của $(1, 2)$ là 1. Một cách tổng quát, nếu $i < j$, thì số nghịch thế của chuyển vị (i, j) là $2(j - i) - 1$.

Bổ đề 9.4 *Với mọi* $\pi \in S_n$ *ta có*

$$\operatorname{sign}(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}.$$

Định lí 9.5 *Với mọi* $\sigma, \pi \in S_n$ *ta có*

$$\operatorname{sign}(\sigma\pi) = \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi).$$

Bài tập

Bài 9.1 Tính $\sigma\pi$ và $\pi\sigma$, trong đó

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài 9.2 Tính các tích (n đủ lớn):

a) $(1,2)(2,3)\cdots(n-1,n)$,

b) $(1,2)(3,4)\cdots(2n-1,2n)$,

c) $(3,2,1)(6,5,4)\cdots(3n,3n-1,3n-2)$,

d) $(1,2,3)(2,3,4)(3,4,5)\cdots(n-2,n-1,n)$.

Bài 9.3 Tính số nghịch thế của các hoán vị sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Có nhận xét gì về hoán vị này?

Bài 9.4 Chứng tỏ rằng $\text{sign}(\pi) = \text{sign}(\pi^{-1})$.

Bài 9.5 Chứng minh rằng từ một cách sắp xếp $a_1, ..., a_n$ của $\{1, 2, ..., n\}$ có thể đưa về cách sắp xếp $b_1, ..., b_n$ khác bằng cách lần lượt đổi chỗ hai phần tử cho nhau tối đa $n-1$ lần.

Bài 9.6 Cho σ là một hoán vị của tập A gồm n phần tử. Dấu của σ là dấu của hoán vị tương ứng với σ khi ta cố định một cách đánh dấu A bởi $1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng cách định nghĩa này không phụ thuộc vào việc đánh dấu các phần tử tập A. Hãy nêu ví dụ chứng tỏ số nghịch thế phụ thuộc vào cách đánh dấu.

Bài 9.7* Với mỗi $n \geq 3$ hãy tìm một hoán vị không thể phân tích thành tích của ít hơn $n-1$ chuyển vị.

Bài 9.8* Chứng minh rằng mỗi hoán vị có thể viết được thành tích của không quá $n(n-1)/2$ chuyển vị dạng $(i, i+1)$.

Bài 9.9 Cho số nghịch thế của hoán vị $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ là k. Tìm số nghịch thế của $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_n & j_{n-1} & \cdots & j_1 \end{pmatrix}$.

Bài 9.10 Tổng số các số nghịch thế ở tất cả các hoán vị của $\{1, ..., n\}$ là bao nhiêu?

Bài 9.11* Chứng minh rằng một hoán vị có k nghịch thế có thể viết được thành tích của k chuyển vị các phần tử liền kề, nhưng không thể viết được thành tích của ít nhân tử hơn.

Bài 9.12* Chứng minh rằng với mỗi số $0 \leq k \leq C_n^2$ luôn tồn tại hoán vị của $\{1, ..., n\}$ có đúng k nghịch thế.

10 Các phương pháp tính

Định thức của ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M(n; K)$ là tổng

$$| A | = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} ... a_{n\pi(n)},$$

trong đó S_n là tập tất cả các hoán vị của tập hợp n số tự nhiên đầu tiên $\{1, 2, ..., n\}$. Tuy nhiên việc tính định thức theo định nghĩa là rất khó khăn vì số hoán vị bằng $n!$ là một số khổng lồ khi n tăng. Trên thực tế nó chỉ được áp dụng để tính khi $n = 2$, hoặc khi ma trận A có dạng rất đặc biệt. Sau đây là một số phương pháp thông dụng.

1. Khai triển theo dòng hoặc cột

Cơ sở của phương pháp này là Định lí khai triển Laplace. Cho $1 \leq k < n$. Xét hai bộ chỉ số $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ và $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$. Ma trận gồm các phần tử nằm trên giao các dòng $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ và các cột $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ của ma trận A được gọi là một *ma trận con cấp* k và được kí hiệu là $A(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k)$, còn định thức của nó được gọi là

định thức con hay *milnor*. Ma trận con nằm trên giao các dòng và cột còn lại được gọi là *ma trận con bù* của $A(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k)$ và được kí hiệu là $\hat{A}(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k)$. Định thức

$$| \hat{A}(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) |$$

được gọi là *định thức con bù* của $| A(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) |$ trong A, còn

$$(-1)^{s(I,J)} | \hat{A}(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) |$$

được gọi là *phần bù đại số* của $| A(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) |$, trong đó $s(I, J) = (i_1 + \cdots + i_k) + (j_1 + \cdots + j_k)$.

Định lí 10.1 (Khai triển Laplace) *Giả sử đã chọn ra k dòng (t.ư. cột) trong một định thức cấp n ($1 \leq k < n$). Khi đó định thức đã cho bằng tích của tất cả các định thức con cấp k lấy ra từ k dòng (t.ư cột) đó với phần bù đại số của chúng, tức là*

$$\begin{aligned} &| A | \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} | A(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) | (-1)^{s(I,J)} | \hat{A}(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) | \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} | A(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) | (-1)^{s(I,J)} | \hat{A}(i_1, ..., i_k; j_1, ..., j_k) | . \end{aligned}$$

Trên thực tế khai triển Laplace hay được vận dụng cho một dòng hay một cột chứa nhiều 0.

Hệ quả 10.2 (Khai triển Laplace theo dòng thứ i hay cột thứ j)

$$\begin{aligned} | A | &= (-1)^{i+1} a_{i1} | \hat{A}_{i1} | + (-1)^{i+2} a_{i2} | \hat{A}_{i2} | + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} | \hat{A}_{in} | \\ &= (-1)^{j+1} a_{1j} | \hat{A}_{1j} | + (-1)^{j+2} a_{2j} | \hat{A}_{2j} | + \cdots + (-1)^{j+n} a_{nj} | \hat{A}_{nj} | . \end{aligned}$$

Ví dụ 10.1 Để tính định thức của ma trận tam giác trên (t.ư. dưới), ta

chỉ việc thực hiện liên tiếp khai triển Laplace theo cột (dòng) thứ nhất:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. Đưa về ma trận tam giác

Dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng hay cột ta đưa về ma trận tam giác trên hay dưới, rồi áp dụng Ví dụ 10.1. Khi thực hiện các phép biến đổi, định thức thay đổi theo qui tắc sau.

Mệnh đề 10.3 *(i) Định thức đổi dấu khi đổi chỗ hai dòng hoặc hai cột cho nhau. (Tính chất này được gọi là tính thay phiên)*

(ii) Định thức được nhân với $\alpha \in K$ khi ta nhân một dòng hay một cột với α.

(iii) Định thức không thay đổi khi ta thêm vào một dòng (t.ư. cột) một tổ hợp tuyến tính của các dòng (t.ư cột) còn lại.

Đây là phương pháp thông dụng nhất để tính định thức có cấp là một số cụ thể. Ta có thể trình bày thành thuật toán như sau:

Thuật toán tính định thức (Phương pháp Gauss)

1. 1a. Chọn một chỉ số i sao cho $a_{i1} \neq 0$, rồi đổi chỗ dòng thứ 1 và dòng thứ i cho nhau, đồng thời đổi dấu định thức. (*Thông thường, ta chọn i sao cho a_{i1} gần 1 nhất, hoặc chọn i đầu tiên thỏa mãn tính chất đó*). Nếu chỉ số như vậy không tồn tại thì định thức bằng 0.

   1b. Lần lượt trừ từ dòng thứ $j \geq 2$ đi tích của dòng thứ 1 (của ma trận mới) với a_{i1}/a_{11}.

2. Tại bước thứ k, $2 \leq k < n$, lặp lại bước 1 đối với ma trận con cấp $n-k+1$ ở góc phải bên dưới cùng.

3. Tối đa sau $n-1$ bước ta sẽ được một ma trận tam giác trên. Định thức của nó bằng tích các phần tử trên đường chéo.

Ví dụ 10.2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 19 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 19 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 96 \end{vmatrix} = 96.$$

Để viết cho gọn có thể phối hợp hai phương pháp trên: sau bước thứ nhất ta nhận được cột đầu chỉ có phần tử đầu tiên khác 0. Sử dụng khai triển Laplace đối với cột này, ta đưa về tính định thức cấp thấp hơn. Làm như thế này ta không những khỏi phải viết lại dòng đầu và cột đầu trong bước tiếp theo, mà còn có thể sử dụng các tính chất ở Mệnh đề 10.2 để đơn giản hóa ma trận nhận được từ bước thứ hai trở đi, trước khi sử dụng tiếp thuật toán trên.

Ví dụ 10.3

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 19 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -7 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 3.7.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 21.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -42.$$

Thuật toán trên tuy luôn cho ta kết quả, nhưng việc luôn luôn trừ đi một bội của dòng (cột) thứ nhất có thể dẫn tới một ma trận phức tạp ở (các) bước tiếp sau đó. Do đó, cũng vẫn phương pháp đưa về ma trận tam giác, nhưng tùy đặc thù bài toán, ta có thể linh hoạt trong việc sử dụng thứ tự các phép biến đổi sơ cấp.

Ví dụ 10.4 Tính *định thức Vandermonde*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Lấy dòng thứ $n-1$ nhân với $-x_1$ rồi cộng vào dòng thứ n, sau đó lấy dòng thứ $n-2$ nhân với $-x_1$ rồi cộng vào dòng thứ $n-1$, ... cho đến khi biến đổi xong dòng thứ 2, ta được

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i>j}(x_i - x_j).
\end{aligned}$$

Tại dòng thứ 2 ở trên ta áp dụng khai triển Laplace theo cột thứ nhất, tại dòng thứ 3 ta đưa các nhân tử chung của các dòng ra ngoài dấu định thức, còn ở dòng cuối cùng ta áp dụng công thức truy hồi.

3. Rút ra các nhân tử tuyến tính

Chú ý rằng nếu mỗi phần tử của ma trận vuông A cấp n là một đa thức bậc nhất đối với biến x nào đó, thì định thức $|A|$ là một đa thức của các biến đó với bậc (tổng thể) không quá n. Nếu bằng cách nào đó ta tìm được n đa thức bậc nhất $f_1, ..., f_n$ độc lập tuyến tính với nhau sao cho mỗi f_i là ước của $|A|$, thì ta có thể kết luận $|A|$ và tích $f_1 \cdots f_n$ sai khác nhau một nhân tử hằng số.

Ví dụ 10.5 Định thức

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

là một đa thức bậc tối đa là $n-1$, vì mỗi số hạng trong định nghĩa của đa thức là một tích $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}$ đều có thừa số thứ nhất là một

hằng số. Thực ra ta thấy chỉ có một tích có bậc đúng bằng n: nó tương ứng với tích của các phần tử trên đường chéo, tức khi π là hoán vị đồng nhất. Do đó bậc đa thức đúng bằng $n-1$ và hệ số đầu là 1. Mặt khác lần lượt cho $x = 1, 2, ..., n-1$, ta nhận được định thức có hai dòng bằng nhau, nên chúng đều bằng 0, tức là $D(1) = D(2) = \cdots = D(n-1)$. Do đó $D(x)$ chia hết cho $x-1, ..., x-n+1$. Suy ra $D(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

4. Phương pháp truy hồi

Tìm một hệ thức giữa định thức cấp n và các định thức cấp thấp hơn được định nghĩa tương tự. Trường hợp hay gặp nhất là khi ta nhận quan hệ dạng

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}.$$

Nếu $q = 0$ thì $D_n = p^{n-1}D_1$.

Nếu $q \neq 0$, ta gọi α và β là nghiệm của tam thức bậc hai $x^2 - px - q = 0$. Xét hai trường hợp nhỏ:

- Nếu $\alpha \neq \beta$ thì

$$D_n = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}\alpha^n + \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}\beta^n.$$

- Nếu $\alpha = \beta$ thì

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}D_2 - (n-2)\alpha^{n-1}D_1.$$

Ví dụ 10.6 Khai triển định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

theo dòng thứ nhất, ta được $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$. Hơn nữa $D_1 = 1$, $D_2 = 2$. Như vậy D_n chính là số Fibonacci thứ n, hay

$$D_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\}.$$

5. Sử dụng tính đa tuyến tính

Sử dụng tính đa tuyến tính (xem Mệnh đề 11.1), ta có thể đưa việc tính một định thức thành tính tổng của các định thức đơn giản hơn.

Ví dụ 10.7 Nếu viết các dòng của định thức

$$D(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

thành tổng của hai dòng:

$$(a_1, ..., x+a_i, ..., a_n) = (a_1, ..., a_i, ..., a_n) + (0, ..., x, ..., 0),$$

thì định thức trên được viết thành tổng của các định thức chứa hai dòng như nhau, trừ các trường hợp sau:

- Một định thức mà dòng thứ i có dạng $(0, .., x, ..., 0)$ (x ở vị trí thứ i), $i = 1, ..., n$: đó là định thức $| xE |$ và bằng x^n.

- n định thức có đúng một dòng j là $(a_1, ..., a_n)$, còn các dòng khác có dạng $(0, .., x, ..., 0)$ (x ở vị trí thứ i). Theo định nghĩa (khai triển Laplace) ta có ngay định thức này bằng $a_j x^{n-1}$. Vậy

$$D(x) = x^n + x^{n-1}(a_1 + \cdots + a_n).$$

Bài tập

Tính các định thức[1]

Bài 10.1 a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Bài 10.2 a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Bài 10.3 a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ b & c & a \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$.

[1] Nếu không nói gì khác, ta hiểu trường cơ sở là trường số phức.

Bài 10.4 a) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.

Bài 10.5 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, trong đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 + px + q = 0$.

Bài 10.6 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3(n-2)} & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-2)} & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$

Bài 10.7 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$

Bài 10.8 a) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} l & h & k & u & g \\ d & y & 0 & 0 & 0 \\ f & e & z & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & x \\ v & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Bài 10.9 a) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$

Bài 10.10 a) $\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{7}{4} & 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & -3 & -1 & \frac{7}{3} \\ 1 & -3 & -1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{3}{5} & \frac{15}{7} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$.

Bài 10.11 a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

Bài 10.12 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$.

Bài 10.13 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n - b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

Bài 10.14 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

Bài 10.15 $D = |\, a_{ij} \,|$, trong đó $a_{ij} = |i-j|$, $1 \le i, j \le n$.

Bài 10.16 a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

Bài 10.17 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

Bài 10.18 $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

Bài 10.19
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

Bài 10.20 a)
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & -4 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 6 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 \end{vmatrix}.$$

(cấp các định thức là n)

Bài 10.21
$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

Bài 10.22 a)
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}, \quad \text{b*)} \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

Bài 10.23
$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Bài 10.24
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \cdots & x_n^3+x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Bài 10.25 $\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$,

trong đó $\varphi_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \cdots + a_{kk}$.

Bài 10.26 $\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \cdots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Bài 10.27

$$\begin{vmatrix} f_n(x_1,y_1) & y_1 f_{n-1}(x_1,y_1) & \cdots & y_1^{n-1} f_1(x_1,y_1) & y_1^n \\ f_n(x_2,y_2) & y_2 f_{n-1}(x_2,y_2) & \cdots & y_2^{n-1} f_1(x_2,y_2) & y_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ f_n(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1} f_{n-1}(x_{n+1},y_{n+1}) & \cdots & y_{n+1}^{n-1} f_1(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

trong đó $f_i(x,y)$ là đa thức thuần nhất bậc i của hai biến x, y.

Bài 10.28 $\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$,

trong đó $\varphi_k(x)$ là các đa thức bậc không quá $n-2$.

Bài 10.29 $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

Bài 10.30 $\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n+1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \cdots & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$.

Bài 10.31* $\begin{vmatrix} x_1+y_1+1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2+1 & \cdots & x_2+y_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & \cdots & x_n+y_n+1 \end{vmatrix}$.

Bài 10.32
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Bài 10.33
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Bài 10.34*
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Bài 10.35*
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \cdots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \cdots & C_{m+n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \cdots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Bài 10.36 Chứng minh đẳng thức
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

11 Một số tính chất của định thức

Để ngắn gọn, nếu ta kí hiệu $v_1, ..., v_n$ là các véc tơ cột của ma trận vuông A, còn $u_1, ..., u_n$ là các véc tơ dòng của nó, thì $|A|$ cũng được viết dưới dạng

$$|v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n| \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}.$$

Tính đa tuyến tính của định thức có nghĩa là

Mệnh đề 11.1 *Với mọi chỉ số i cho trước:*

(i) *Với mọi* $\alpha \in K$, $| v_1 \cdots \alpha v_i \cdots v_n | = \alpha | v_1 \cdots v_i \cdots v_n |$.

(ii) $| v_1 \cdots v_i + v_i' \cdots v_n | = | v_1 \cdots v_i \cdots v_n | + | v_1 \cdots v_i' \cdots v_n |$.

Điều khẳng định tương tự đối với các cột cũng đúng.

Một số tính chất khác hay được sử dụng là

Mệnh đề 11.2 *(i)* $| A | = | A^T |$.

(ii) *Nếu* A, B *là hai ma trận vuông cùng cấp thì* $| AB | = | A | \, | B |$. *Từ đó, nếu* A *khả nghịch thì* $| A^{-1} | = 1/ | A |$.

(iii) *Nếu* A *là ma trận vuông cấp* n, *thì* $| A | = 0$ *khi và chỉ khi* $\operatorname{rank} A < n$.

(iv) *Cho* A, B *là hai ma trận vuông. Khi đó định thức ma trận tam giác khối*

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = | A | \, | B | .$$

Bài tập

Bài 11.1 Định thức thay đổi thế nào nếu ta đưa cột thứ nhất về cuối cùng, còn thứ tự các cột khác giữ nguyên? Tương tự đối với hàng.

Bài 11.2 Chứng tỏ rằng định thức của ma trận đối xứng lệch cấp lẻ trên trường có đặc số khác 2 bằng 0. Nếu đặc số của trường bằng 2 thì sao?

Bài 11.3 Định thức thay đổi thế nào nếu: a) các cặp cột đối xứng nhau qua "trục dọc" giữa ma trận đổi chỗ cho nhau?

b) Các cột được đánh số lại từ phải sang trái?

Bài 11.4* Định thức thay đổi thế nào nếu các cặp phần tử đối xứng nhau qua đường chéo phụ đổi chỗ cho nhau.

Bài 11.5 Định thức thay đổi thế nào nếu ta thực hiện phép hoán vị π trên các cột (dòng)?

Bài 11.6 Định thức thay đổi thế nào nếu ta nhân mỗi phần tử a_{ij} với C^{i-j}.

Bài 11.7 Ta nói vị trí của phần tử a_{ij} là chẵn hay lẻ tùy theo $i+j$ là chẵn hay lẻ. Định thức thay đổi thế nào nếu ta đổi dấu tất cả các phần tử

a) Ở vị trí chẵn?

b) Ở vị trí lẻ?

Bài 11.8* Định thức thay đổi thế nào nếu ta đổi chỗ các phần tử đối xứng qua "tâm" của ma trận cho nhau?

Bài 11.9 Định thức thay đổi thế nào nếu ta quay các phần tử xung quanh "tâm" của ma trận một góc $\pm 90^o$?

Bài 11.10 Tính $\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$.

Bài 11.11 Tính $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$.

Bài 11.12 Tính

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_n & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

trong đó $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.

Bài 11.13* Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n),$$

trong đó $f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$ và $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ là các căn (phức) bậc n của đơn vị. Định thức bên trái được gọi là *định thức chu trình.*

Bài 11.14* Tính *định thức chu trình lệch*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Bài 11.15* Tính

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_nz & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1}z & a_nz & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_2z & a_3z & a_4z & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Bài 11.16* Dùng tích hai định thức

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix},$$

chứng minh tính chất sau đây: tích của hai số nguyên mà mỗi số viết được thành tổng các bình phương của 4 số nguyên thì cũng có tính chất đó, tức là biểu diễn được thành tổng các bình phương của 4 số nguyên.

Bài 11.17* *(Công thức Binê-Côsi)* Cho $A \in M(m, n; K)$, $B \in M(n, m; K)$. Chứng minh rằng định thức D của ma trận tích AB bằng tổng của tất cả các tích các cặp định thức con cấp m của A và B khi $m \leq n$ và bằng 0 khi $m > n$. Cụ thể hơn, kí hiệu $A_{i_1,i_2,...,i_m}$ là định thức con cấp m của A lập

được từ các cột có chỉ số $i_1, ..., i_m$ và $B_{i_1,i_2,...,i_m}$ là định thức con cấp m của B lập được từ các dòng có chỉ số $i_1, ..., i_m$. Khi đó

$$D = \prod_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} A_{i_1,i_2,...,i_m} B_{i_1,i_2,...,i_m}.$$

Bài 11.18 Cho $s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$ và $p = x_1 \cdots x_n$. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} n+1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Bài 11.19 Cho A là ma trận vuông cấp n, còn I là ma trận đơn vị cấp n. Kí hiệu $f(x)$ là đa thức đặc trưng của A, tức là định thức $| A - xI |$. Chứng tỏ rằng $f(x)f(-x)$ bằng định thức $| B - x^2 I |$, trong đó các phần tử của B không phụ thuộc x. Tìm B.

Bài 11.20 *Ma trận trực giao* A là ma trận thỏa mãn $AA^T = I$. Chứng tỏ rằng $| A | = \pm 1$ và A^T cũng là ma trận trực giao.

Bài 11.21 Cho $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ lần lượt là tọa độ Đề các vuông góc của các điểm M_1, M_2, M_3 trên mặt phẳng. Chứng tỏ rằng định thức

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

không thay đổi qua phép dời hình.

12 Các bài toán tổng hợp về định thức

Bài 12.1 Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 có các phần tử bằng ± 1.

Bài 12.2 Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 có các phần tử bằng 1 hoặc 0.

Tính các định thức

Bài 12.3* $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$.

Bài 12.4* $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \cdots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

Bài 12.5* $\begin{vmatrix} x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+1 & x_2^2+1 & \cdots & x_n^2+1 \\ x_1^3+1 & x_2^3+1 & \cdots & x_n^3+1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^n+1 & x_2^n+1 & \cdots & x_n^n+1 \end{vmatrix}$.

Bài 12.6*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_{s-1}(x_1) & \varphi_{s+1}(x_1) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_{s-1}(x_2) & \varphi_{s+1}(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_{s-1}(x_n) & \varphi_{s+1}(x_n) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

trong đó $\varphi_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \cdots + a_{kk}$.

Bài 12.7 Chứng minh đẳng thức

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

Bài 12.8 Dùng định thức, chứng minh rằng $\cos n\alpha$ là đa thức bậc n của $\cos\alpha$, còn $\sin n\alpha$ bằng $\sin\alpha$ nhân với một đa thức bậc $n-1$ của $\cos\alpha$.

Bài 12.9* Tính $\begin{vmatrix} C_m^p & C_m^{p+1} & \cdots & C_m^{p+n} \\ C_{m+1}^p & C_{m+1}^{p+1} & \cdots & C_{m+1}^{p+n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{m+n}^p & C_{m+n}^{p+1} & \cdots & C_{m+n}^{p+n} \end{vmatrix}$.

Bài 12.10* Tính $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x_n \end{vmatrix}$.

Bài 12.11* Tính $\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ y & 0 & x & \cdots & x \\ y & y & 0 & \cdots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y & y & y & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Bài 12.12 Tìm mối liên hệ giữa hai định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad D^*(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Tính các định thức sau:

Bài 12.13* $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ y & a_2 & x & \cdots & x \\ y & y & a_3 & \cdots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

Bài 12.14* $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$.

Bài 12.15* $\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_n \end{vmatrix}$.

Bài 12.16* $\begin{vmatrix} x & \cdots & x & x & a_1 \\ x & \cdots & x & a_2 & y \\ x & \cdots & a_3 & y & y \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & \cdots & y & y & y \end{vmatrix}$.

Bài 12.17* $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$.

Bài 12.18* $\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \cdots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \cdots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \cdots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \cdots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

Bài 12.19 $\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$

Bài 12.20*

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & a & \cdots & a & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & a & a & a & \cdots & b & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \cdots & b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

(mỗi dòng gồm p số a và $n-p$ số b).

Bài 12.21* Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \cdots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \cdots & s-a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s-a_2 & s-a_3 & \cdots & s-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

trong đó $s = a_1 + \cdots + a_n$.

Bài 12.22* Chứng minh rằng định thức chu trình bậc $2n$ với dòng đầu là $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ bằng tích của định thức chu trình bậc n với dòng đầu là $a_1 + a_{n+1}$, $a_2 + a_{n+2}, ...,$ $a_n + a_{2n}$ và định thức chu trình lệch bậc n với dòng đầu là $a_1 - a_{n+1}$, $a_2 - a_{n+2}, ...,$ $a_n - a_{2n}$.

Bài 12.23* *Định thức phụ hợp* D' của định thức D là định thức nhận được từ D bằng cách thay mỗi phần tử bằng phần bù đại số của nó. Chứng minh rằng $D' = D^{n-1}$.

Bài 12.24* *Ma trận phụ hợp* A' của ma trận vuông A là ma trận nhận được từ A bằng cách thay mỗi phần tử bằng phần bù đại số của nó. Tìm $\operatorname{rank}(A')$ qua $\operatorname{rank}(A)$.

Bài 12.25* Cho M là định thức con cấp m của định thức D cấp n. Kí hiệu $\bar{M}$ là phần bù đại số của M và M' là định thức con cấp m tương ứng (tức gồm các phần tử ở các vị trí như của M) của định thức phụ hợp D'. Chứng minh rằng $M' = D^{m-1}\bar{M}$ (qui ước $0^0 = 1$).

Bài 12.26* Dùng định thức, chứng minh rằng

$$\prod_{0\le i<j\le n-1} 2\sin\frac{(i-j)\pi}{n} = n^{n/2}.$$

Bài 12.27* Chứng minh rằng tổng các phần bù đại số của các phần tử của ma trận $A = (a_{ij})$ bằng định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Bài 12.28 Chứng minh rằng tổng các phần bù đại số của các phần tử trong một định thức không đổi, nếu ta thêm vào tất cả các phần tử cùng một số.

Bài 12.29 Chứng minh rằng nếu một định thức có một hàng (hay cột) chứa toàn 1, thì tổng các phần bù đại số của các phần tử trong định thức đó chính bằng định thức ban đầu.

Bài 12.30 Cho K là trường có đặc số khác 2. Chứng minh rằng định thức là một phiếm hàm $D : M(n;K) \to K$ duy nhất thỏa mãn các tính chất sau: (i) D là đa tuyến tính theo các véc tơ cột (dòng).

(ii) D là phiếm hàm thay phiên.

(iii) $D(I) = 1$.

Bài 12.31* Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n và $B = (b_{pq})$ là ma trận vuông cấp m. *Tích Kronecker* của hai ma trận này là ma trận vuông cấp nm định nghĩa dưới dạng ma trận khối như sau:

$$A \times B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1m} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Ab_{m1} & Ab_{m2} & \cdots & Ab_{mm} \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng $| A \times B | = | A |^m | B |^n$.

Bài 12.32* Tính

a) Định thức của $P_n = (p_{ij})$, trong đó $p_{ij} = 1$ nếu i chia hết j và $p_{ij} = 0$ nếu ngược lại.

b) Định thức của $Q_n = (q_{ij})$, trong đó q_{ij} là số các ước chung của i và j.

Bài 12.33* Hàm Ôle $\varphi(n)$ là số các số không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n. Sử dụng Định lí Gauss nói rằng $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ hãy chứng tỏ rằng định thức của ma trận bậc n: $D_n = | (d_{ij}) |$, trong đó d_{ij} là ước chung lớn nhất của i và j, bằng tích $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$.

Bài 12.34* Kí hiệu

$$s_n(k) = 1^n + 2^n + \cdots + (k-1)^n.$$

Chứng minh rằng

$$s_{n-1}(k) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \cdots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \cdots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \cdots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ k^2 & 0 & 0 & \cdots & C_2^1 & 1 \\ k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bài 12.35* Khai triển hàm số $\frac{x}{\ln(1+x)}$ thành chuỗi lũy thừa, ta được

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \cdots$$

Chứng minh rằng

$$h_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Bài 12.36* Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}.$$

Chương 4

Ánh xạ tuyến tính và ma trận biểu diễn

13 Các tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính

Cho U, V là hai không gian véc tơ trên cùng trường K. Để kiểm tra xem một ánh xạ $\varphi : U \to V$ có là ánh xạ tuyến tính hay không, ta kiểm tra xem nó có bảo toàn hai phép toán hay không theo định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 13.1 Ta gọi $\varphi : U \to V$ là *ánh xạ tuyến tính*, nếu nó thỏa mãn một trong hai điều kiện tương đương sau đây

(i) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, và $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$,

(ii) $\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$,

với mọi $u, v \in U$ và $\alpha, \beta \in K$.

Nếu $U = V$ thì φ được gọi là *toán tử tuyến tính* hay *tự đồng cấu*. Nếu $V = K$ thì φ được gọi là *dạng tuyến tính*.

Chú ý rằng trong định nghĩa trên dù được kí hiệu như nhau (bằng dấu "+" và viết liền nhau), nhưng ở vế trái là phép cộng và phép nhân vô hướng trong U, còn ở vế phải là phép cộng và phép nhân vô hướng trong V!

Hệ quả trực tiếp của định nghĩa trên là $\varphi(0) = 0$ và $\varphi(-u) = -\varphi(u)$.

Ví dụ 13.1 Cho U, V là các không gian véc tơ trên K.

(a) Ánh xạ đồng nhất $\mathrm{id} : V \to V$ trên V là một ánh xạ tuyến tính. Để chỉ rõ V, ánh xạ này đôi khi cũng được kí hiệu là id_V.

(b) Một cách tổng quát, nếu $U \subseteq V$, thì ánh xạ $j : U \to V$ xác định bởi $j(u) = u$ với mọi $u \in U$ là một ánh xạ tuyến tính và được gọi là *ánh xạ nhúng*.

(c) Ánh xạ $0 : U \to V$ biến mọi véc tơ của U thành véc tơ 0 của V là một ánh xạ tuyến tính, được gọi là ánh xạ không và cũng được kí hiệu là 0.

(d) Ánh xạ $p : K^n \longrightarrow K^m$, $(n > m)$ xác định bởi

$$p(a_1, ..., a_n) = (a_1, ..., a_m)$$

là ánh xạ tuyến tính và được gọi là *phép chiếu*. Đây chính là mở rộng của phép chiếu từ mặt phẳng lên trục tọa độ thứ nhất, hay phép chiếu trong không gian (ba chiều) lên mặt phẳng hay trục tọa độ. Tổng quát hơn, các ánh xạ $p_1 : U \times V \to U$ và $p_2 : U \times V \to V$ xác định bởi

$$p_1(u, v) = u, \quad p_2(u, v) = v$$

là các ánh xạ tuyến tính và được gọi là các phép chiếu (lên U hay V).

(e) Phép liên hợp $\mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \bar{z}$ là một ánh xạ tuyến tính nếu xét $\mathbb{C}$ là không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$, vì nếu $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, thì với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha z_1 + \beta z_2} &= \overline{(\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) i} \\ &= \alpha a_1 + \beta a_2 - (\alpha b_1 + \beta b_2) i \\ &= \alpha \overline{z_1} + \beta \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Tuy nhiên nó không phải là ánh xạ tuyến tính nếu xét $\mathbb{C}$ là không gian véc tơ trên $\mathbb{C}$, vì $\overline{i \cdot 1} = -i \neq i = i\overline{1}$, tức là nó không bảo toàn phép nhân vô hướng (mặc dù nó bảo toàn phép cộng).

Một cách khác cũng hay được sử dụng là dựa vào tính chất hợp của hai ánh xạ tuyến tính lại là ánh xạ tuyến tính. Cụ thể

Mệnh đề 13.2 *Cho U, V, W là các không gian véc tơ trên K, $\varphi : U \to V$ và $\psi : V \to W$ là các ánh xạ tuyến tính. Khi đó ánh xạ hợp thành $\psi\varphi : U \to W$ cũng là ánh xạ tuyến tính.*

Ta cũng có thể sử dụng các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính để nhận được một ánh xạ mới đương nhiên là ánh xạ tuyến tính (xem Bài 13.9). Mục 15 sẽ đề cập tới các cách xác định một ánh xạ tuyến tính.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính:

Mệnh đề 13.3 *Cho $\varphi : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

(i) Ảnh của các không gian con của U là không gian con của V, nghĩa là nếu $U' \subseteq U$ là không gian con, thì $\varphi(U')$ là không gian con của V. Nói riêng

$$\mathrm{Im}(\varphi) := \varphi(U) = \{\varphi(u);\ u \in U\}$$

là không gian con của V. Nó được gọi là ảnh của φ. Nếu $\mathrm{Im}(\varphi)$ có chiều hữu hạn, thì $\dim \mathrm{Im}(\varphi)$ được gọi là hạng của φ và được kí hiệu là $\mathrm{rank}(\varphi)$.

(ii) Nghịch ảnh của các không gian con của V là không gian con của U, nghĩa là nếu $V' \subseteq V$ là không gian con, thì $\varphi^{-1}(V')$ là không gian con của U. Nói riêng

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{u \in U;\ \varphi(u) = 0\}$$

là không gian con của U và được gọi là hạch của φ.

Ví dụ: Nếu p_1 và p_2 tương ứng là các phép chiếu $V_1 \times V_2$ lên V_1 và V_2, thì $\mathrm{Ker}(p_1) = \{(0, v);\ v \in V_2\}$, $\mathrm{Im}(p_1) = V_1$, còn $\mathrm{Ker}(p_2) = \{(v, 0);\ v \in V_1\}$, $\mathrm{Im}(p_2) = V_2$.

Các khái niệm ảnh và hạch của ánh xạ tuyến tính đặc biệt hữu ích để chứng minh nó là toàn ánh hay đơn ánh. Cụ thể

Mệnh đề 13.4 *Cho $\varphi : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

(i) φ là đơn cấu khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

(ii) Giả sử $\dim V$ hữu hạn. Khi đó φ là toàn ánh khi và chỉ khi $\mathrm{rank}(\varphi) = \dim V$.

Các tính chất liên quan đến tính độc lập tuyến tính, cơ sở được tổng kết như sau:

Mệnh đề 13.5 *Cho $\varphi : U \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

(i) Ảnh của một tập phụ thuộc tuyến tính là phụ thuộc tuyến tính.

(ii) Hệ phần tử trong U có các ảnh khác nhau và độc lập tuyến tính là độc lập tuyến tính.

(iii) φ là toàn ánh khi và chỉ khi ảnh của một hệ sinh của U là một hệ sinh của V.

(iv) φ *là đơn ánh khi và chỉ khi ảnh của các véc tơ của một cơ sở của* U *là khác nhau và độc lập tuyến tính trong* V.

(v) φ *là đẳng cấu khi và chỉ khi ảnh của các véc tơ của một cơ sở của* U *là khác nhau và lập thành một cơ sở của* V.

Từ đó suy ra chiều của ảnh ánh xạ tuyến tính không vượt quá chiều của không gian nguồn.

Định lí 13.6 *Hai không gian véc tơ hữu hạn chiều đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều. Nói cách khác mọi không gian véc tơ chiều* n *đều đẳng cấu với* K^n.

Cuối cùng ta có định lí hạng ánh xạ

Định lí 13.7 *Cho* $\varphi : U \to V$ *là một ánh xạ tuyến tính với* $\dim U <$ *Khi đó*

$$\dim U = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{rank}(\varphi).$$

Bài tập

Bài 13.1 a) Chứng tỏ rằng phép lấy đạo hàm là ánh xạ tuyến tính từ không gian các hàm thực khả vi trên khoảng (a, b) vào không gian các hàm thực xác định trên (a, b). Hãy xác định hạch của ánh xạ này.

b) Chứng tỏ rằng phép lấy tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian các hàm thực khả tích trên đoạn $[a, b]$ vào $\mathbb{R}$.

Bài 13.2 Xét xem những ánh xạ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính. Trong trường hợp đó hãy tính hạch của nó.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (z, y)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, y, z) + (0, 0, 3)$.

c) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5,\ f(v) = -v$.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (xy, y)$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 3$.

Bài 13.3 Cho $f : U \to V$ và $g : U \to W$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng tỏ rằng ánh xạ $\varphi : U \to V \times W$ cho bởi

$$\varphi(u) = (f(u), g(u))$$

là ánh xạ tuyến tính. Tìm $\mathrm{Ker}(\varphi)$ qua $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Ker}(g)$.

Bài 13.4 a) Chứng tỏ rằng ánh xạ $V \times V \to V : (u, v) \mapsto u + v$ là ánh xạ tuyến tính. Tính hạch của ánh xạ này.

b) Cho $f, g : U \to V$ là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng tỏ rằng ánh xạ $U \times U \to V$, $(u, v) \mapsto f(u) + g(v)$ là ánh xạ tuyến tính.

Bài 13.5 Cho $A \in M(m, n; K)$. Viết các véc tơ của K^m và K^n dưới dạng cột. Chứng tỏ rằng ánh xạ $f : K^n \to K^m$ cho bởi công thức

$$f(x) = A \cdot x$$

là ánh xạ tuyến tính. Hãy mô tả $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$. Từ đó suy ra rằng nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A \cdot x = 0$ là không gian con của K^n có chiều bằng $n - \mathrm{rank}\, A$.

Bài 13.6 Cho $A \in M(m, n; K)$. Chứng tỏ rằng các ánh xạ $\varphi : M(n, l; K) \to M(m, l; K)$ và $\psi : M(l, m; K) \to M(l, n; K)$ cho bởi

$$\varphi(B) = AB \quad \text{và} \quad \psi(B) = BA$$

là các ánh xạ tuyến tính. Khi $l = m = n$ hãy tìm điều kiện cần và đủ để hai ánh xạ trên bằng nhau.

Bài 13.7 Cho $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính và $W \subseteq V$. Kí hiệu $f|_W$ là ánh xạ hạn chế của f trên W. Tìm ảnh và hạch của ánh xạ hạn chế này thông qua f.

Bài 13.8 Cho U là không gian con tùy ý của V. Chứng tỏ rằng U là ảnh của một ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$ và là hạch của một ánh xạ tuyến tính $g : V \to W$ thích hợp.

Bài 13.9 a) Cho $f, g : U \to V$ là hai ánh xạ tuyến tính, và $\alpha, \beta \in K$. Chứng tỏ rằng các ánh xạ $\varphi, \psi_\alpha : U \to V$ cho bởi

$$\varphi(u) = f(u) + g(u) \quad \text{và} \quad \psi_\alpha(u) = \alpha f(u)$$

là các ánh xạ tuyến tính. Từ đó hãy suy ra ánh xạ $\chi : u \mapsto \alpha f(u) + \beta g(u)$ cũng là ánh xạ tuyến tính. Các ánh xạ φ, ψ được gọi là tổng và tích (với một phần tử vô hướng) của các ánh xạ tuyến tính, và được kí hiệu là $f + g$ và αf, còn χ được kí hiệu là $\alpha f + \beta g$.

b) Chứng tỏ rằng tập hợp $\mathrm{Hom}(U, V)$ (hoặc còn được kí hiệu là $L(U, V)$) các ánh xạ tuyến tính từ U và V với các phép toán định nghĩa ở trên lập thành không gian véc tơ.

Bài 13.10 Cố định một ánh xạ tuyến tính $\varphi : U \to V$. Giả sử W là không gian véc tơ thứ ba. Chứng tỏ rằng các ánh xạ

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W); \quad f \mapsto f\varphi$$

và

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(W, U) \to \mathrm{Hom}(W, V); \quad f \mapsto \varphi f$$

là những ánh xạ tuyến tính.

Bài 13.11 Kí hiệu D là phép lấy đạo hàm của các đa thức với hệ số thực. Cho $n \geq 1$. Tìm $\mathrm{Ker}(D^n)$.

Bài 13.12 Cho D là phép lấy đạo hàm trong không gian $C'(a, b)$ các hàm số thực khả vi. Tìm $\mathrm{Ker}(D - \mathrm{id})$.

Bài 13.13 Cho $V_1, V_2 \subseteq V$ là các không gian con. Chứng tỏ rằng dãy các ánh xạ

$$0 \to V_1 \cap V_2 \xrightarrow{\delta} V_1 \times V_2 \xrightarrow{\rho} V_1 + V_2 \to 0,$$

trong đó $\delta(u) = (u, u)$ và $\rho(u, v) = u - v$ lập thành dãy khớp ngắn, tức là δ là đơn ánh, ρ là toàn ánh, và $\mathrm{Ker}(\rho) = \mathrm{Im}(\delta)$.

Bài 13.14 Chứng tỏ rằng nếu $\varphi : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ và $v_1, ..., v_n \in U$, thì

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(v_n).$$

Bài 13.15 Cho $\varphi : U \to V$ và $\psi : V \to W$ là các ánh xạ tuyến tính, trong đó φ là toàn ánh. Chứng tỏ rằng $\mathrm{Ker}(\psi\varphi) = 0$ khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ và $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$.

Có thể phát biểu hai điều kiện sau gộp lại thành $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) = 0$ được không? Có thể bỏ điều kiện φ là toàn ánh được không?

Bài 13.16 Cho $f, g : V \to V$ là các ánh xạ tuyến tính. Phải chăng

a) $fg = gf = 0$ thì $f = 0$ hoặc $g = 0$?

b) $fg = 0$ thì $gf = 0$?

Bài 13.17 Cho $f : U \to V$ và $g : V \to W$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng gf là đẳng cấu khi và chỉ khi f và g là các đẳng cấu. Hơn nữa khi đó

$$(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}.$$

Bài 13.18 Cho $\mathcal{H}$ là tập các ma trận phức Hermit cấp n, tức là các ma trận vuông B cấp n thỏa mãn điều kiện $B = B^*$ (nghĩa là $b^*_{ij} = \overline{b_{ji}}$).

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{H}$ là không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$. Tìm $\dim \mathcal{H}$.

b) Cố định $A \in M(n, \mathbb{C})$. Chứng tỏ rằng các ánh xạ

$$L_1(B) = (AB + BA^*)/2$$

và

$$L_2(B) = (AB - BA^*)/(2i)$$

là các ánh xạ tuyến tính của $\mathcal{H}$ và giao hoán với nhau.

Bài 13.19 Cho $\mathcal{S}$ là tập các ma trận phức đối xứng lệch cấp n, tức là tập các ma trận vuông B cấp n thỏa mãn điều kiện $B = -B^T$. Chứng tỏ rằng

a) $\mathcal{S}$ lập thành không gian véc tơ trên $\mathbb{C}$. Tìm $\dim \mathcal{S}$.

b) Các ánh xạ: $L_1(B) = AB + BA^T$, $L_2(B) = ABA^T$, trong đó $A \in M(n, \mathbb{C})$ cố định, là các ánh xạ tuyến tính của $\mathcal{S}$ và giao hoán với nhau.

Bài 13.20 Cho $f : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $f^2 = f$. Chứng tỏ rằng $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Bài 13.21 Cho $f_1, f_2 : V \to V$ là hai ánh xạ tuyến tính thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $f_1 + f_2 = \mathrm{id}$,

b) $f_1 f_2 = f_2 f_1 = 0$,

c) $f_1^2 = f_1$ và $f_2^2 = f_2$.

Chứng minh rằng $V = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \mathrm{Im}(f_2)$.

Bài 13.22 Cho U, V là các không gian hữu hạn chiều. Chứng tỏ rằng

a) Nếu $\dim U < \dim V$ thì không tồn tại toàn ánh từ U lên V.

b) Nếu $\dim U > \dim V$ thì không tồn tại đơn ánh từ U vào V.

Bài 13.23 Cho $f, g : U \to V$ là các ánh xạ tuyến tính của các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng

$$\mathrm{rank}(f + g) \leq \mathrm{rank}(f) + \mathrm{rank}(g).$$

Bài 13.24 Cho $f : V \to W$ và $g : U \to V$ là các ánh xạ tuyến tính của các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng

$$\dim(\mathrm{Ker}(fg)) \leq \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g).$$

Bài 13.25 Cho $\varphi : U \to V$ là một đơn cấu. Giả sử U' là không gian con hữu hạn chiều của U. Chứng tỏ rằng $\dim U' = \dim \varphi(U')$.

Bài 13.26 Cho $\varphi : U \to V$ là một ánh xạ tuyến tính với hạch là W và $\varphi(u) = v$. Tìm tập nghịch ảnh $\varphi^{-1}(v)$.

Bài 13.27 Cho $f : V \to W$ và $g : U \to V$ là các ánh xạ tuyến tính của các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng

$$\mathrm{rank}(fg) \leq \min\{\mathrm{rank}\, f, \mathrm{rank}\, g\}.$$

Bài 13.28 Cho $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính của các không gian véc tơ có cùng số chiều hữu hạn. Chứng minh rằng các điều kiện sau tương đương:

a) f là đẳng cấu,

b) f là đơn cấu,

c) f là toàn cấu.

Nếu bỏ điều kiện chiều hữu hạn thì sao?

Bài 13.29 Chứng minh rằng nếu $V = V_1 \oplus V_2$, thì V đẳng cấu với tích Đề-các $V_1 \times V_2$. Ngược lại, nếu $V = V_1 \times V_2$ và ta đặt $V_1' = \{(v_1, 0);\ v_1 \in V_1\}$, $V_2' = \{(0, v_2);\ v_2 \in V_2\}$, thì $V_1 \cong V_1'$, $V_2 \cong V_2'$ và $V = V_1' \oplus V_2'$. Hãy tổng quát cho trường hợp $r \geq 2$ không gian.

14 Không gian thương và các định lí đồng cấu

Khái niệm không gian thương là một khái niệm khó đối với người bắt đầu học Đại số (tuyến tính). Cho U là không gian con của không gian véc tơ V. Cái khó nhất trong việc làm quen với không gian thương V/U là ở chỗ mỗi phần tử của V/U là một tập con của V - chính là tập các *lớp kề* có dạng $v + U$, trong đó $v \in V$. Lớp kề này thường được kí hiệu là $\bar{v}$ (khi đã rõ U).

Ví dụ: Cho V là các véc tơ tự do trên mặt phẳng tọa độ, còn U là các véc tơ tự do trên một đường thẳng d (đi qua gốc tọa độ O) và $v = \vec{OA} \in V$ là một véc tơ nào đó. Khi đó lớp kề $v + U$ chính là các véc tơ có gốc là O và ngọn nằm trên đường thẳng đi qua A và song song với d. Rõ ràng lớp kề này không là không gian con của V trừ phi A nằm trên d, tức là $v \in U$. (Vì sao? Hãy vẽ hình để minh họa).

Phần tử v thường được gọi là *phần tử đại diện* của lớp kề $v + U$. Tuy nhiên để tính toán được thì thông thường người ta không làm việc với lớp kề, mà phải thông qua phần tử đại diện của nó. Khi đó, trong nhiều trường hợp việc tính toán trên các lớp kề cứ được thực hiện như là trên các phần tử đại diện. Rắc rối (và đôi khi cũng là ưu điểm) xuất hiện là ở chỗ một lớp kề nói chung có vô số đại diện. Do đó khi sử dụng phần tử đại diện thay cho lớp kề, phải biết chắc được việc sử dụng như vậy cho cùng một kết quả khi thay đổi phần tử đại diện.

Ví dụ: Trên tập các lớp kề V/U của V theo U ta định nghĩa "phép toán cộng" như sau

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} := \overline{v_1 + v_2},$$

với mọi $v_1, v_2 \in V$. Ta tạm thời để "phép toán cộng" trong nháy khi ta chưa biết đó có phải là ánh xạ $V/U \times V/U \to V/U$ hay không, bởi vì rất có thể có $v_1', v_2' \in V$ sao cho $\overline{v_1} = \overline{v_1'}$ và $\overline{v_2} = \overline{v_2'}$, nhưng $\overline{v_1 + v_2} \neq \overline{v_1' + v_2'}$ (tức là ảnh không được xác định duy nhất). Nói cách khác ta chưa biết định nghĩa trên có phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện hay không? Rất may vì U là không gian con, nên dựa vào kết quả sau có thể kiểm tra dễ dàng $\overline{v_1 + v_2} = \overline{v_1' + v_2'}$.

Bổ đề 14.1 *Hai lớp kề $v + U$ và $v' + U$ trùng nhau, tức là $v + U = v' + U$ xét như các tập hợp, khi và chỉ khi $v - v' \in U$.*

Bây giờ có thể yên tâm bỏ hai dấu nháy trong ba chữ phép toán cộng nêu trên. Sử dụng bổ đề này cũng dễ dàng kiểm tra phép nhân vô hướng trên V/U được cho bởi

$$\alpha\overline{v} := \overline{\alpha v}$$

đúng là một phép toán. Khi đó ta có

Định lí - Định nghĩa 14.2 *Tập hợp các lớp kề V/U với hai phép toán cộng và nhân vô hướng được định nghĩa như trên lập thành một không gian véc tơ trên trường K. Ta gọi không gian này là không gian thương của V theo U và cũng kí hiệu là V/U.*

Tính chất đầu tiên và quan trọng nhất là

Bổ đề 14.3 *Ánh xạ tự nhiên* $\pi : V \to V/U;\ \ v \mapsto v + U$ *là một toàn cấu với* $\operatorname{Ker} \pi = U$.

Từ đó ta có công thức tính chiều của không gian thương.

Bổ đề 14.4 *Cho* U *là không gian con của* V. V *là không gian véc tơ hữu hạn chiều khi và chỉ khi cả* U *và* V/U *là các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Khi đó*

$$\dim V = \dim U + \dim V/U.$$

Để chứng tỏ hai không gian véc tơ đẳng cấu với nhau, việc xây dựng trực tiếp một đẳng cấu từ không gian này vào không gian kia nhiều khi khá khó. Định lí sau đây và các hệ quả của nó cho phép khắc phục khó khăn đó.

Định lí 14.5 (Định lí về đồng cấu) *Cho* $\varphi : V \to U$ *là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó* φ *cảm sinh ra đẳng cấu*

$$\bar{\varphi} : V/\operatorname{Ker} \varphi \to \operatorname{Im} \varphi;\ \ \bar{v} \mapsto \varphi(v).$$

Như vậy, để xây dựng một đẳng cấu từ V vào U, ta có thể tìm cách xây dựng một *toàn cấu* f từ không gian véc tơ V' vào U sao cho $V \cong V'/\operatorname{Ker} f$. Điều này rất hay được sử dụng khi làm việc với các không gian thương. Khi xây dựng một ánh xạ từ không gian thương vào một không gian véc tơ nào đó, như trên ta thấy, trước hết phải chứng tỏ phép xây dựng không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện. Sử dụng định lí trên ta có thể tránh được việc đó. Minh họa đẹp đẽ nhất cho phương pháp này là các chứng minh của hai hệ quả sau. Hai hệ quả này cũng cho phép "làm tính" với các không gian véc tơ.

Hệ quả 14.6 *Cho* V_1 *và* V_2 *là hai không gian con của* V. *Khi đó*

$$(V_1 + V_2)/V_1 \cong V_2/(V_1 \cap V_2).$$

Hệ quả 14.7 *Cho* $V_1 \subseteq V_2$ *là hai không gian con của* V. *Khi đó*

$$(V/V_1)/(V_2/V_1) \cong V/V_2.$$

Bài tập

Bài 14.1 Cho $U \subset V$ và $v, v' \in V$. Chứng tỏ rằng hoặc $v + U = v' + U$, hoặc $(v + U) \cap (v' + U) = \emptyset$. Hãy minh họa bằng hình học?

Bài 14.2 Cho $U \subset V$ và $v_1, ..., v_n \in V$. Chứng tỏ rằng nếu $v_1 + U, v_2 + U, ..., v_n + U$ độc lập tuyến tính trong không gian thương V/U, thì $v_1, ..., v_n$ cũng độc lập tuyến tính.

Bài 14.3 Cho $U \subset V$ và $v_1, ..., v_n \in V$ là các véc tơ độc lập tuyến tính. Tìm điều kiện cần và đủ để $v_1 + U, ..., v_n + U$ là độc lập tuyến tính trong không gian thương V/U.

Bài 14.4 Hãy mô tả các không gian thương $V/0$ và V/V. Không dùng hạch, hãy chứng tỏ ánh xạ tự nhiên $\pi : V \to V/0$ là một đẳng cấu.

Bài 14.5 Cho $U = V \oplus W$.

a) Chứng minh rằng $v_1, ..., v_n \in V$ là hệ sinh (t.ư. cơ sở) của V khi và chỉ khi $\bar{v_1}, ..., \bar{v_n}$ cũng là hệ sinh (t.ư. cơ sở) của U/W.

b) Hãy xây dựng một cơ sở (t.ư. hệ sinh) của U khi biết cơ sở (t.ư. hệ sinh) của V và U/V.

Bài 14.6 Cho $U = V \oplus W$. Chứng minh rằng $W \cong U/V$.

Bài 14.7 Cho W là không gian con của K^n gồm các nghiệm của phương trình tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Cho $v = (b_1, ..., b_n)$. Chứng tỏ rằng lớp kề $v + W$ chính là tập nghiệm của phương trình tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

trong đó $b = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Nêu ý nghĩa hình học.

Bài 14.8 Cho $V, W \subseteq U$. Chứng tỏ rằng mỗi lớp kề của $V \cap W$ là giao của một lớp kề của U và một lớp kề của V, và ngược lại, giao khác rỗng của một lớp kề của U và một lớp kề của V là một lớp kề của $V \cap W$.

Bài 14.9* Cho $V_1, V_2 \subseteq V$ thỏa mãn điều kiện $\dim V/V_1$ và $\dim V/V_2$ hữu hạn. Chứng minh rằng $\dim V/(V_1 \cap V_2) < \infty$.

Bài 14.10 Cho dãy khớp ngắn

$$0 \to V' \to V \to V" \to 0$$

các không gian véc tơ. Chứng tỏ rằng V là không gian véc tơ hữu hạn chiều khi và chỉ khi cả V' và $V"$ có chiều hữu hạn. Hơn nữa khi đó $\dim V = \dim V' + \dim V"$.

Bài 14.11* Cho $V_1, V_2 \subseteq V$. Chứng minh rằng ta có dãy khớp

$$0 \to V/(V_1 \cap V_2) \xrightarrow{f} V/V_1 \oplus V/V_2 \xrightarrow{g} V/(V_1 + V_2) \to 0,$$

trong đó $f(v + V_1 \cap V_2) = (v + V_1, v + V_2)$ và $g(v_1 + V_1, v_2 + V_2) = v_1 - v_2 + V_1 + V_2$. (So sánh với Bài 13.13.)

Bài 14.12 *(Mở rộng Định lí về đồng cấu)* Cho $f : V \to U$ là một ánh xạ tuyến tính. Cho $V' \subseteq V$ và $U' \subseteq U$ sao cho $f(V') \subseteq U'$. Chứng minh rằng f cảm sinh một đồng cấu

$$\bar{f} : V/V' \to U/U'; \quad \bar{v} \mapsto \overline{f(v)}$$

với $\operatorname{Ker} \bar{f} = f^{-1}(U')/V'$. Nói riêng nếu $W \subseteq \operatorname{Ker} f$ thì f cảm sinh một đồng cấu

$$\bar{f} : V/W \to U; \quad \bar{v} \mapsto f(v)$$

và $\operatorname{Ker} \bar{f} = \operatorname{Ker} f/W$.

Bài 14.13 Cho $U \subset V$. Chứng minh rằng có một tương ứng 1-1 giữa các không gian con của V chứa U và các không gian con của V/U. Hơn nữa, tương ứng này bảo toàn bao hàm thức.

Bài 14.14 Cho $V_1 \subseteq V_2$ và V_3 là các không gian con của V. Chứng minh rằng

$$(V_2 + V_3)/(V_1 + V_3) \cong V_2/(V_1 + V_2 \cap V_3).$$

Bài 14.15 Cho $C_1 \subset C_2$ và $D_1 \subset D_2$ là các không gian con của V. Chứng minh rằng

$$\frac{C_1 + (C_2 \cap D_2)}{C_1 + (C_2 \cap D_1)} \cong \frac{D_1 + (D_2 \cap C_2)}{D_1 + (D_2 \cap C_1)}.$$

Bài 14.16 Cho dãy khớp các không gian véc tơ hữu hạn chiều

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0,$$

(nghĩa là $\operatorname{Im}(f_i) = \operatorname{Ker}(f_{i+1})$ với mọi $i = 0, ..., n-1$). Chứng minh rằng

$$\dim V_1 - \dim V_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \dim V_n = 0.$$

15 Các cách xác định một ánh xạ tuyến tính

Để xác định một ánh xạ nói chung, ta có thể cho công thức tường minh chỉ rõ ảnh của từng phần tử (chẳng hạn xem Ví dụ 13.1, Bổ đề 14.3), hoặc sử dụng phép toán hợp thành để xác định thông qua các ánh xạ đã biết khác. Đối với ánh xạ tuyến tính, ngoài những cách thông dụng đó, ta còn có thể xác định thông qua các phép toán cộng hay nhân vô hướng các ánh xạ tuyến tính đã biết. Tuy nhiên để xây dựng những ánh xạ tuyến tính "ban đầu" có hai cách quan trọng nhất và thường dùng nhất là:

- thông qua tập ảnh của một cơ sở, hoặc

- thông qua ma trận biểu diễn.

Trong cả hai cách này đặc thù của ánh xạ tuyến tính được sử dụng triệt để. Để trình bày đơn giản, ta chỉ xét trường hợp hữu hạn chiều. Cách thứ nhất dựa trên kết quả sau

Định lí 15.1 *Cho $S = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to U$ được xác định duy nhất bởi ảnh của nó trên S. Nói cách khác, nếu $u_1, ..., u_n$ là một tập các véc tơ tùy ý (có thể trùng nhau) trong U, thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to U$ thỏa mãn điều kiện*

$$\varphi(e_1) = u_1,\ \varphi(e_2) = u_2, ..., \varphi(e_n) = u_n.$$

Ánh xạ này được xác định như sau: nếu $v = \sum \alpha_i e_i$ thì $\varphi(v) = \sum \alpha_i u_i$.

Ví dụ 15.1 Mọi ánh xạ tuyến tính $\varphi : K^n \to K^m$ đều có dạng

$$\varphi(a_1, ..., a_n) = (c_{11}a_1 + c_{12}a_2 \cdots + c_{1n}a_n, ..., c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 \cdots + c_{mn}a_n).$$

Đây là mệnh đề đảo của Bài 13.5. Để chứng tỏ điều này, ta chỉ việc chọn S trong định lí trên là cơ sở tự nhiên, còn u_i là véc tơ $(c_{1i}, ..., c_{mi})$.

Ví dụ 15.2 Để chứng minh phần đảo của một trong những định lí cơ bản về không gian véc tơ, Định lí 13.6, ta chỉ việc chọn $S = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V và $T = \{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của U. Khi đó có một ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$ sao cho $f(e_i) = u_i$ với mọi i. Theo Mệnh đề 13.5(v), f là đẳng cấu.

Cách thứ hai là hệ quả của cách thứ nhất. Cố định một cơ sở $T = \{f_1, ..., f_m\}$ của không gian véc tơ U. Viết tập ảnh của ánh xạ tuyến tính φ trên S dưới dạng

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m, \\ &\cdots \\ \varphi(e_n) &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{mn}f_m. \end{aligned}$$

Khi đó ma trận $A = (a_{ij}) \in M(m, n; K)$ được gọi là *ma trận biểu diễn của φ theo cặp cơ sở (S, T)*. Khi cặp (S, T) đã rõ, ta nói gọn A là *ma trận biểu diễn*. Cột thứ i của ma trận A chính là dòng các hệ số biểu diễn của $\varphi(e_i)$. Thông thường cách viết sau đây dễ nhớ hơn:

$$(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) = (f_1, ..., f_m)A.$$

Như vậy, để tìm ma trận biểu diễn ta phải biết được biểu diễn tuyến tính của các véc tơ ảnh $\varphi(e_i)$ thông qua cơ sở T. Điều này tương đương với việc giải n hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có m ẩn.

Khi $U = V$, tức φ là một toán tử tuyến tính và $S = T$, ma trận biểu diễn của φ theo (S, S) được gọi gọn là *ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở S*.

Định lí 15.2 *Cố định cơ sở S của V và cơ sở T của U. Ánh xạ đặt tương ứng mỗi ánh xạ tuyến tính với ma trận biểu diễn của nó là ánh xạ 1-1. Nói cách khác mỗi ánh xạ tuyến tính từ V vào U xác định duy nhất một ma trận biểu diễn $A \in M(m, n; K)$, và ngược lại mỗi ma trận $A \in M(m, n; K)$ là ma trận biểu diễn của duy nhất một ánh xạ tuyến tính từ V vào U.*

Chú ý rằng cũng giống như tọa độ của véc tơ, ma trận biểu diễn phụ thuộc vào thứ tự các phần tử của các cơ sở. Do đó cơ sở hiểu ở trên là tập được sắp thứ tự hoàn toàn. Tổng quát hơn, ma trận biểu diễn phụ thuộc rất nhiều vào việc chọn cặp cơ sở.

Ví dụ 15.3 a) Ma trận biểu diễn của toán tử 0 theo mọi cặp cơ sở là ma trận 0.

b) Cho $S = T$ là một cơ sở của không gian véc tơ V chiều n. Khi đó ma trận biểu diễn của ánh xạ đồng nhất là ma trận đơn vị cấp n. Tuy nhiên, nếu $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ còn $T = \{e_n, e_{n-1}, ..., e_1\}$, thì ma trận biểu diễn của ánh xạ đồng nhất sẽ là

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Nếu chọn $S = \{e_1, ..., e_n\}$ và $T = \{f_1, ..., f_m\}$ lần lượt là các cơ sở tự nhiên trong K^n và K^m, thì ma trận biểu diễn của φ trong Ví dụ 15.1 chính là ma trận $(c_{ij}) \in M(m, n; K)$, bởi vì

$$\varphi(e_i) = \varphi(0, ..., 1, ..., 0) = c_{1i}f_1 + c_{2i}f_2 + \cdots + c_{mi}f_i.$$

Kí hiệu v_S là véc tơ cột tọa độ của v theo cơ sở (được sắp) S. Khi đó ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính có thể đọc được trực tiếp từ công thức tọa độ của ảnh, và ngược lại. Cụ thể

Định lí 15.3 *Cố định cặp cơ sở S và T của V và U. Khi đó $A \in M(m, n; K)$ là ma trận biểu diễn của $\varphi : V \to U$ theo (S, T) khi và chỉ khi với mọi $v \in V$ ta có*

$$\varphi(v)_T = Av_S.$$

Như vậy, sử dụng định lí này ta có ngay kết quả trong Ví dụ 15.3(b) mà không cần phải biểu diễn $\varphi(e_i)$. Các tính chất của ma trận biểu diễn có thể tóm tắt như sau:

Mệnh đề 15.4 *(i) Nếu A, B là hai ma trận biểu diễn của $\varphi, \psi : V \to U$, thì $A + B$ là ma trận biểu diễn của $\varphi + \psi$, còn αA là ma trận biểu diễn của $\alpha\varphi$.*

(ii) Cho S, T, R lần lượt là các cơ sở của U, V, W. Cho B là ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính $\varphi : U \to V$ theo cặp cơ sở (S, T), còn A là ma trận biểu diễn của $\psi : V \to W$ theo cặp cơ sở (T, R). Khi đó AB là ma trận biểu diễn của $\psi\varphi$ theo cặp cơ sở (S, R).

(iii) Cho $\varphi : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính với ma trận biểu diễn A theo cặp cơ sở (S, T). Giả sử $\dim U = \dim V$. Thế thì ánh xạ φ là một đẳng cấu khi và chỉ khi ma trận vuông A là khả nghịch. Khi đó, ma trận nghịch đảo A^{-1} là ma trận biểu diễn của ánh xạ φ^{-1} theo cặp cơ sở (T, S).

Mỗi ánh xạ tuyến tính có nhiều ma trận biểu diễn (khi thay đổi cơ sở của các không gian véc tơ). Tuy nhiên giữa chúng có mối liên hệ chặt chẽ với nhau. Để biết mối quan hệ đó ta cần khái niệm

Định nghĩa 15.5 Cho $S = \{e_1, ..., e_n\}$ và $T = \{f_1, ..., f_n\}$ là hai cơ sở của không gian véc tơ V. Giả sử

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n, \\ f_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n, \\ &\cdots \\ f_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n. \end{aligned}$$

(Viết gọn hơn: $(f_1, f_2, ..., f_n) = (e_1, ..., e_n)P$.) Khi đó ta gọi P là *ma trận chuyển cơ sở từ S sang T.*

Bổ đề 15.6 *(i) Một ma trận vuông P cấp n là ma trận chuyển cơ sở khi và chỉ khi P khả nghịch.*

(ii) Nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T, thì P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ T sang S.

(iii) P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T khi và chỉ khi với mọi $v \in V$ ta có

$$v_S = Pv_T.$$

Định lí 15.7 (Công thức đổi cơ sở của ma trận biểu diễn) *Cho $\varphi : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính của hai không gian véc tơ hữu hạn chiều. Cho S_1, S_2 và T_1, T_2 tương ứng là các cơ sở của U và V, còn P là ma trận chuyển cơ sở từ S_1 sang S_2, Q là ma trận chuyển cơ sở từ T_1 sang T_2. Nếu A và B tương ứng là các ma trận biểu diễn của φ theo (S_1, T_1) và (S_2, T_2), thì*

$$B = Q^{-1}AP.$$

Đối với toán tử tuyến tính ta có

Hệ quả 15.8 *Cho φ là toán tử tuyến tính của không gian véc tơ hữu hạn chiều V. Cho S, T là hai cơ sở của V với ma trận chuyển cơ sở từ S sang T là P. Nếu A và B tương ứng là các ma trận biểu diễn của φ theo S và T thì*

$$B = P^{-1}AP.$$

Bài tập

Bài 15.1 Cho $V' \subset V$ là không gian con thực sự. Chứng tỏ rằng mọi ánh xạ tuyến tính $\varphi : V' \to U$ đều có thể mở rộng thành ánh xạ tuyến tính $\psi : V \to U$. Mở rộng đó có duy nhất không?

Bài 15.2 Cho U, V là hai không gian véc tơ (có thể vô hạn chiều). Chứng tỏ rằng hoặc tồn tại toàn cấu từ U lên V, hoặc tồn tại đơn cấu từ U vào V. Khi nào có thể giả thiết thêm toàn cấu hoặc đơn cấu đó không là đẳng cấu cho dù $U \cong V$.

Bài 15.3 Cho S là một tập con (hữu hạn) của không gian véc tơ V và U là một không gian véc tơ khác. Cho $\varphi_0 : S \to U$ là một ánh xạ (tập hợp) tùy ý. Liệu có tồn tại hay không ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to U$ mở rộng φ_0 (nghĩa là $\varphi(v) = \varphi_0(v)$ với mọi $v \in S$), nếu

a) S là một tập sinh.

b) S là một tập độc lập tuyến tính.

Trong trường hợp tồn tại, nó có là duy nhất không? Trong trường hợp không luôn luôn tồn tại, hãy tìm điều kiện cần và đủ đối với φ_0 để tồn tại φ.

Bài 15.4 Cho $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,3,5)$, $v_3 = (0,1,2)$, $v_4 = (1,0,0)$ và $u_1 = (-2,-1,0)$, $u_2 = (1,1,1)$, $u_3 = (1,1,-1)$, $u_4 = (2,1,2)$. Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa tính chất $\varphi(v_i) = u_i$, $i \geq 1$. Tìm ma trận biểu diễn của ánh xạ này theo cơ sở tự nhiên.

Bài 15.5 Cho $v_1 = (2,0,3)$, $v_2 = (4,1,5)$, $v_3 = (3,1,2)$, $v_4 = (1,0,9/5)$ và $u_1 = (1,2,-1)$, $u_2 = (4,5,-2)$, $u_3 = (1,-1,1)$, $u_4 = (1,2,-1)$. Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa tính chất $\varphi(v_i) = u_i$, $i \geq 1$. Tìm ma trận biểu diễn của ánh xạ này theo cơ sở tự nhiên.

Bài 15.6* Chứng minh rằng nếu ánh xạ tuyến tính $\varphi : U \to V$ có $\operatorname{rank}\varphi = r$, thì tồn tại cơ sở S của U và T của V để ma trận biểu diễn của nó có *dạng chuẩn tắc*

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 15.7 Chứng tỏ rằng có thể xem ma trận chuyển cơ sở là trường hợp đặc biệt của ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính. Khi đó ánh xạ tương ứng là ánh xạ gì?

Bài 15.8* Cho $\dim U = n$ và $\dim V = m$. Chứng minh rằng nếu ánh xạ tuyến tính $\varphi : U \to V$ có $\operatorname{rank}\varphi = r$ và $A \in M(m,n;K)$ là một ma trận tùy ý có hạng bằng r, thì tồn tại cơ sở S của U và T của V để ma trận biểu diễn của φ chính là A.

Bài 15.9 Chứng minh rằng phép nhân trái hay phải của ma trận vuông cấp 2 với ma trận $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cho trước là một ánh xạ tuyến tính từ $M(2,K)$ vào chính nó. Tìm ma trận biểu diễn của các ánh xạ tuyến tính này theo cơ sở

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 15.10 Chứng minh rằng ma trận $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ khả nghịch khi và chỉ khi ma trận

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$$

là khả nghịch.

Bài 15.11 Tìm ma trận biểu diễn của phép lấy đạo hàm (hình thức) từ không gian các đa thức bậc không vượt quá n trên $\mathbb{R}$ vào chính nó trong hai trường hợp sau:

a) Cơ sở là $1, x, x^2, ..., x^n$,

b) Cơ sở là $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2/(2!), ..., (x-\alpha)^n/(n!)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bài 15.12 Tìm ma trận biểu diễn của phép quay quanh gốc tọa độ một góc α trong mặt phẳng (theo cơ sở tự nhiên).

Bài 15.13 Ma trận biểu diễn của một toán tử tuyến tính thay đổi thế nào nếu ta đổi chỗ hai véc tơ trong cơ sở?

Bài 15.14* Chứng minh rằng ma trận vuông A đồng dạng với ma trận B nhận được từ A bằng phép đối xứng qua tâm.

Bài 15.15* Cho $(i_1, ..., i_n)$ là một hoán vị của $(1, ..., n)$. Chứng minh rằng hai ma trận sau đồng dạng với nhau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_n} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i_n i_1} & a_{i_n i_2} & \cdots & a_{i_n i_n} \end{pmatrix}.$$

Bài 15.16 Khác với trường hợp theo cặp cơ sở, chứng tỏ rằng các ma trận biểu diễn của cùng một toán tử tuyến tính (theo một cơ sở) có cùng vết.

Bài 15.17 Cho $\varphi(x,y,z,t) = (2x, 3y, z, -t)$. Tìm ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính này trong $\mathbb{R}^4$ theo cơ sở

$$(1,2,1,1),\ (2,3,1,0),\ (3,1,1,-2),\ (4,2,-1,-6).$$

Bài 15.18 Toán tử tuyến tính φ có ma trận biểu diễn

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

theo cơ sở $a_1 = (8,-6,7)$, $a_2 = (-16,7,-13)$, $a_3 = (9,-3,7)$. Tìm ma trận biểu diễn của nó theo cơ sở

$$b_1 = (1,-2,1),\ b_2 = (3,-1,2),\ b_3 = (2,1,2).$$

Bài 15.19 Cho $f(t) \in K[t]$ và φ là toán tử tuyến tính của V. Chứng tỏ rằng nếu A là ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở S, thì $f(A)$ là ma trận biểu diễn của $f(\varphi)$ theo cơ sở S.

Bài 15.20 Trong cơ sở tự nhiên toán tử tuyến tính φ có ma trận biểu diễn

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính này theo $f_1 = (2,3,1)$, $f_2 = (3,4,1)$, $f_3 = (1,2,2)$.

Bài 15.21 Cho S, T, R là các cơ sở của V. Cho P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T, còn Q là ma trận chuyển cơ sở từ T sang R. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang R.

Bài 15.22* Cho φ là toán tử tuyến tính có cùng một ma trận biểu diễn dù thay đổi cơ sở như thế nào. Tìm φ.

Bài 15.23 Cho $\dim V = n$. Chứng minh rằng hai ma trận vuông A, B cấp n đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng là ma trận biểu diễn của cùng một toán tử tuyến tính.

Bài 15.24 *Định thức* của toán tử tuyến tính φ là định thức của một ma trận biểu diễn của nó và được kí hiệu là $\mathrm{Det}(\varphi)$. Chứng minh rằng

a) Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn ma trận biểu diễn.

b) φ là đẳng cấu khi và chỉ khi $\mathrm{Det}(\varphi) \neq 0$.

Bài 15.25 Cho $A \in M(n;K)$ và φ_A là toán tử tuyến tính của $M(n;K)$ cho bởi

$$\varphi_A(B) = AB - BA;\ B \in M(n;K).$$

Chứng minh rằng $\mathrm{Det}(\varphi_A) = 0$.

Bài 15.26* Cho $A \in M(n;K)$ và L_A là toán tử tuyến tính của $M(n;K)$ cho bởi $L_A(B) = AB$. Chứng minh rằng $\mathrm{Det}(L_A) = (\mathrm{Det}\, A)^n$.

Bài 15.27 Cho φ là toán tử tuyến tính của không gian véc tơ 2-chiều thỏa mãn $\varphi^2 = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in K$, $\mathrm{Det}(\alpha\,\mathrm{id} - \varphi) = \alpha^2$.

Các bài tập dưới đây liên quan tới không gian đối ngẫu

Bài 15.28 Cho $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Với mỗi $i = 1, ..., n$, ta kí hiệu e_i^* là phần tử của *không gian đối ngẫu* $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ xác định bởi điều kiện

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij},\ j = 1, ..., n,$$

trong đó δ_{ij} là kí hiệu Kronecker, tức là $\delta_{ii} = 1$ và $\delta_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$. Chứng minh rằng $e_1^*, ..., e_n^*$ lập thành một cơ sở của V^*. Nói riêng $V \cong V^*$, và $\dim V^* = n$. Cơ sở này được gọi là *cơ sở đối ngẫu của* V^*.

Chú ý: Định nghĩa V^* không phụ thuộc việc chọn cơ sở, nhưng định nghĩa e_i^* phụ thuộc vào việc chọn cơ sở.

Bài 15.29* Chứng tỏ rằng điều khẳng định tương tự như trong Bài 15.28 không đúng nếu V là không gian vô hạn chiều. Cụ thể, nếu $S = (e_i;\ i \in I)$ là cơ sở của V và kí hiệu e_i^* là phần tử của *không gian đối ngẫu* $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ xác định bởi điều kiện

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij},\ j \in I.$$

Chứng minh rằng $e_i^*;\ i \in I$ không phải là hệ sinh của V^*.

Bài 15.30* Cho $S = \{x_1, ..., x_n\}$ là cơ sở của U và $T = \{y_1, ..., y_m\}$ là cơ sở của V. Gọi e_{ij} là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$e_{ij}(x_k) = \begin{cases} y_i & \text{nếu } k = j, \\ 0 & \text{nếu } k \neq j. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(e_{ij}; i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n)$ lập thành cơ sở của $\mathrm{Hom}(U, V)$.

Bài 15.31 Cho V_1, V_2 là hai không gian con của V. Giả sử $V = V_1 \oplus V_2$. Mỗi phần tử f của không gian đối ngẫu V_1^* có thể xem là phần tử của V^* bằng cách mở rộng nó thành ánh xạ $f(v_1 + v_2) = f(v_1)$. Chứng tỏ rằng đây là ánh xạ tuyến tính và là đơn ánh. Tương tự có thể xem $V_2^* \subset V^*$. Hãy chứng tỏ rằng $V^* = V_1^* \oplus V_2^*$.

Bài 15.32* Cho V là không gian véc tơ hữu hạn chiều. Với mỗi $v \in V$ đặt tương ứng với ánh xạ xác định bởi

$$v^{**}(f) = f(v), \quad \forall f \in V^*.$$

Chứng minh rằng v^{**} là một dạng tuyến tính của V^*, tức là $v^{**} \in V^{**} := (V^*)^*$. Hơn nữa, tương ứng này là một đẳng cấu giữa các không gian véc tơ V và V^{**}.

Bài 15.33* Cho V là không gian véc tơ hữu hạn chiều và $f_1, ..., f_n$ là cơ sở của V^*. Chứng minh rằng có thể chọn được một cơ sở $e_1, ..., e_n$ của V để $f_i = e_i^*$ với mọi i như trong Bài 15.28.

Bài 15.34* Cho U, V là hai không gian véc tơ và $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Chứng tỏ rằng ánh xạ

$$\varphi^* : V^* \to U^* : \quad \varphi^*(f) = f\varphi$$

là một ánh xạ tuyến tính, tức là $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$. Hơn nữa φ là đơn ánh (toàn ánh) khi và chỉ khi φ^* là toàn ánh (đơn ánh).

Bài 15.35* Cho U, V là hai không gian véc tơ chiều hữu hạn và $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Chứng minh rằng $\mathrm{rank}\,\varphi = \mathrm{rank}\,\varphi^*$.

Bài 15.36 Cho U, V là hai không gian véc tơ chiều hữu hạn với các cơ sở là $S = \{e_1, ..., e_n\}$ và $T = \{f_1, ..., f_m\}$. Cho $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$ với ma trận biểu diễn theo (S, T) là A. Chứng minh rằng ma trận biểu diễn của ánh xạ liên hợp $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$ theo các cơ sở đối ngẫu $T^* = \{f_1^*, ..., f_m^*\}$ và $S^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ chính là ma trận chuyển vị A^T.

Bài 15.37* Cho V là không gian véc tơ chiều n và $f_1, ..., f_r$ là các dạng độc lập tuyến tính trong V^*. Chứng minh rằng

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f_1 \cap ... \cap \mathrm{Ker}\, f_r) = n - r.$$

Chương 5

Hệ phương trình tuyến tính

16 Cấu trúc tập nghiệm

Một *hệ phương trình tuyến tính* trên trường K là một hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5.1}$$

trong đó $a_{ij}, b_i \in K$. Nếu $b_1 = \cdots = b_m = 0$, ta có *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Hệ này được gọi là *hệ liên kết* với hệ phương trình (5.1).

Nghiệm của hệ phương trình (5.1) là một phần tử $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ sao cho khi thay $x_1 = \alpha_1, ..., x_n = \alpha_n$ vào hệ thì ta được một đẳng thức đúng. Chẳng hạn hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.2) luôn có nghiệm $0 = (0, ..., 0)$. Nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường* của (5.2).

Định nghĩa 16.1 Ta gọi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

là *ma trận liên kết* (hoặc *ma trận hệ số*) của hệ (5.1) (và hệ (5.2)), còn

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

là *ma trận bổ sung* (hoặc *ma trận hệ số mở rộng*) của hệ (5.1).

Nếu kí hiệu $X = (x_1, ..., x_n)^T$ và $b = (b_1, ..., b_m)^T$ thì hai hệ phương trình trên có thể được viết dưới dạng

$$AX = b \qquad (5.1') \quad \text{và} \quad AX = 0 \qquad (5.2').$$

Véc tơ b được gọi là *véc tơ hệ số tự do.*

Định lí 16.2 *Tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.2) lập thành một không gian con của không gian véc tơ K^n và có chiều là* $n - \operatorname{rank} A$.

Một cơ sở của không gian nghiệm này được gọi là một hệ nghiệm cơ sở.

Hệ quả 16.3 *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.2) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi* $\operatorname{rank} A < n$. *Nói riêng, nếu số ẩn nhiều hơn số phương trình thì nó luôn có nghiệm không tầm thường.*

Mệnh đề 16.4 *Giả sử u_0 là một nghiệm cho trước của hệ phương trình tuyến tính (5.1). Khi đó $u \in K^n$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (5.1) nếu và chỉ nếu $u = u_0 + v$, trong đó v là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.2).*

Nói cách khác, nếu $v_1, ..., v_r$ là một hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.2), thì ta có thể viết nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (5.1) dưới dạng

$$u = u_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r,$$

trong đó $t_1, ..., t_r \in K$.

Định nghĩa 16.5 Một nghiệm cố định u_0 của hệ phương trình tuyến tính (5.1) được gọi là *nghiệm riêng*, còn nghiệm $u = u_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r$ được gọi là *nghiệm tổng quát.*

Như vậy để giải một hệ phương trình tuyến tính, ta cần tìm một nghiệm riêng. và một hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết.

Định lí 16.6 (Kronecker-Capelli). *Hệ phương trình tuyến tính (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận liên kết bằng hạng của ma trận bổ sung, nghĩa là* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Ví dụ 16.1 Hệ hai phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 15, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 8, \end{cases}$$

có $\operatorname{rank} A = 2$ vì định thức con $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Nhưng B cũng chỉ có hai dòng, nghĩa là $2 = \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} B \leq 2$. Từ đó suy ra $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2$ và hệ có nghiệm. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng có hệ nghiệm cơ sở gồm hai nghiệm, nên nghiệm tổng quát của hệ này có hai tham số tự do.

Hệ quả 16.7 *Hệ phương trình tuyến tính (5.1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$.

Chú ý: - Khi hệ phương trình có vô hạn nghiệm, dù giải bằng phương pháp Gauss hay đưa về sử dụng qui tắc Cramer, ta có thể có nhiều cách chọn biến tự do.

- Khi giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, ta có nhiều cách chọn hệ nghiệm cơ bản.

- Ngoài hai phương pháp chính trên, tùy thuộc vào đặc thù của hệ phương trình, ta có thể có nhiều cách khác nhau để đơn giản lời giải, chẳng hạn: khử biến (rút từ một phương trình rồi thay vào tất cả các phương trình còn lại), cộng hai vế của một số phương trình lại với nhau, ...

Bài tập

Bài 16.1 Xét một hệ phương trình tuyến tính n ẩn m phương trình với ma trận liên kết A và $b \in K^m$. Kí hiệu φ là ánh xạ tuyến tính từ K^n vào K^m với ma trận biểu diễn A theo cặp cơ sở tự nhiên. Chứng tỏ rằng

a) $u \in K^n$ là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất liên kết khi và chỉ khi $u \in \operatorname{Ker} \varphi$.

b) Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $b \in \operatorname{Im} \varphi$.

Bài 16.2 Chứng minh rằng hệ phương trình tuyến tính với m phương trình và $\operatorname{rank} A = m$ luôn có nghiệm.

Dó có phải là điều kiện cần để mọi hệ phương trình tuyến tính như vậy luôn có nghiệm khi thay đổi tùy ý các hệ số tự do không?

Bài 16.3 Hãy xét xem khi nào hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + by &= e, \\ cx + dy &= f, \end{cases}$$

có nghiệm.

Bài 16.4 Chứng tỏ rằng một hệ phương trình tuyến tính với số ẩn nhiều hơn số phương trình (trên trường vô hạn) thì hoặc vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

Bài 16.5 Tìm điều kiện để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} ax + y + z = a, \\ x + by + z = b, \\ x + y + cz = c. \end{cases}$$

Bài 16.6 Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng của ma trận liên kết nhỏ hơn số biến một đơn vị. Chứng minh rằng hai nghiệm tùy ý của nó tỉ lệ với nhau (tức véc tơ nghiệm này là bội của véc tơ nghiệm kia).

Bài 16.7 Khi nào hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} by + cz + du + ev &= x, \\ cz + du + ev + ax &= y, \\ du + ev + ax + by &= z, \\ ev + ax + by + cz &= u, \\ ax + by + cz + du &= v. \end{cases}$$

Bài 16.8 Tìm điều kiện cần và đủ để ba điểm trên mặt phẳng có tọa độ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) thẳng hàng.

Bài 16.9 Tìm điều kiện cần và đủ để bốn điểm trong không gian có tọa độ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) đồng phẳng.

Bài 16.10 Tìm điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng trên mặt phẳng

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

đồng qui.

Bài 16.11 Chứng minh rằng nếu một đường tròn đi qua ba điểm trên mặt phẳng Óclit có tọa độ hữu tỉ thì tâm của nó cũng có tọa độ hữu tỉ.

Bài 16.12 Tìm điều kiện cần và đủ để bốn điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và có tọa độ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) nội tiếp đường tròn.

Bài 16.13 Chứng minh rằng mặt cầu trong không gian (afin) Óclit n-chiều đi qua $n+1$ điểm khác nhau có tọa độ hữu tỉ thì tâm của nó cũng có tọa độ hữu tỉ.

Bài 16.14 Tìm chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x & +2y+2z-s+ & 3t & = & 0, \\ x & +2y+3z+s+ & t & = & 0, \\ 3x & +6y+8z+s+ & 5t & = & 0. \end{cases}$$

Bài 16.15* Cho V là không gian con của K^n. Chứng minh rằng tồn tại hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nhận V làm tập nghiệm. Số phương trình tối thiểu của tập này là bao nhiêu?

Bài 16.16 Cho hệ véc tơ $v_1, ..., v_n \in K^m$. Chứng tỏ rằng hệ véc tơ này độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn với ma trận liên kết gồm các cột là các véc tơ v_i chỉ có nghiệm tầm thường.

Bài 16.17 Cho $x_1, ..., x_{n+1} \in K$ là $n+1$ phần tử khác nhau, và $\beta_1, ..., \beta_{n+1} \in K$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một đa thức $f \in K[t]$ bậc n sao cho $f(x_i) = \beta_i$, $i = 1, ..., n+1$. Nói cách khác một đa thức bậc n được xác định duy nhất bởi giá trị của nó tại $n+1$ điểm. Từ đó suy ra

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}\beta_i.$$

Bài 16.18 Cho L là mở rộng trường của K. Chứng minh rằng nếu hệ phương trình với hệ số trên K có nghiệm trong L, thì nó cũng có nghiệm trong K.

Bài 16.19 Cho $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$ và xem $\mathbb{R}^n$ như không gian Óclit. Hãy đặc trưng các véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$ trực giao với tất cả các véc tơ trên. Từ đó hãy tính $\dim V^\perp$, trong đó V là không gian con sinh bởi $a_1, ..., a_m$.

Bài 16.20* Chứng minh rằng hệ phương trình

$$Ax = b$$

có nghiệm, trong đó $A \in M(m, n; K)$, khi và chỉ khi mọi nghiệm v của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$A^T y = 0$$

có tính chất

$$v_1 b_1 + \cdots + v_m b_m = 0.$$

17 Phương pháp giải

Có hai phương pháp chính để giải hệ phương trình tuyến tính (5.1).

1. Thuật toán Gauss

Gồm các bước như sau:

Bước 1:

1a. Chọn chỉ số i_1 nhỏ nhất sao cho véc tơ cột hệ số của x_{i_1} khác 0. Đổi chỗ các phương trình cho nhau ta có thể đưa về trường hợp $a_{1i_1} \neq 0$. Chia hai vế của phương trình thứ nhất cho a_{1i_1}.

1b. Từ phương trình thứ $j \geq 2$ lần lượt trừ đi phương trình thứ nhất nhân với a_{ji_1}.

Cuối bước 1 ta sẽ nhận được hệ phương trình dạng sau đây:

$$\begin{cases} x_{i_1} + a_{1(i_1+1)} x_{i_1+1} + \cdots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \qquad a_{2(i_1+1)} x_{i_1+1} + \cdots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad a_{m(i_1+1)} x_{i_1+1} + \cdots + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases} \tag{5.3}$$

Bước $(k+1) \geq 2$

- A) Nếu tồn tại i_{k+1} bé nhất để véc tơ cột hệ số của hệ gồm $(m-k)$ phương trình cuối cùng khác 0 thì lập lại bước 1 đối với với hệ này, rồi chuyển sang bước thứ $k+2$.

- B) Nếu không thì có nghĩa là ta nhận được hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} x_{i_1} + \cdots + a_{1i_2}x_{i_2} + \cdots + a_{1i_k}x_{i_k} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_{i_2} + \cdots + a_{2i_k}x_{i_k} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ x_{i_k} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \\ 0 = b_{k+1}, \\ \cdots \\ 0 = b_m. \end{cases} \tag{5.4}$$

+ B1) Nếu có $b_i \neq 0$ với $i \geq k+1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

+ B2) Nếu $b_{k+1} = \cdots = b_m = 0$ thì ta cho x_j, $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$ là các biến (tham số) tự do, rồi từ phương trình thứ k của hệ (5.4) ta tìm được

$$x_{i_k} = b_k - a_{k(i_k+1)}x_{i_k+1} - \cdots - a_{kn}x_n.$$

Thay vào phương trình thứ $k-1$ của hệ (5.4) ta tìm được $x_{i_{k-1}}$,.... Cho đến phương trình đầu tiên ta sẽ tìm được x_{i_1}.

* Nếu hệ ban đầu là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất thì cho (x_j, $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$) lần lượt nhận các giá trị của các véc tơ trong một cơ sở của K^{n-k} (chẳng hạn $(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)$) ta sẽ được một hệ nghiệm cơ sở.

Thuật toán này tương tự như thuật toán Gauss tính định thức.

Ví dụ 17.1 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t - u = 0, \\ x + 2y - 2z + 2t + u = 0, \\ 2x + 4y - 2z + 3t + 4u = 0. \end{cases}$$

Thực hiện thuật toán Gauss, ta được các hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t - u = 0, \\ 2z - t + 2u = 0, \\ 6z - 3t + 6u = 0, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y - 4z + 3t - u = 0, \\ z - \frac{1}{2}t + u = 0. \end{cases}$$

Như vậy nghiệm tổng quát là $z = \frac{1}{2}t - u$, $x = -2y - t - 3u$, trong đó y, t, u là các biến tự do. Lần lượt cho (y, t, u) nhận các giá trị $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ ta được hệ nghiệm cơ sở sau

$$v_1 = (-2,1,0,0,0),\ v_2 = (-1,0,\frac{1}{2},1,0),\ v_3 = (-3,0,-1,0,1).$$

2. Qui tắc Cramer

Bổ đề 17.1 *Nếu một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm thì nó tương đương với hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \cdots + a_{1i_k}x_{i_k} + \displaystyle\sum_{j \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} a_{1j}x_j = b_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{ki_1}x_{i_1} + \cdots + a_{ki_k}x_{i_k} + \displaystyle\sum_{j \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} a_{kj}x_j = b_k, \end{cases} \tag{5.5}$$

trong đó định thức của ma trận (a_{pi_q}) khác 0.

Để nhận được hệ phương trình (5.5), ta chỉ việc chọn định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận liên kết A của (5.1) rồi bỏ đi tất cả các dòng của hệ không chứa các dòng của định thức đó. Các chỉ số $i_1 < \cdots < i_k$ ở trên chính là số thứ tự của các cột của định thức con. Xem x_j, $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$ là các biến tự do, rồi chuyển sang vế phải và đổi tên biến, ta chỉ còn phải giải hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{5.6}$$

trong đó $| A | \neq 0$.

Định nghĩa 17.2 Ta nói hệ phương trình tuyến tính n ẩn và n phương trình (5.6) là *không suy biến* nếu $| A | \neq 0$, và là *suy biến* nếu $| A | = 0$.

Định lí 17.3 (Qui tắc Cramer). *Cho hệ phương trình tuyến tính không suy biến (5.6). Kí hiệu $D = | A |$ và D_i là định thức nhận được từ D bằng cách thay cột thứ i bởi cột hệ số tự do của A. Khi đó hệ này có nghiệm duy nhất và được tính bởi công thức sau*

$$x_i = \frac{D_i}{D},\ i = 1, ..., n.$$

Ví dụ 17.2 Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 1, \\ x + y &= 2. \end{cases}$$

Khi đó

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,\ D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7.$$

Vậy nghiệm của hệ là $x = 7/5,\ y = -7/5$.

Hệ quả 17.4 *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn và n phương trình có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi nó suy biến.*

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau bằng định thức:

Bài 17.1
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ 3x + 5y + 2z = 8, \\ x - 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

Bài 17.2
$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7, \\ x + 2y - 4z = 3, \\ 3x - 4y - 6z = 5. \end{cases}$$

Bài 17.3
$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 2, \\ 4x + 3y - z + 2t = 3, \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 6, \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 3. \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

Bài 17.4
$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z + t = 3, \\ 2x - 3y + z + 5t = -3, \\ x + 2y - 4t = -3, \\ x - y - 4z + 9t = 22. \end{cases}$$

Bài 17.5
$$\begin{cases} x-y-z+t &= 35, \\ 2x-y+3z+5t &= -70, \\ x+2y+3z-4t &= 0, \\ x-y-4z+t &= 14. \end{cases}$$

Bài 17.6
$$\begin{cases} x+2y-4z+3t &= 1, \\ -x-2y+5z-2t &= -3, \\ x+2y-3z+4t &= 5, \\ -2x-4y+10z-4t &= 6. \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình sau đây bằng phương pháp thích hợp

Bài 17.7
$$\begin{cases} -x+y+z+t = a, \\ x-y+z+t = b, \\ x+y-z+t = c, \\ x+y+z-t = d. \end{cases}$$

Bài 17.8
$$\begin{cases} ax+by+cz+dt = p, \\ -bx+ay+dz-ct = q, \\ -cx-dy+az+bt = r, \\ -dx+cy-bz+at = s. \end{cases}$$

Bài 17.9*
$$\begin{cases} x_n+a_1x_{n-1}+a_1^2x_{n-2}+\cdots+a_1^{n-1}x_1+a_1^n &= 0, \\ x_n+a_2x_{n-1}+a_2^2x_{n-2}+\cdots+a_2^{n-1}x_1+a_2^n &= 0, \\ \cdots & \\ x_n+a_nx_{n-1}+a_n^2x_{n-2}+\cdots+a_n^{n-1}x_1+a_n^n &= 0, \end{cases}$$
trong đó $a_1, ..., a_n$ là các số khác nhau.

Bài 17.10
$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1, \\ x + \lambda y + z + t = 1, \\ x + y + \lambda z + t = 1, \\ x + y + z + \lambda t = 1. \end{cases}$$

Bài 17.11 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0, \\ x_2+x_3+x_4 &= 0, \\ \cdots & \\ x_{98}+x_{99}+x_{100} &= 0, \\ x_{99}+x_{100}+x_1 &= 0, \\ x_{100}+x_1+x_2 &= 0. \end{cases}$$

Bài 17.12 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ -x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ -x_4 + 2x_5 - x_6 = 1, \\ -x_5 + 2x_6 = 1. \end{cases}$$

Bài 17.13* Giả sử A là ma trận vuông cấp n không suy biến. Chứng minh rằng A khả nghịch và tìm công thức tính A^{-1}.

Bài 17.14* Chứng minh rằng nếu trong một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn là 1, thì ta có thể xây dựng một nghiệm như sau: ứng với biến thứ i ta gán cho nó giá trị của định thức con nhận được từ ma trận liên kết bằng cách bỏ đi cột thứ i, lấy với dấu đan nhau (tức là nhân với $(-1)^i$).

Hơn nữa, nếu nghiệm này không tầm thường, thì mọi nghiệm khác là bội của nghiệm này.

Bài 17.15* Cho hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, trong đó $A \in M(n;\mathbb{Z})$ và $b \in \mathbb{Z}^n$. Chứng minh rằng nếu $|A| = \pm 1$ thì hệ phương trình có nghiệm nguyên.

Ngược lại, nếu với mọi $b \in \mathbb{Z}^n$ hệ phương trình tương ứng đều có nghiệm nguyên, thì $|A| = \pm 1$.

Bài 17.16 Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0. \end{cases}$$

Hai người lần lượt điền các hệ số vào chỗ đánh dấu sao. Chứng minh rằng người đi đầu bao giờ cũng có thể làm cho hệ phương trình chỉ có nghiệm tầm thường.

Người thứ hai có luôn đạt được điều đó không? Đối với một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn, n phương trình thì sao?

Bài 17.17 Cho $A \in M(m,n;K)$ và r véc tơ $b_1, ..., b_r \in K^m$. Giả sử $|A| \neq 0$. Xét ma trận mở rộng A như sau

$$B = \left(A \mid b_1 \cdots b_r\right).$$

Thực hiện thuật toán **Gauss** (tức là **thực hiện** các phép biến đổi sơ cấp dòng) ta có thể đưa B về dạng

$$B' = \left(T \quad | \quad c_1 \quad \cdots \quad c_r\right),$$

trong đó T là ma trận tam giác trên với các hệ số trên đường chéo chính bằng 1. Chứng tỏ rằng nếu áp dụng thuật toán Gauss một lần nữa theo thứ tự từ dưới lên trên, ta có thể đưa B' về dạng

$$B" = \left(I \quad | \quad d_1 \quad \cdots \quad d_r\right).$$

Hơn nữa d_i là nghiệm của phương trình $AX = b_i$ với mọi $i = 1, ..., r$. Nói riêng, nếu chọn $r = n$ và $b_1, ..., b_n$ là các cột của ma trận đơn vị, thì ma trận D bên trái của $B" = (I \mid D)$ là ma trận nghịch đảo của A.

Chương 6

Toán tử tuyến tính

Cho V là một không gian véc tơ. Toán tử tuyến tính, hay tự đồng cấu, của V là ánh xạ tuyến tính từ V vào chính nó. Đây là trường hợp riêng của ánh xạ tuyến tính nhưng có cấu trúc phong phú. Nó cũng có nhiều ứng dụng, đặc biệt trong lý thuyết ma trận. Ngược lại, việc nghiên cứu một ánh xạ tuyến tính tùy ý có thể đưa về việc nghiên cứu toán tử tuyến tính (xem Bài 18.1). Tập các toán tử tuyến tính của V được kí hiệu là $\mathrm{End}(V)$ (hay $L(V)$).

18 Véc tơ riêng và giá trị riêng

Định nghĩa 18.1 Cho $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Phần tử vô hướng $\lambda \in K$ được gọi là *giá trị riêng* của φ nếu tồn tại véc tơ $v \neq 0$ sao cho

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Khi đó ta gọi v là *véc tơ riêng* (ứng với giá trị riêng λ) của φ.

Tương tự, ta gọi $\lambda \in K$ là *giá trị riêng* của ma trận vuông A cấp n, nếu tồn tại véc tơ $0 \neq v \in K^n$ sao cho

$$A \cdot v = \lambda v.$$

Khi đó ta gọi v là *véc tơ riêng* (ứng với giá trị riêng λ) của A. Tập các giá trị riêng của φ (t.ư A) được gọi là *phổ* và kí hiệu là $\mathrm{Spec}(\varphi)$ (t.ư. $\mathrm{Spec}(A)$).

Ví dụ 18.1 a) Phần tử 0 là giá trị riêng của φ khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 0$. Khi đó $v \neq 0$ là véc tơ riêng của φ ứng với 0 khi và chỉ khi $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

b) Mọi véc tơ khác 0 đều là véc tơ riêng của toán tử đồng nhất hoặc toán tử 0. Với toán tử đồng nhất, giá trị riêng là 1, còn với toán tử 0, giá trị riêng là 0.

c) Nếu φ là phép quay trên mặt phẳng quanh gốc tọa độ một góc $0 < \alpha < 2\pi$, thì phép quay này không có giá trị riêng nếu $\alpha \neq \pi$. Nếu $\alpha = \pi$ thì nó có một giá trị riêng là -1 và mọi véc tơ khác 0 đều là véc tơ riêng.

d) Nếu D là phép lấy đạo hàm từ các hàm $C^\infty(a,b)$ khả vi vô hạn lần vào chính nó thì $D(e^{ax}) = ae^{ax}$, tức là mọi $a \in \mathbb{R}$ đều là giá trị riêng của D. Hơn nữa với mỗi a tập các véc tơ riêng tương ứng với a là ce^{ax}, trong đó $c \neq 0$.

Nhắc lại rằng nếu V là không gian véc tơ hữu hạn chiều với cơ sở là $S = \{e_1, ..., e_n\}$ thì ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính φ được xác định như sau:

$$(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) = (e_1, ..., e_n)A.$$

Các tính chất cơ bản của véc tơ riêng là

Mệnh đề 18.2 *Cho φ là một toán tử tuyến tính của không gian véc tơ V.*

(i) Nếu α là giá trị riêng của φ thì tập các véc tơ riêng của φ ứng với α lập thành một không gian con. Đó chính là $\mathrm{Ker}(\varphi - \alpha\,\mathrm{id})$. *Không gian con này còn được gọi là không gian riêng (ứng với α).*

Nếu giả thiết thêm $\dim V = n$ *và φ có ma trận biểu diễn A theo cơ sở là S, thì*

(ii) α là giá trị riêng của φ khi và chỉ khi α là nghiệm của đa thức đặc trưng $f_\varphi(t) := f_A(t) = |A - tI|$ của φ.

(iii) Kí hiệu v_S là véc tơ tọa độ của v theo S. Khi đó α là giá trị riêng của φ khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$A \cdot v_S = \alpha v_S$$

có nghiệm không tầm thường. Hơn nữa tập các nghiệm không tầm thường của hệ này là tọa độ của tất cả các véc tơ riêng của φ ứng với α.

(iv) Mỗi toán tử tuyến tính của không gian véc tơ n chiều có tối đa n giá trị riêng khác nhau.

Như vậy để tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của φ, ta phải thực hiện bốn bước sau

Thuật toán tìm giá trị riêng và véc tơ riêng

1. Tìm ma trận biểu diễn A của φ theo một cơ sở nào đó (để được ma trận chứa càng nhiều 0 càng tốt).

2. Tìm đa thức đặc trưng $f_A(t)$.

3. Tìm nghiệm của đa thức đặc trưng trên trường K đã cho. Đó là tập các giá trị riêng.

4. Với mỗi giá trị riêng α, lập hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} (a_{11}-\alpha)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\alpha)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\alpha)x_n = 0. \end{cases}$$

rồi giải để tìm một hệ nghiệm cơ sở. Đó chính là cơ sở của không gian riêng ứng với α.

Ví dụ 18.2 Cho φ là toán tử tuyến tính của K^n có ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của A là

$$f_A(t) = t^2 - 2.$$

Như vậy

a) Nếu $K = \mathbb{Q}$ thì $f_A(t)$ không có nghiệm trên $\mathbb{Q}$, nên φ không có giá trị riêng.

b) Nếu $K = \mathbb{R}$ thì $f_A(t)$ có hai nghiệm là $\pm\sqrt{2}$, tức là φ có hai giá trị riêng là $\pm\sqrt{2}$. Tương ứng ta có hai hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \sqrt{2}x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1\sqrt{2} + x_2 = 0. \end{cases}$$

Giải chúng ra ta được các véc tơ riêng ứng với $\sqrt{2}$ là $c(\sqrt{2}, 1)$, $c \neq 0$, và các véc tơ riêng ứng với $-\sqrt{2}$ là $c(\sqrt{2}, -1)$, $c \neq 0$.

Định lí 18.3 *Cho $v_1, ..., v_r$ là các véc tơ riêng của φ ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_r$. Giả sử $\lambda_1, ..., \lambda_r$ đôi một khác nhau. Khi đó $v_1, ..., v_r$ độc lập tuyến tính.*

Ta nói một toán tử tuyến tính *chéo hóa được* nếu nó có một ma trận biểu diễn là ma trận đường chéo

Định lí 18.4 *Cho φ là toán tử tuyến tính của không gian véc tơ V chiều n. Khi đó*

(i) φ chéo hóa được khi và chỉ khi V có một cơ sở gồm các véc tơ riêng.

(ii) Nếu φ có n giá trị riêng khác nhau thì chéo hóa được

Ta cũng nói một ma trận vuông A *chéo hóa được* nếu nó đồng dạng với ma trận đường chéo, tức là tồn tại ma trận khả nghịch P để $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo. Nếu A chéo hóa được, Bài 18.18 cho ta một thuật toán để tìm một ma trận P như vậy.

Hệ quả 18.5 *Nếu ma trận vuông A cấp n có n giá trị riêng khác nhau thì A đồng dạng với ma trận đường chéo.*

Việc tính toán giá trị riêng và véc tơ riêng không phải bao giờ cũng thực hiện được. Vì vậy kết quả sau đây từ lý thuyết toán tử đối xứng, toán tử unita và toán tử Hermite rất đáng lưu ý (xem các mục 25, 26 và xem thêm các bài 18.11, 18.12), mặc dù nó không cho ta cách tính tường minh.

Định lí 18.6 *(i) Một ma trận đối xứng trên trường số thực bao giờ cũng chéo hóa được.*

(ii) Ma trận unita và ma trận Hermite trên trường số phức chéo hóa được.

Sử dụng dạng chuẩn Jordan có thể chứng minh thêm được các tính chất của giá trị riêng (xem Mục 22).

Bài tập

Bài 18.1 Cho $\varphi, \psi : V \to U$ là hai ánh xạ tuyến tính tùy ý. Chứng tỏ rằng

a) Nếu $p : U \to V$ là một toàn ánh (cố định), thì $\varphi = \psi$ khi và chỉ khi hai toán tử tuyến tính φp và ψp của U bằng nhau.

b) Nếu $j : U \to V$ là một đơn ánh, thì $\varphi = \psi$ khi và chỉ khi hai toán tử tuyến tính $j\varphi$ và $j\psi$ của V bằng nhau.

Bài 18.2 Tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận sau trên $\mathbb{R}$

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix},\quad b)\ B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận nào có thể chéo hóa được, vì sao?

Bài 18.3 Chứng minh rằng mọi véc tơ khác 0 đều là véc tơ riêng của toán tử tuyến tính φ khi và chỉ khi $\varphi = \alpha\,\mathrm{id}$.

Bài 18.4 Tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các toán tử tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) $\varphi(x, y, z) = (2x - y + 2z, 5x - 3y + 3z, -x - 2z)$.

b) $\varphi(x, y, z) = (y, -4x + 4y, -2x + y + 2z)$.

Bài 18.5 Tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các toán tử tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) $\varphi(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$.

b) $\varphi(x, y, z) = x - 3y + 3z, -2x - 6y + 13z, -x - 4y + 8z)$.

Bài 18.6 Cho $v_{i1}, ..., v_{im_i}$ là các véc tơ độc lập tuyến tính và là các véc tơ riêng của toán tử tuyến tính φ ứng với giá trị riêng λ_i, $i = 1, ..., r$. Giả sử $\lambda_1, ..., \lambda_r$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng hệ các véc tơ $\cup_{i=1}^{r}\{v_{i1}, ..., v_{im_i}\}$ độc lập tuyến tính. Từ đó hãy suy ra điều kiện cần và đủ để φ chéo hóa được là $m_1 + \cdots + m_r = n$ $(n = \dim V)$.

Bài 18.7 Ma trận A có các phần tử $a_1, ..., a_{n-1}$ nằm trên đường chéo con ngay trên đường chéo chính và tất cả các phần tử còn lại bằng 0. Tìm điều kiện cần và đủ để A chéo hóa được.

Bài 18.8 Tìm tất cả các giá trị riêng và ứng với mỗi giá trị riêng tìm một cơ sở các véc tơ riêng của toán tử $\varphi(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$. Toán tử này có chéo hóa được không?

Bài 18.9* Cho φ, ψ là hai toán tử tuyến tính của V. Chứng minh rằng $\varphi\psi$ và $\psi\varphi$ có cùng giá trị riêng.

Bài 18.10 Giả sử φ khả nghịch. Chứng tỏ rằng nếu λ là giá trị riêng của φ, thì $1/\lambda$ là giá trị riêng của φ^{-1}. Hơn nữa nếu v là véc tơ riêng của φ ứng với λ thì nó cũng là véc tơ riêng của φ^{-1} ứng với $1/\lambda$.

Bài 18.11 Chứng tỏ rằng mọi toán tử tuyến tính của không gian véc tơ chiều lẻ trên $\mathbb{R}$ đều có véc tơ riêng.

Bài 18.12 Chứng tỏ rằng mọi toán tử tuyến tính của không gian véc tơ chiều hữu hạn trên $\mathbb{C}$ đều có véc tơ riêng. Điều đó còn đúng không nếu $\dim V = \infty$?

Bài 18.13 Cho $f(t) \in K[t]$ và A là ma trận vuông có giá trị riêng λ. Chứng minh rằng ma trận đa thức $f(A)$ có giá trị riêng $f(\lambda)$.

Bài 18.14 Cho λ là giá trị riêng của toán tử tuyến tính φ của không gian véc tơ hữu hạn chiều. Giả sử $(t-\lambda)^r$ là lũy thừa lớn nhất của $t-\lambda$ chia hết $f_\varphi(t)$. Chứng minh rằng chiều của không gian riêng ứng với λ không vượt quá r.

Bài 18.15 Xác định tất cả các ma trận vuông cấp 2 chéo hóa được trên a) $\mathbb{R}$, b) $\mathbb{C}$.

Bài 18.16 Cho φ, ψ là hai toán tử tuyến tính của V giao hoán với nhau. Chứng tỏ rằng nếu v là véc tơ riêng của φ ứng với giá trị riêng λ và $\psi(v) \neq 0$, thì $\psi(v)$ cũng là véc tơ riêng của φ.

Bài 18.17 Chứng tỏ rằng hai ma trận vuông A và A^T có chung giá trị riêng. Tìm ví dụ chứng tỏ chúng không cùng chung véc tơ riêng.

Bài 18.18 Cho A là ma trận vuông cấp n và $v_1, ..., v_n \in K^n$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Cho P là ma trận có các cột là các véc tơ $v_1, ..., v_n$. Chứng minh rằng $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo $\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Bài 18.19 Cho φ là toán tử tuyến tính của không gian véc tơ chiều n và có n giá trị riêng khác nhau. Chứng minh rằng nếu toán tử tuyến tính ψ giao hoán với φ thì mọi véc tơ riêng của φ cũng là véc tơ riêng của ψ.

Bài 18.20* Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng AB và BA có cùng đa thức đặc trưng.

Bài 18.21* Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tức là ma trận có toàn 0 trừ đường chéo phụ toàn 1. Chứng minh rằng A chéo hóa được và tìm một ma trận P khả nghịch để $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

Bài 18.22* Tìm điều kiện cần và đủ để ma trận A có các phần tử trên đường chéo phụ là $a_1, ..., a_n$ còn các phần tử khác bằng 0 có thể chéo hóa được trên $\mathbb{C}$.

Bài 18.23 Tìm các giá trị riêng của ma trận A^TA, trong đó $A = (a_1, ..., a_n)$.

Bài 18.24 Cho λ là nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận vuông A cấp n với số bội p. Đặt $r = \text{rank}(A - \lambda I)$. Chứng minh rằng

$$1 \leq n - r \leq p.$$

Bài 18.25* Tìm các giá trị riêng của ma trận chu trình sau trên $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Bài 18.26* Chứng minh rằng toán tử tuyến tính φ của không gian véc tơ chiều n trên $K \subseteq \mathbb{C}$ là lũy linh (tức là $\varphi^k = 0$ với $k > 0$ nào đó) khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của nó bằng $(-t)^n$.

Bài 18.27* Chứng minh rằng các hệ số của đa thức đặc trưng $f_A(t)$ của ma trận vuông A được tính như sau:

$$f_A(t) = |A - tI| = (-t)^n + c_1(-t)^{n-1} + c_2(-t)^{n-2} + \cdots + c_n,$$

trong đó c_k là tổng của các định thức con chính cấp k của ma trận A.

19 Không gian con bất biến

Đây là khái niệm then chốt để nghiên cứu bài toán tìm dạng "đơn giản nhất" (tức ma trận chứa nhiều 0) của ma trận biểu diễn của một toán tử tuyến tính của không gian véc tơ hữu hạn chiều. Nhờ khái niệm này ta có thể chuyển bài toán tìm dạng đơn giản của ma trận biểu diễn thành bài toán phân tích không gian véc tơ thành các không gian con bất biến.

Ta luôn hiểu φ là toán tử tuyến tính của không gian véc tơ V.

Định nghĩa 19.1 Ta nói không gian con $U \subseteq V$ là *không gian con bất biến* của φ nếu $\varphi(U) \subseteq U$.

Đôi khi φ đã rõ thì không gian con bất biến của φ được gọi tắt là không gian con bất biến.

Ví dụ 19.1 a) Các không gian con bất biến tầm thường của φ tùy ý là 0 và V.

b) Với mỗi φ cho trước, $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi^2)$, ... , $\mathrm{Im}(\varphi^k)$ là các không gian con bất biến. Tuy nhiên dãy này không nhất thiết kéo dài mãi, mà có thể trùng nhau, hoặc bằng 0, V.

c) Nếu φ là ánh xạ đồng nhất hoặc ánh xạ 0, thì mọi không gian con của V là không gian con bất biến của φ. Ngược lại, nếu mọi không gian con là không gian con bất biến của φ, thì $\varphi = \alpha\,\mathrm{id}$.

d) Không gian con một chiều là không gian con bất biến khi và chỉ khi nó sinh bởi một véc tơ riêng.

e) Nếu λ là một giá trị riêng của φ, thì mọi không gian con của không gian riêng ứng với λ cũng là không gian con bất biến của φ.

Mệnh đề 19.2 *(i) Không gian con $U \subseteq V$ là không gian con bất biến của φ khi và chỉ khi ảnh của một hệ sinh của U nằm trong U.*

(ii) Nếu $U \subseteq V$ là không gian con bất biến, thì ánh xạ hạn chế $\varphi|_U$ là một toán tử tuyến tính của U.

(iii) Nếu $U \subseteq V$ là không gian con bất biến, thì ánh xạ cảm sinh $\bar{\varphi}(\bar{v}) = \overline{\varphi(v)}$ là một toán tử tuyến tính của không gian thương V/U.

(iv) Cho $S = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V sao cho $T = \{e_1, ..., e_r\}$ là cơ sở của không gian con U. Khi đó U là không gian con bất biến của φ nếu và chỉ nếu ma trận biểu diễn của φ theo S có dạng ma trận khối:

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

với B là ma trận vuông cấp r. Hơn nữa, khi đó B là ma trận biểu diễn của $\varphi|_U$ theo T và D là ma trận biểu diễn của $\bar{\varphi}$ (theo $\bar{e}_{r+1}, ..., \bar{e}_n$).

Định lí 19.3 *Giả sử $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ là tổng trực tiếp của các không gian con bất biến hữu hạn chiều $V_1, ..., V_r$ của φ. Cho $S_1, ..., S_r$ là những cơ sở*

của $V_1, ..., V_r$ *và* $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_r$ *(giữ nguyên thứ tự). Gọi* $A, A_1, ..., A_n$ *theo thứ tự là các ma trận biểu diễn của* φ, $\varphi|_{V_1}, ..., \varphi|_{V_n}$ *theo các cơ sở* $S, S_1, ..., S_n$. *Khi đó*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}.$$

Ta nói không gian con bất biến không tầm thường của φ là *không gian con bất khả qui*, nếu nó không phân tích được thành tổng trực tiếp của hai không gian con bất biến thực sự.

Bổ đề 19.4 *Mọi không gian véc tơ hữu hạn chiều đều phân tích được thành tổng trực tiếp của các không gian con bất khả qui của một toán tử tuyến tính cho trước.*

Tuy nhiên sự phân tích trên là không duy nhất. Ví dụ: không gian con bất biến của toán tử đồng nhất chính là không gian con tùy ý chiều 1. Mỗi cơ sở của V sẽ cho một phân tích thành tổng trực tiếp của các không gian con bất biến của id: mỗi không gian con được sinh bởi một véc tơ trong cơ sở đã chọn.

Bài tập

Bài 19.1 Chứng tỏ rằng giao và tổng của các không gian con bất biến lại là không gian con bất biến.

Bài 19.2 Cho φ, ψ là hai toán tử tuyến tính giao hoán với nhau. Chứng tỏ rằng nếu U là không gian con bất biến của φ, thì $\psi(U)$ cũng là không gian con bất biến của φ.

Bài 19.3 Cho φ, ψ là hai toán tử tuyến tính giao hoán với nhau của không gian véc tơ V. Chứng tỏ rằng $\mathrm{Ker}(\psi)$ và $\mathrm{Im}(\psi)$ là không gian con bất biến của φ.

Bài 19.4 Cho φ là toán tử tuyến tính của V và $f(t) \in K[t]$. Chứng minh rằng $f(\varphi)(V)$ là không gian con bất biến của φ, trong đó $f(\varphi)$ là toán tử đa thức của φ.

Bài 19.5 a) Cho $U \subseteq V$ là không gian con bất biến của φ và $W \subset U$. Chứng tỏ rằng W là không gian con bất biến của $\varphi|_U$ khi và chỉ khi nó là không gian con bất biến của φ.

b) $\varphi(U)$, $\varphi^{-1}(U)$ là các không gian con bất biến của φ.

Bài 19.6 Cho $V = V_1 \oplus ... \oplus V_r$ là tổng trực tiếp của các không gian con bất biến của φ. Chứng minh rằng

$$\varphi(V) = \varphi(V_1) \oplus ... \oplus \varphi(V_r).$$

Bài 19.7* Cho φ là toán tử tuyến tính của K^n có n giá trị riêng khác nhau. Tìm tất cả các không gian con bất biến của φ.

Bài 19.8* Cho φ là toán tử tuyến tính (của không gian véc tơ V hữu hạn chiều) chéo hóa được và U là không gian con bất biến. Chứng minh rằng $\varphi|_U$ chéo hóa được.

Bài 19.9 Tìm tất cả các không gian con bất biến của toán tử tuyến tính của K^3 cho bởi các công thức sau:

a) $\varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, -x + y + z)$.

b) $\varphi(x, y, z) = (5x - y - z, -x + 5y - z, -x - y + 5z)$.

c) $\varphi(x, y, z) = (-6x + 2y + 3z, 2x - 3y + 6z, 3x + 6y + 2z)$.

Bài 19.10* Cho φ là toán tử tuyến tính của K^n có ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên là ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} a & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix},$$

trong đó $b_1, ..., b_{n-1}$ khác 0. Tìm tất cả các không gian con bất biến của φ.

Bài 19.11 Cho $v \in V$. Chứng minh rằng không gian con bất biến bé nhất của toán tử tuyến tính φ chứa v là không gian con sinh bởi

$$v,\ \varphi(v), \varphi^2(v),\ ....$$

Không gian này được gọi là *không gian con xích sinh bởi* v.

Bài 19.12* Chứng minh rằng điều kiện cần để một toán tử tuyến tính φ của không gian véc tơ hữu hạn chiều chéo hóa được là mọi không gian con bất biến khác 0 của φ đều chứa một véc tơ riêng. Đây có phải là điều kiện đủ không?

Bài 19.13* Cho φ, ψ là hai toán tử tuyến tính giao hoán với nhau của không gian véc tơ hữu hạn chiều trên $\mathbb{C}$. Chứng minh rằng chúng có chung một véc tơ riêng.

Bài 19.14* Cho φ, ψ là hai toán tử tuyến tính giao hoán với nhau của không gian véc tơ hữu hạn chiều. Giả sử cả hai toán tử tuyến tính này đều chéo hoá được. Chứng minh rằng chúng có thể đồng thời chéo hoá được, tức là tồn tại một cơ sở là các véc tơ riêng chung cho cả hai toán tử tuyến tính.

Bài 19.15 Cho $U \subseteq V$ là không gian con bất biến của toán tử tuyến tính φ của không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng

$$f_\varphi(t) = f_{\varphi|_U}(t) f_{\bar{\varphi}}(t),$$

trong đó $\bar{\varphi}$ là toán tử tuyến tính của V/U cảm sinh bởi φ.

Bài 19.16 Chứng minh rằng mọi ma trận vuông trên $\mathbb{C}$ đều đồng dạng với ma trận tam giác trên. Kết quả còn đúng không trên $\mathbb{R}$?

Bài 19.17 Chứng minh rằng nếu không gian con bất biến $U \subseteq V$ của toán tử tuyến tính φ của không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{C}$ chứa đúng một đường thẳng bất biến thì nó bất khả qui.

Bài 19.18 Chứng tỏ rằng toán tử tuyến tính φ của không gian véc tơ chiều n có ma trận biểu diễn là ma trận tam giác trên khi và chỉ khi tồn tại dãy không gian con bất biến lồng nhau $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ sao cho $\dim V_i = i$.

Bài 19.19* Cho trước số nguyên dương d. Chứng minh rằng nếu mọi toán tử tuyến tính của không gian véc tơ V chiều n sao cho d không chia hết n đều có véc tơ riêng, thì bất kì r toán tử tuyến tính giao hoán với nhau nào của không gian véc tơ chiều n sao cho d không chia hết n cũng đều có chung véc tơ riêng.

20 Toán tử đa thức

Ta luôn giả thiết φ là toán tử tuyến tính của không gian véc tơ hữu hạn chiều trên K, mặc dù đôi chỗ cũng đúng cho vô hạn chiều.

Cho $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r \in K[t]$ và φ là toán tử tuyến tính của V. Nhắc lại rằng

$$f(\varphi) = a_0 \,\mathrm{id} + a_1\varphi + \cdots + a_r\varphi^r$$

lại là một toán tử tuyến tính của V và được gọi là *toán tử đa thức*. Sau đây là một số tính chất

Mệnh đề 20.1 *(i) Nếu φ có ma trận biểu diễn A theo cơ sở S, thì cũng theo cơ sở này $f(\varphi)$ có ma trận biểu diễn là $f(A)$.*

(ii) Cho $f(t)$, $g(t)$ là hai đa thức. Khi đó

$$f(\varphi)g(\varphi) = (fg)(\varphi) = g(\varphi)f(\varphi).$$

Nói riêng hai toán tử đa thức của cùng một toán tử tuyến tính giao hoán với nhau.

(iii) Nếu $U \subseteq V$ là không gian con bất biến của toán tử tuyến tính φ và $f(t) \in K[t]$, thì $f(\varphi)|_U = f(\varphi|_U)$ và $f(\bar{\varphi}) = \overline{f(\varphi)}$, trong đó $\bar{\varphi}$ là toán tử tuyến tính cảm sinh trên không gian thương V/U.

Một trong những kết quả đẹp nhất về đa thức toán tử là

Định lí 20.2 (Hamilton-Cayley)*: Nếu $f_\varphi(t)$ là đa thức đặc trưng của φ thì $f_\varphi(\varphi) = 0$.*

Định nghĩa 20.3 Cho toán tử tuyến tính φ của không gian véc tơ V. *Đa thức cực tiểu* của φ là đa thức chuẩn (tức có hệ số đầu bằng 1) $g \in K[t]$ có bậc nhỏ nhất sao cho $g(\varphi) = 0$. Đa thức cực tiểu được kí hiệu là g_φ.

Đôi khi ta cũng gọi đa thức cực tiểu của φ là đa thức cực tiểu của V, và lúc này thì ta ngầm hiểu φ đã được xác định.

Tương tự, đa thức cực tiểu của ma trận vuông A là đa thức đơn (tức có hệ số đầu bằng 1) $g(t) \in K[t]$ có bậc nhỏ nhất sao cho $g(A) = 0$. Đa thức cực tiểu của A được kí hiệu là g_A.

Các tính chất của đa thức cực tiểu

Mệnh đề 20.4 *Cho φ là một toán tử tuyến tính.*

(i) Đa thức cực tiểu của φ tồn tại và duy nhất.

(ii) Nếu $f \in K[t]$ là đa thức thỏa mãn điều kiện $f(\varphi) = 0$, thì g_φ chia hết f. Nói riêng đa thức cực tiểu là ước của đa thức đặc trưng f_φ.

(iii) Đa thức cực tiểu của toán tử tuyến tính trùng với đa thức cực tiểu của bất kì ma trận biểu diễn nào của nó.

(iv) Cho $U \subset V$ là không gian con bất biến của φ. Để cho tiện, ta gọi đa thức cực tiểu của ánh xạ hạn chế của φ trên U và ánh xạ cảm sinh của φ trên V/U là các đa thức cực tiểu của U và V/U và được kí hiệu là g_U và $g_{V/U}$. Khi đó các đa thức cực tiểu của U và V/U là ước của g_φ.

Ví dụ 20.1 a) Đa thức cực tiểu của ánh xạ 0 là đa thức t, của ánh xạ $\alpha\,\mathrm{id}$ là $t - \alpha$.

b) Cho $0 < m < n$. Phép chiếu

$$\pi : K^n \to K^n;\ \pi(x_1, .., x_n) = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$$

có đa thức cực tiểu là $t^2 - t$. Thật vậy

$$\pi^2(x_1, ..., x_n) - \pi(x_1, ..., x_n) = \pi(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) -$$
$$-(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) - (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) = 0.$$

Mặt khác, nếu $g(t) = t + \alpha$ là đa thức bậc nhất tùy ý, thì

$$(\varphi + \alpha\,\mathrm{id})(1, ..., 1) = (1 + \alpha, ..., 1 + \alpha, \alpha, ..., \alpha) \neq 0.$$

Do đó $g(\varphi) \neq 0$.

Kết hợp (ii) của mệnh đề trên với Bài 20.12, ta có

Thuật toán tìm đa thức cực tiểu:

1. Tìm ma trận biểu diễn A của φ.
2. Tìm đa thức đặc trưng $f_A(t) = |A - tI|$.
3. Phân tích $f_A(t)$ thành tích các đa thức bất khả qui

$$f_A(t) = (-1)^n f_1^{p_1} \cdots f_r^{p_r},$$

trong đó $f_1, ..., f_r$ là các đa thức đơn bất khả qui và $p_1, ..., p_r \geq 1$.

4. Đặt $g = f_1 \cdots f_r$. Thử xem $g(A) = 0$? Nếu bằng 0 thì $g_\varphi = g$. Nếu không, lần lượt tăng $q_1, ..., q_r$ lên một cách độc lập sao cho $1 \leq q_i \leq p_i$ để tìm ra đa thức G đầu tiên có dạng

$$G = f_1^{q_1} \cdots f_r^{q_r}$$

sao cho $G(A) = 0$. Khi đó $g_\varphi = G$.

Để đơn giản hóa bước 4, hãy chú ý áp dụng Bài 20.2.

Khi đặc số của trường bằng 0, việc tìm $f_{red} := f_1 \cdots f_r$ không khó (xem Bài 20.18). Tuy nhiên Thuật toán trên nói chung chỉ thực hiện được khi ta biết phân tích của đa thức đặc trưng thành tích các thừa số bất khả qui (xem Bài 20.19 để biết một số ngoại lệ). Định lí Abel - Galois nổi tiếng nói rằng nói chung không thể tìm được nghiệm của đa thức bậc lớn hơn hoặc bằng 5 bằng căn thức, nên Thuật toán trên không luôn luôn áp dụng được. Tuy nhiên sử dụng hệ phương trình, ta luôn tìm được đa thức cực tiểu, xem Bài 20.20.

Hệ quả 20.5 *Kí hiệu $f_{red} := f_1 \cdots f_r$, trong đó $f_1, ..., f_r$ là tất cả các nhân tử bất khả qui khác nhau của đa thức đặc trưng f_A của ma trận vuông cấp n. Khi đó*

$$\deg(f_{red}) \leq \deg g_A \leq n.$$

Khái niệm sau đây là một bước tiến quan trọng để phân tích không gian véc tơ đã cho thành tổng trực tiếp của các không gian con bất biến của toán tử tuyến tính cho trước φ.

Định nghĩa 20.6 Với mỗi $f \in K[t]$, ta đặt $H(f) = \operatorname{Ker} f(\varphi)$.

Ví dụ 20.2 a) $H(t - \lambda) = \{v \in V;\ \varphi(v) = \lambda v\}$, tức là nó trùng với không gian riêng ứng với λ, nếu λ là giá trị riêng của φ, và bằng 0, nếu ngược lại.

b) $H(f_\varphi) = H(g_\varphi) = V$.

Từ định nghĩa rõ ràng ta có $f(\varphi|_{H(f)}) = 0$.

Bổ đề 20.7 *Cho $f \in K[t]$ là một đa thức tùy ý.*

(i) $H(f)$ là một không gian con bất biến.

(ii) f là đa thức cực tiểu của $H(f)$ nếu và chỉ nếu f là đa thức đơn và là ước của g_φ.

Bổ đề 20.8 *Nếu $f, g \in K[t]$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau thì*

$$H(fg) = H(f) \oplus H(g).$$

Định lí 20.9 *Giả sử $g_\varphi = g_1^{p_1} \cdots g_r^{p_r}$ với $g_1, ..., g_r$ là những đa thức bất khả qui và $p_1, ..., p_r \geq 1$. Khi đó*

$$V = H(g_1^{p_1}) \oplus \cdots \oplus H(g_r^{p_r}).$$

Hơn nữa đa thức cực tiểu của $H(g_i^{p_i})$ là $g_i^{p_i}$, $i = 1, ..., r$.

Bài tập

Bài 20.1 Cho $U \subseteq V$ là không gian con bất biến của φ. Chứng minh rằng với mọi $f \in K[t]$, U cũng là không gian con bất biến của $f(\varphi)$.

Bài 20.2 Cho V_1 và V_2 là hai không gian con bất biến. Chứng minh rằng đa thức cực tiểu của $V_1 \oplus V_2$ là bội chung nhỏ nhất của các đa thức cực tiểu của V_1 và V_2. Hãy mở rộng ra trường hợp tổng trực tiếp của nhiều không gian con.

Hãy phát biểu dưới dạng ma trận.

Bài 20.3 Tìm đa thức cực tiểu của

a) $\varphi(x, y, z) = (x, x + 2y + z, -x + z)$.

b) $\varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, -5x + 7y - 5z, -6x + 6y - 4z)$.

Bài 20.4 Tìm đa thức đặc trưng và đa thức cực tiểu của các toán tử tuyến tính có ma trận biểu diễn là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bài 20.5* Cho $f, g \in K[t]$ và m, d tương ứng là bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất của hai đa thức này. Chứng minh rằng

$$H(d) = H(f) \cap H(g); \; H(m) = H(f) + H(g).$$

Bài 20.6* Chứng minh rằng $H(f) = 0$ khi và chỉ khi f và g_φ nguyên tố cùng nhau.

Bài 20.7 Tìm đa thức cực tiểu của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix},$$

trong đó $b_1, ..., b_{n-1}$ khác 0.

Bài 20.8 Tìm đa thức cực tiểu của ma trận đường chéo khối $A = \text{diag}(A_1, ..., A_r)$ với

a) $A_i = a_i I_{m_i}$, $i = 1, ..., r$, trong đó $a_1, ..., a_r$ đôi một khác nhau và $m_1, ..., m_r \geq 1$.

b) A_i là ma trận vuông cấp m_i có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng a_i, các phần tử nằm trên đường chéo thứ hai phía trên đường chéo chính bằng 1, còn lại là 0, trong đó $a_1, ..., a_r$ đôi một khác nhau và $m_1, ..., m_r \geq 1$.

Bài 20.9 Chứng minh phổ của toán tử tuyến tính φ là tập nghiệm của đa thức cực tiểu của nó.

Bài 20.10 Chứng tỏ rằng ma trận vuông A và A^T có cùng đa thức cực tiểu.

Bài 20.11 Giả sử $f \in K[t]$ là đa thức đơn, bất khả qui và $f(\varphi) = 0$. Chứng tỏ rằng f là đa thức cực tiểu của φ.

Bài 20.12* Chứng minh rằng đa thức đặc trưng f_φ luôn chia hết g_φ^n, trong đó n là chiều của không gian. Có thể giảm n thành số nhỏ hơn được không?

Từ đó hãy suy ra rằng g_φ phải chứa tất cả các ước bất khả qui của f_φ.

Bài 20.13 Cho $\deg g_\varphi = m$. Chứng tỏ rằng nếu φ khả nghịch, thì φ^{-1} là đa thức bậc $m - 1$ của φ.

Bài 20.14* *(Tính không phụ thuộc khi mở rộng trường)* Cho $K \subset F$ và $A \in M(n; K)$. Có thể xem A là ma trận trên F, và ta kí hiệu nó là $\hat{A}$. Chứng minh rằng A và $\hat{A}$ có cùng đa thức cực tiểu.

Bài 20.15 Chứng minh rằng toán tử tuyến tính của không gian véc tơ hữu hạn chiều chéo hóa được trên K khi và chỉ khi đa thức cực tiểu phân tích được thành tích của các đa thức tuyến tính đơn khác nhau, tức là có dạng

$$g_\varphi(t) = (t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_r),$$

trong đó $\alpha_1, ..., \alpha_r \in K$ đôi một khác nhau.

Bài 20.16 Chứng minh rằng toán tử tuyến tính tuần hoàn (tức là $\varphi^k = \mathrm{id}$ với $k > 0$) của không gian véc tơ hữu hạn chiều chéo hóa được trên $\mathbb{C}$.

Bài 20.17 Cho $U \subseteq V$ là không gian con bất biến của φ. Chứng minh rằng đa thức cực tiểu của φ chia hết cho bội chung nhỏ nhất của đa thức cực tiểu của U và đa thức cực tiểu của V/U. Tìm ví dụ chứng tỏ dấu bằng không xảy ra.

Bài 20.18* Cho K là trường có đặc số 0 và $f \in K[t]$. Giả sử

$$f = a_0(g_{11} \cdots g_{1m_1})^{p_1} \cdots (g_{r1} \cdots g_{rm_r})^{p_r},$$

trong đó $g_{11}, \cdots, g_{1m_1}, ..., g_{r1}, ..., g_{rm_r}$ là các đa thức đơn bất khả qui đôi một khác nhau và $p_1 > \cdots > p_r$.

Tìm thuật toán xác định các tích $g_{11} \cdots g_{1m_1}$, ..., $g_{r1} \cdots g_{rm_r}$, mà không dùng khai triển ở trên. Nói riêng luôn có thể xác định được f_{red}.

Bài 20.19 Cho đặc số của trường bằng 0. Tìm đa thức cực tiểu của ma trận vuông A cấp 3, 4 hoặc 5 mà không biết trước phân tích của đa thức đặc trưng thành tích các nhân tử bất khả qui.

Bài 20.20 Tìm thuật toán xác định đa thức cực tiểu của ma trận vuông A cấp n tùy ý mà không biết trước phân tích của đa thức đặc trưng thành tích các nhân tử bất khả qui.

Bài 20.21 Cho $f(t)$ là một ước có bậc ít nhất là 1 của đa thức cực tiểu của ma trận A. Chứng minh rằng $f(A)$ có định thức bằng 0.

Bài 20.22 Cho $p(t)$ là đa thức bất khả qui sao cho $|p(A)| = 0$. Chứng minh rằng $p(t)$ là ước của đa thức cực tiểu của A.

21 Không gian xích

Cho φ là toán tử tuyến tính của không gian véc tơ hữu hạn chiều V và $v \in V$. Khi đó

$$Z(v) = \{f(\varphi)(v);\ f(t) \in K[t]\}$$

là không gian con bất biến bé nhất chứa v (so sánh với Bài 19.11).

Định nghĩa 21.1 Ta nói không gian con U của V là *không gian xích* (của φ) nếu tồn tại $v \in V$ để $U = Z(v)$. Khi đó v được gọi là *phần tử sinh* của U.

Khái niệm này là bước quyết định tiếp theo để phân tích không gian véc tơ có đa thức cực tiểu là lũy thừa của một đa thức bất khả qui thành tổng trực tiếp của các không gian con bất khả qui.

Ví dụ 21.1 a) Nếu $v \in V$ là véc tơ riêng của φ, thì không gian xích sinh bởi v chính là Kv.

b) Cho $\pi : K^n \to K^n$ là phép chiếu lên $m < n$ thành phần đầu, tức là

$$\pi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0).$$

Cho $v = (x_1, ..., x_n)$. Giả sử cả hai véc tơ $v_1 = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$, $v_2 = (0, ..., 0, x_{m+1}, ..., x_n)$ đều khác 0. Khi đó $Z(v) = Kv_1 + Kv_2$, còn $Z(v_1) = Kv_1$, $Z(v_2) = Kv_2$.

Bổ đề 21.2 *Đa thức cực tiểu g của không gian xích $Z(v)$ có các tính chất sau:*

(i) *g là ước của mọi đa thức $h \in K[t]$ thỏa mãn tính chất $h(\varphi)(v) = 0$.*

(ii) $\deg(g) = \dim Z(v)$.

Định lí 21.3 *Giả sử $g_\varphi = g^p$ với g là đa thức bất khả qui. Khi đó tồn tại các không gian xích $V_1, ..., V_s$ sao cho*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

Hơn nữa phân tích này có các tính chất sau:

(i) *Mỗi V_i là một không gian con bất khả qui có đa thức cực tiểu là g^{p_i} với $p_i \leq p$ và $\dim V_i = p_i \deg(g)$.*

(ii) *Có ít nhất một* $p_i = p$.

(iii) $(\deg g)(p_1 + \cdots + p_s) = \dim V$.

(iv) *Gọi* s_k *là số các không gian xích có đa thức cực tiểu là* g^k $(1 \leq k \leq p)$. *Khi đó*

$$s_k = \frac{1}{\deg g}[\dim g^{k-1}(\varphi)(V) - 2\dim g^k(\varphi)(V) + \dim g^{k+1}(\varphi)(V)].$$

Kết hợp định lí này và Định lí 20.9, ta được

Định lí 21.4 *Giả sử* $g_\varphi = g_1^{p_1} \cdots g_r^{p_r}$ *với* $p_1, ..., p_r \geq 1$ *và* $g_1, ..., g_r$ *là những đa thức đơn, bất khả qui khác nhau. Cho*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

là một phân tích thành tổng trực tiếp của các không gian con bất khả qui. Khi đó các tính chất sau thỏa mãn

(i) *Mỗi* V_i *là một không gian con xích có đa thức cực tiểu dạng* $g_j^{q_i}$ *với* $j \leq r$, $1 \leq q_i \leq p_j$ *và* $\dim V_i = q_i \deg(g_j)$.

(ii) *Với mỗi* $1 \leq j \leq r$ *tồn tại* i *để* $q_i = p_j$.

(iii) *Gọi* s_{ik} *là số các không gian thành phần có đa thức cực tiểu là* g_i^k *với* $i = 1, ..., r$, $k = 1, ..., p_i$. *Ta có*

$$s_{ik} = \frac{1}{\deg g_i}[\dim g_i^{k-1}(\varphi)(V) - 2\dim g_i^k(\varphi)(V) + \dim g_i^{k+1}(\varphi)(V)].$$

Bài tập

Bài 21.1 Cho $v \in V$. Chứng tỏ rằng $Z(v)$ là giao của mọi không gian con bất biến của φ chứa v.

Bài 21.2 Cho đa thức đơn tùy ý

$$f(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

Ma trận sau đây được gọi là *ma trận đồng hành* của $f(t)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng đa thức cực tiểu của A là $f(t)$.

Bài 21.3 Giả sử đa thức cực tiểu g_φ của toán tử tuyến tính φ của $V = K^n$ có bậc là n và g_φ là lũy thừa của một đa thức bất khả qui trên K.

a) g_φ có dạng như thế nào khi $K = \mathbb{R}$; $K = \mathbb{C}$.

b) Chứng tỏ rằng V bất khả qui và là không gian xích của φ.

Bài 21.4* Cho $v \in V$ và g là đa thức cực tiểu của $Z(v)$. Cho $h \in K[t]$ tùy ý. Chứng minh rằng

a) $h(\varphi)(Z(v))$ lại là không gian xích.

b) $h(\varphi)(Z(v))$ có đa thức cực tiểu là g/d với d là ước chung lớn nhất của g và h.

c) $h(\varphi)(Z(v)) = Z(v)$ nếu h và g nguyên tố cùng nhau.

Bài 21.5 Chứng minh rằng tổng của hai không gian xích có các đa thức cực tiểu nguyên tố cùng nhau là một tổng trực tiếp và lại là không gian xích.

Bài 21.6* Cho $U \subseteq V$ là một không gian con bất biến của φ. Chứng minh rằng U là không gian xích khi và chỉ khi $\dim U$ bằng bậc của đa thức cực tiểu của U.

Bài 21.7 Chứng minh rằng mọi không gian con bất biến của một không gian xích lại là không gian xích.

Bài 21.8 cho $\dim V = n$. Chứng minh rằng V là không gian xích khi và chỉ khi có cơ sở $v_1, ..., v_n$ thỏa mãn điều kiện $\varphi(v_i) = v_{i+1}$ với mọi $i = 1, ..., n-1$. Tìm ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở này.

Bài 21.9 Cho $x, y \in V$. Chứng minh rằng $Z(x) = Z(y)$ khi và chỉ khi tồn tại một đa thức f nguyên tố cùng nhau với đa thức cực tiểu của $Z(x)$ sao cho $y = f(\varphi)(x)$.

Bài 21.10 Giả sử $g_\varphi = g^p$, trong đó g là đa thức bất khả qui. Chứng minh rằng trong mọi phân tích V thành tổng trực tiếp của các không gian con bất biến ít nhất có một thành phần có đa thức cực tiểu là g^p.

Bài 21.11* Chứng minh rằng một không gian con bất biến $U \subseteq V$ là bất khả qui khi và chỉ khi các điều kiện sau thỏa mãn:

a) U là không gian xích.

b) Đa thức cực tiểu của U là lũy thừa của một đa thức bất khả qui.

Bài 21.12* Cho $(t-\lambda)^m$, $m \geq 1$ và $(t-\lambda)^n$ tương ứng là lũy thừa cao nhất của $t - \lambda$ chia hết đa thức cực tiểu và đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính φ. Chứng minh rằng trong khai triển

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

thành các không gian con bất khả qui, số các không gian xích có đa thức cực tiểu dạng $(t-\lambda)^k$, $1 \leq k \leq m$, đúng bằng $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ và tổng các chiều của các không gian con này đúng bằng n.

Bài 21.13* Chứng minh rằng mọi không gian con bất biến của một không gian bất khả qui lại là một không gian con bất khả qui.

Bài 21.14 Chứng minh rằng V là không gian xích khi và chỉ khi trong mọi phân tích của nó thành tổng trực tiếp của các không gian con bất khả qui số thành phần bằng số nhân tử bất khả qui của đa thức cực tiểu.

22 Dạng chuẩn Jordan

Dạng chuẩn Jordan có thể được xem là dạng ma trận biểu diễn đơn giản nhất của một toán tử tuyến tính.

Định nghĩa 22.1 *Ma trận đồng hành* của đa thức

$$g = t^m + c_{m-1}t^{m-1} + \cdots + c_1 t + c_0$$

là ma trận

$$J_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Ta cũng gọi nó là *ô Jordan.*

Nếu g là một đa thức bất khả qui bậc m và p là một số tự nhiên, thì ta nói ma trận vuông cấp mp có dạng ma trận khối sau đây là *khối Jordan liên kết với* g^p:

$$J_{g^p} = \begin{pmatrix} J_g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ O_{1m} & J_g & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & O_{1m} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & J_g & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & O_{1m} & J_g \end{pmatrix},$$

trong đó 0 là các ma trận vuông 0 cấp m và O_{1m} là ma trận vuông cấp m chỉ có phần tử $(1, m)$ bằng 1, còn lại là toàn 0.

Ví dụ 22.1 (i) Nếu $g = t - c$ thì $J_g = (c)$ và khối Jordan của $(t-c)^p$ là ma trận tam giác dưới cấp p

$$J_{(t-c)^p} = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & c & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Nói riêng, khối Jordan trên trường $\mathbb{C}$ chỉ có dạng này.

(ii) Nếu $g = t^2 + \alpha t + \beta$ và $\alpha^2 - 4\beta$ không là phần tử chính phương trong K, thì

$$J_g = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

còn khối Jordan của $(t^2+\alpha t+\beta)^p$ là ma trận vuông cấp $2p$ sau đây:

$$J_{g^p}=\begin{pmatrix}0&-\beta&0&0&\cdots&0&0&0&0\\1&-\alpha&0&0&\cdots&0&0&0&0\\0&1&0&-\beta&\cdots&0&0&0&0\\0&0&1&-\alpha&\cdots&0&0&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&0&\cdots&0&-\beta&0&0\\0&0&0&0&\cdots&1&-\alpha&0&0\\0&0&0&0&\cdots&0&1&0&-\beta\\0&0&0&0&\cdots&0&0&1&-\alpha\end{pmatrix}.$$

Nói riêng, khối Jordan trên $\mathbb{R}$ chỉ có dạng này hoặc dạng ở (i).

Bổ đề 22.2 *Cho đa thức cực tiểu của không gian con xích $U \subseteq V$ của toán tử tuyến tính φ là g^p. Khi đó tồn tại cơ sở để $\varphi|_U$ có ma trận biểu diễn là khối Jordan J_{g^p}.*

Cụ thể, nếu $U = Z(v)$ thì cơ sở để $\varphi|_U$ có ma trận biểu diễn đó là

$$e_{km+i+1} = g^k(\varphi)\varphi^i(v),\ i = 0, ..., m-1;\ k = 0, ..., p-1,$$

trong đó $m = \deg(g)$.

Định nghĩa 22.3 Ta nói ma trận vuông A là *ma trận Jordan* nếu nó là ma trận đường chéo khối $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_s)$, trong đó mỗi ma trận vuông A_i trên đường chéo là một khối Jordan liên kết với lũy thừa của một đa thức bất khả qui.

Chú ý rằng các đa thức bất khả qui liên kết với A_i và A_j cũng như lũy thừa của chúng có thể khác nhau hoặc trùng nhau.

Định lí 22.4 *Cho φ là toán tử tuyến tính tùy ý. Giả sử đa thức cực tiểu của nó có dạng $g_\varphi = g_1^{p_1} \cdots g_r^{p_r}$, trong đó $p_1, ..., p_r \geq 1$ và $g_1, ..., g_r$ là những đa thức bất khả qui khác nhau. Khi đó φ có ma trận biểu diễn là một ma trận Jordan $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_s)$. Hơn nữa*

(i) Mỗi khối Jordan A_i, $i = 1, ..., s$, liên kết với một đa thức dạng $g_j^{q_j}$, $j \leq r$ và $1 \leq q_j \leq p_j$.

(ii) Với mỗi $j = 1, ..., r$ có ít nhất một khối Jordan A_k, $k \leq s$, liên kết với $g_j^{p_j}$.

(iii) Ma trận Jordan này được xác định duy nhất, nếu không kể tới thứ tự của các khối Jordan. Cụ thể nếu kí hiệu s_{ik} là số các khối Jordan của đa thức g_i^k xuất hiện trong A ($i = 1, ..., r,\ 1 \leq k \leq p_i$), thì

$$s_{ik} = \frac{1}{\deg g_i}[\dim g_i^{k-1}(\varphi)(V) - 2\dim g_i^k(\varphi)(V) + \dim g_i^{k+1}(\varphi)(V)].$$

Định nghĩa 22.5 Ta gọi ma trận Jordan đồng dạng với ma trận vuông A là *dạng chuẩn tắc Jordan của A.*

Như là hệ quả của Định lí 22.4, ta có

Định lí 22.6 *Mọi ma trận vuông A đều có dạng chuẩn tắc Jordan. Hơn nữa dạng chuẩn tắc Jordan được xác định duy nhất, nếu không kể đến thứ tự các khối Jordan. Cụ thể nếu kí hiệu s_{ik} là số các khối Jordan của đa thức g_i^k xuất hiện trong dạng chuẩn tắc Jordan ($i = 1, ..., r,\ 1 \leq k \leq p_i$), thì*

$$s_{ik} = \frac{1}{\deg g_i}[\operatorname{rank} g_i^{k-1}(A) - 2\operatorname{rank} g_i^k(A) + \operatorname{rank} g_i^{k+1}(A)].$$

Hệ quả 22.7 *Hai ma trận vuông cùng cấp đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng một dạng chuẩn tắc Jordan.*

Ngoài việc ứng dụng để chứng minh hai ma trận đồng dạng với nhau nêu trong hệ quả trên (xem các bài 22.4, 22.5, 22.7), còn có thể sử dụng dạng chuẩn tắc Jordan để tính các ma trận đa thức (xem các bài 22.15, 22.16).

Thuật toán tìm dạng chuẩn tắc Jordan của ma trận vuông A

1. Tính đa thức đặc trưng và phân tích ra tích các nhân tử bất khả qui

$$f_A(t) = g_1^{m_1} \cdots g_r^{m_r}.$$

2. Tìm đa thức cực tiểu dưới dạng

$$g_A(t) = g_1^{p_1} \cdots g_r^{p_r},\ 1 \leq p_1 \leq m_1, ..., 1 \leq p_r \leq m_r.$$

3. Với mọi nhân tử g_i, tính hạng các ma trận $g_i^k(A)$, $k \leq p_i$. Sau đó dùng Định lí 22.6 để tính số khối Jordan s_{ik} liên kết với g_i^k.

4. Lập các khối Jordan liên kết với tất cả các đa thức g_i^k có $s_{ik} > 0$, rồi ghép chúng lại với nhau, mỗi khối xuất hiện s_{ik} lần, để được ma trận đường chéo khối. Đó chính là dạng chuẩn tắc Jordan cần tìm.

Chú ý 22.8 1. Mặc dù để tìm đa thức cực tiểu có thể không cần biết phân tích $f_A(t)$ thành tích các nhân tử bất khả qui (xem các bài 20.19, 20.20), để tìm dạng chuẩn tắc Jordan nhất thiết phải biết phân tích này.

2. Mặc dù đa thức đặc trưng và đa thức cực tiểu của ma trận không phụ thuộc vào mở rộng trường (xem Bài 20.14), dạng chuẩn tắc Jordan phụ thuộc vào trường mở rộng.

3. Trong nhiều trường hợp, không cần thực hiện bước 3 mà chỉ cần dựa vào hai chú ý sau là ta có thể tìm được số các khối Jordan:

a) Với mỗi $i = 1, ..., r$ có ít nhất một khối Jordan liên kết với $g_i^{p_i}$.

b) Với mỗi $i = 1, ..., r$, tổng các cấp của các khối Jordan liên kết với g_i^k đúng bằng m_i.

Ví dụ 22.2 a) Xét ma trận đồng hành của đa thức $t^3 - 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $f_A(t) = 3 - t^3$ và $g_A(t) = t^3 - 3$ (xem Bài 21.2, hoặc lưu ý là $g_A(t)$ chứa tất cả các nhân tử bất khả qui của $f_A(t)$).

* Trên $\mathbb{Q}$: vì $t^3 - 3$ bất khả qui, nên chính A là dạng chuẩn tắc Jordan.

* Trên $\mathbb{R}$: vì $t^3 - 3 = (t - \sqrt[3]{3})(t^2 + \sqrt[3]{3}t + \sqrt[3]{9})$, nên dạng chuẩn tắc Jordan của A là

$$\begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt[3]{9} \\ 0 & 1 & -\sqrt[3]{3} \end{pmatrix}.$$

* Trên $\mathbb{C}$: vì $t^3 - 3 = (t - \sqrt[3]{3})(t - \sqrt[3]{3}\epsilon)(t - \sqrt[3]{3}\epsilon^2)$, trong đó $\epsilon = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ là căn nguyên thuỷ của 1, nên dạng chuẩn tắc Jordan của A là

$$\begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{3}\epsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ này chứng tỏ dạng chuẩn tắc Jordan của một ma trận phụ thuộc vào trường số ta xét ma trận đó.

b) Xét ma trận trên $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ta có $f_A(t) = (t-2)^4$ và $g_A(t) = (t-2)^2$. Vì A có cấp 4, nên dạng chuẩn tắc Jordan của A ngoài khối Jordan $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ chỉ có thể chứa thêm một khối này nữa, hoặc chứa thêm đúng 2 khối nữa là ma trận (2). Nhưng trong trường hợp thứ 2 thì ứng với giá trị riêng 2 không gian riêng của A phải có chiều là 3 (xem Bài 21.12), tức là ma trận $A - 2I$ phải có hạng là 1. Điều này sai ($\operatorname{rank}(A - 2I) = 2$), nên dạng chuẩn tắc Jordan của A là

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài tập

Bài 22.1 Tìm dạng chuẩn tắc Jordan của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Bài 22.2 Tìm dạng chuẩn tắc Jordan của các ma trận sau trên $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài 22.3 Tìm ma trận biểu diễn dạng Jordan của các toán tử tuyến tính $\varphi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$:

a) $\varphi(x, y, z) = (x - 3y + 3z, -2x - 6y + 13z, -x - 4y + 8z)$.

b) $\varphi(x, y, z) = (7x - 12y + 6z, 10x - 19y + 10z, 12x - 24y + 13z)$.

Bài 22.4 Chứng minh rằng hai ma trận vuông cấp n sau đồng dạng với nhau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 22.5 Xét xem những ma trận nào dưới đây đồng dạng với nhau

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{pmatrix}.$$

Bài 22.6 Hãy mô tả dạng chuẩn tắc Jordan của các ma trận cấp 6 có đa thức cực tiểu là $(t+1)^2(t^2+2)$ trên a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{C}$.

Bài 22.7 Chứng minh rằng hai ma trận vuông cấp 3 đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng đa thức cực tiểu và đa thức đặc trưng. Nếu chỉ trùng nhau đa thức cực tiểu hoặc đa thức đặc trưng thì có còn đúng không?

Bài 22.8 Hai ma trận vuông cấp 4 có đồng dạng với nhau không nếu chúng có cùng đa thức cực tiểu và đa thức đặc trưng.

Bài 22.9* Chứng minh rằng ma trận vuông A và A^T đồng dạng với nhau.

Bài 22.10 Cho $A, B \in M(n, K)$ và $K \subset F$ là trường mở rộng. Chứng minh rằng $A \approx B$ trên K khi và chỉ khi $A \approx B$ trên F.

Bài 22.11* Chứng minh rằng mọi ma trận vuông đều đồng dạng với ma trận đường chéo khối gồm các ma trận dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Bài 22.12* Cho λ là nghiệm bội k của đa thức đặc trưng của ma trận vuông A. Chứng minh rằng với mọi đa thức $g \in K[t]$, $g(\lambda)$ là nghiệm bội k của đa thức đặc trưng của $g(A)$.

Bài 22.13 Tìm dạng chuẩn tắc Jordan của bình phương của khối Jordan liên kết với $(t-\alpha)^n$, trong đó $\alpha \neq 0$.

Bài 22.14* Tìm dạng chuẩn tắc Jordan của bình phương của khối Jordan liên kết với t^n.

Bài 22.15 Tính

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^{2004}.$$

Bài 22.16 Cho $f(t) = 10t^{10} - 9t^9 + \cdots - t$ và $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Tính $f(A)$.

Bài 22.17 Cho f là đa thức đặc trưng của ma trận vuông A và f_{red} là tích các ước bất khả qui khác nhau của f. Đặt $r = \operatorname{rank}(f_{red}(A))$. Chứng minh rằng đa thức cực tiểu g của A chia hết f_{red}^{r+1}.

Chương 7

Không gian Ơclit và không gian unita

23 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Định nghĩa 23.1 Một không gian véc tơ E trên trường số thực $\mathbb{R}$ được gọi là *không gian Ơclit* nếu với mỗi cặp véc tơ $(x, y) \in E^2$ ta cho tương ứng với một số thực - được kí hiệu là $\langle x, y\rangle$ và được gọi là *tích vô hướng* - thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(ii) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$,

(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$,

trong đó $x, x', y \in E$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Từ định nghĩa trên suy ra ngay (với $y' \in E$):

(ii') $\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$,

(iii') $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

Ví dụ 23.1 (i) Không gian $\mathbb{R}^n$ là một không gian Ơclit với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

trong đó $x = (x_1, ..., x_n)$ và $y = (y_1, ..., y_n)$.

Thực ra mọi không gian Oclit hữu hạn chiều đều đẳng cự với không gian này.

(ii) Tập tất cả các dãy số thực vô hạn

$$l_2 = \{x := (x_1, ..., x_n, ...);\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$

lập thành không gian Oclit vô hạn chiều với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Thật vậy, sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ được suy ra từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ và $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$, nên tích vô hướng được hoàn toàn xác định. Ta có thể dễ dàng kiểm tra các tính chất nêu trên.

(iii) Không gian các hàm số thực $C[a, b]$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, $a < b$, lập thành không gian Oclit vô hạn chiều với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

(iv) Nếu $F \subset E$ là không gian véc tơ con của không gian Oclit E thì F cũng là không gian Oclit với phép nhân vô hướng cảm sinh trên F.

Trong giáo trình về đại số tuyến tính, chủ yếu ta chỉ xét không gian Oclit hữu hạn chiều. Giải tích hàm là ngành nghiên cứu nhiều về không gian Oclit vô hạn chiều, đặc biệt là không gian Hilbert.

Không gian unita được định nghĩa trên trường số phức, và khá tương tự không gian Oclit (chỉ khác nhau ở điều kiện (i), và tương ứng là tính chất hệ quả (iii')).

Định nghĩa 23.2 Ta nói không gian véc tơ E trên trường số phức $\mathbb{C}$ là *không gian unita*, nếu với mỗi cặp véc tơ $(x, y) \in E^2$ ta cho tương ứng với một số phức - được kí hiệu là $\langle x, y\rangle$ và được gọi là *tích vô hướng* - thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

(ii) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$,

(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$,

trong đó $x, x', y \in E$ và $\alpha \in \mathbb{C}$.

Từ điều kiện (i) suy ra $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, nên điều kiện (iv) là hoàn toàn có nghĩa. Ta cũng có các hệ quả (với $y' \in E$):

(ii*) $\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$,

(iii*) $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$.

Tương tự như trên ta có các ví dụ

Ví dụ 23.2 (i) Không gian $\mathbb{C}^n$ là một không gian unita với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n.$$

Thực ra mọi không gian unita hữu hạn chiều đều đẳng cự với không gian này.

(ii) Tập tất cả các dãy số phức vô hạn

$$l_2 = \{x := (x_1, ..., x_n, ...);\ \sum_{n=1}^{\infty} |\ x_n\ |^2 < \infty\}$$

lập thành không gian unita vô hạn chiều với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n.$$

(iii) Nếu $F \subset E$ là không gian véc tơ con của không gian unita E thì F cũng là không gian unita với phép nhân vô hướng cảm sinh trên F.

Cũng như trường hợp không gian Óclit, ta chỉ xét chủ yếu không gian unita hữu hạn chiều.

Định nghĩa 23.3 Cho E là không gian Óclit hoặc không gian unita. *Chuẩn* hay *độ dài* của véc tơ $x \in E$ là số thực

$$|\ x\ | = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Nếu $|\ x\ | = 1$, thì ta nói x là *véc tơ định chuẩn*.

Một số sách kí hiệu $| x |$ là $\| x \|$. Như vậy

- $| x | = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.
- $| \alpha x | = | \alpha | \cdot | x |$
- Nếu $x \neq 0$ thì $\frac{x}{|x|}$ là véc tơ định chuẩn.

Định lí 23.4 *Cho E là không gian Oclit hoặc không gian unita. Với mọi $x.y \in E$ ta có*

(i) $| \langle x, y \rangle | \leq | x | \cdot | y |$ *(bất đẳng thức Côsi-Bunhiakovski-Schwarz).*

(ii) $| x \pm y | \leq | x | + | y |$ *(bất đẳng thức tam giác).*

Định nghĩa 23.5 Cho E là không gian Oclit hoặc không gian unita. Ta nói hai véc tơ $x, y \in E$ *trực giao với nhau* (hay *vuông góc với nhau*) nếu $\langle x, y \rangle = 0$.

Ta nói hai tập véc tơ A và B *trực giao với nhau*, nếu với mọi $a \in A$ và $b \in B$ ta có $\langle a, b \rangle = 0$.

Ta gọi hệ véc tơ trực giao với nhau từng đôi một là *hệ trực giao.*

Ta gọi hệ các véc tơ định chuẩn trực giao với nhau là *hệ trực chuẩn.* Nếu nó đồng thời lập thành cơ sở của E thì được gọi là *cơ sở trực chuẩn.*

Ví dụ 23.3 Cho $E = \mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$ với cơ sở tự nhiên là $e_1, ..., e_n$. Khi đó cơ sở này là cơ sở định chuẩn. Tập hợp $e_1, 2e_2, ..., ne_n$ khi $n \geq 2$ lập thành hệ trực giao, nhưng không phải là cơ sở trực chuẩn.

Trong không gian l_2 (thực hay phức), các véc tơ

$$(1, 0, ..., 0, ...), (0, 1, 0, ..., 0, ...), ...$$

lập thành một hệ trực chuẩn vô hạn, nhưng không phải là cơ sở.

Mệnh đề 23.6 *Cho $x_1, ..., x_n$ là một hệ trực giao gồm các véc tơ khác 0 của không gian Oclit (hay unita) E. Khi đó*

(i) $x_1, ..., x_n$ *độc lập tuyến tính.*

(ii) $| x_1 + \cdots + x_n |^2 = | x_1 |^2 + \cdots + | x_n |^2$ *(Định lí Pitago).*

Bổ đề 23.7 *Cho E là không gian Oclit hoặc không gian unita hữu hạn chiều. Giả sử $(x_1, ..., x_n)$ và $(y_1, ..., y_n)$ tương ứng là tọa độ của hai véc tơ $x, y \in E$ theo một cơ sở định chuẩn $e_1, ..., e_n$. Khi đó*

$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, *nếu* E *là không gian Ơclit;*
$\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$, *nếu* E *là không gian unita.*
Hơn nữa tọa độ của x *được tính theo công thức sau*

$$x_i = \langle x, e_i\rangle, \quad i = 1, ..., n.$$

Định lí 23.8 *Cho* E *là không gian Ơclit hoặc không gian unita hữu hạn chiều. Mọi hệ trực chuẩn của* E *đều mở rộng được thành một cơ sở trực chuẩn. Nói riêng,* E *luôn có cơ sở trực chuẩn.*

Để chứng minh định lí này, hoặc xây dựng một cơ sở trực chuẩn của E, người ta dùng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt được phát biểu như sau:

Phương pháp (thuật toán) trực giao hóa Gram-Schmidt

Để xây dựng một cơ sở trực chuẩn, ta xây dựng theo qui nạp, xuất phát từ một cơ sở $u_1, ..., u_n$ đã biết nào đó.

Khi đó một cơ sở trực giao có thể xây dựng bằng qui nạp như sau:

- Đặt $f_1 = u_1$;
- Nếu $f_1, ..., f_{k-1}$ đã được xây dựng, thì ta đặt

$$f_k = u_k - \alpha_1 f_1 - \cdots - \alpha_{k-1} f_{k-1},$$

trong đó $\alpha_i = \frac{\langle u_k, f_i\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle}$, $i = 1, ..., k-1$. Công thức của hệ số α_i được suy ra từ điều kiện $\langle f_k, f_i\rangle = 0$.

- Đặt $e_i = f_i / \mid f_i \mid$, ta sẽ được một hệ trực chuẩn.

Dĩ nhiên nếu ngay từ đầu ta đã biết $k-1$ véc tơ trực giao nhau, thì ta chỉ việc bắt đầu xây dựng từ véc tơ thứ k.

Ví dụ 23.4 (i) Tìm một cơ sở trực giao của không gian con sinh bởi các véc tơ

$$u_1 = (1, 2, 2, -1), \; u_2 = (1, 1, -5, 3), \; u_3 = (3, 2, 8, -7).$$

Theo thuật toán ở trên $f_1 = u_1$,

$$f_2 = u_2 - \alpha u_1 = (1, 1, -5, 3) + \frac{10}{10}(1, 2, 2, -1) = (2, 3, -3, 2),$$

và

$$\begin{aligned} f_3 &= u_3 - \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 \\ &= (3, 2, 8, -7) - \tfrac{30}{10}(1, 2, 2, -1) + \tfrac{26}{26}(2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, -2). \end{aligned}$$

(ii) Hãy mở rộng hệ trực giao gồm hai véc tơ $u_1 = (1,1,1,2)$ và $u_2 = (1,2,3,-3)$ thành một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$.

Nếu thêm vào hai véc tơ $e_3 = (0,0,1,0)$ và $e_4 = (0,0,0,1)$, thì ta sẽ được một cơ sở. Sử dụng thuật toán trên đối với u_1, u_2, e_3, e_4 ta sẽ được một cơ sở trực giao. Tuy nhiên nếu độc giả nào thực sự bắt tay vào tính toán, sẽ thấy ngay kết quả rất cồng kềnh.

Đôi khi cách giải sau đây gọn hơn phương pháp Gram-Schmidt: các véc tơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vuông góc với cả hai véc tơ u_1, u_2 phải thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0. \end{cases}$$

Suy ra

$$x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0.$$

Do đó một nghiệm của hệ phương trình là $u_3 = (-1,2,-1,0)$. Véc tơ u_4 phải có tọa độ thỏa mãn hai phương trình ban đầu và phương trình

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

Từ đó suy ra $3x_2 + 2x_4 = 0$. Cho $x_4 = -6$, ta được một véc tơ nữa là

$$u_4 = (25,4,-17,-6).$$

(iii) Cơ sở trực giao của không gian con của không gian unita $\mathbb{C}^3$ sinh bởi các véc tơ $(1,i,0)$ và $(1,1,1)$ là $f_1 = (1,i,0)$ và

$$f_2 = (1,1,1) - \alpha(1,i,0) = (1,1,1) - \frac{1-i}{2}(1,i,0) = (\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1).$$

Cơ sở định chuẩn là $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i, 1-i, 2)$.

Định lí 23.9 *Cho E là không gian Oclit hoặc không gian unita và $F \subset E$ là không gian con. Khi đó phần bù trực giao*

$$F^{\perp} := \{x \in E;\ \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in F\}$$

là không gian con của E. Hơn nữa, nếu E là không gian hữu hạn chiều, thì

$$(F^{\perp})^{\perp} = F \quad \text{và} \quad E = F \oplus F^{\perp}.$$

Một hệ quả hay được sử dụng là

Hệ quả 23.10 *Cho E là không gian Ơclit hoặc không gian unita hữu hạn chiều và $F \subset E$ là không gian con. Khi đó*

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

Bài tập

Bài 23.1 Chứng tỏ rằng không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ với

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2]$$

là không gian Ơclit. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của nó.

Bài 23.2 Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con trong không gian unita $\mathbb{C}^3$ sinh bởi $u_1 = (1, i, 0)$ và $u_2 = (1, 2, 1 - i)$.

Bài 23.3 Cho V là không gian Ơclit chiều n trên trường số thực với một cơ sở nào đó. Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một ma trận đối xứng thực $(\alpha_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ sao cho

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j,$$

trong đó $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ tương ứng là tọa độ của x và y.

Bài 23.4 Tìm điều kiện cần và đủ để không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$ với

$$\langle x, y\rangle = \alpha x_1y_1 + \beta x_2y_2 + \gamma_1 x_1y_2 + \gamma_2 x_2y_1$$

là không gian Ơclit.

Bài 23.5* Tìm điều kiện cần và đủ để không gian véc tơ $\mathbb{C}^2$ với

$$\langle x, y\rangle = \alpha x_1\bar{y}_1 + \beta x_2\bar{y}_2 + \gamma_1 x_1\bar{y}_2 + \gamma_2 x_2\bar{y}_1$$

là không gian unita.

Bài 23.6 Chứng tỏ rằng

a) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \mid x + y \mid^2 - \frac{1}{4} \mid x - y \mid^2$ (đối với không gian Ơclit).

b) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \mid x + y \mid^2 - \frac{1}{4} \mid x - y \mid^2 + \frac{i}{4} \mid x + iy \mid^2 - \frac{i}{4} \mid x - iy \mid^2$ (đối với không gian unita).

Bài 23.7* Chứng minh rằng trong không gian Ơclit (hay unita) ta có $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Bài 23.8 Chứng minh rằng nếu $E = \mathbb{C}^n$ và $A \in M(n;\mathbb{C})$, thì

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^* x, y\rangle.$$

Bài 23.9 Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con trong không gian Ơclit các hàm số được sinh bởi các đa thức $1, t, t^2$ và có tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Bài 23.10 Cho U, V là các không gian con của không gian Ơclit (hay unita) E tương ứng sinh bởi $u_1, \ldots, u_p$ và $v_1, \ldots, v_q$. Chứng tỏ rằng U trực giao với V khi và chỉ khi $\langle u_i, v_j\rangle = 0$ với mọi $i \le p$ và $j \le q$.

Bài 23.11 Chứng minh rằng một hệ trực giao các véc tơ khác 0 (trong không gian Ơclit hoặc unita) là độc lập tuyến tính.

Bài 23.12 Cho E là không gian Ơclit hữu hạn chiều. Cho $v_1, \ldots, v_n$ là tập các véc tơ trực chuẩn. Giả sử rằng với mỗi $v \in E$ ta có

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle^2.$$

Chứng tỏ rằng $v_1, \ldots, v_n$ lập thành cơ sở của E.

Bài 23.13 Chứng minh rằng trong một hình bình hành tổng các bình phương độ dài của hai đường chéo bằng tổng các bình phương độ dài các cạnh.

Bài 23.14 Cho V_1, V_2 là hai không gian con của không gian Ơclit hữu hạn chiều sao cho $\dim V_1 < \dim V_2$. Chứng minh rằng trong V_2 ta có thể tìm được một véc tơ khác 0 trực giao với V_1.

Bài 23.15 Tìm ví dụ chứng tỏ rằng hai mệnh đề cuối của Định lí 23.9 không đúng cho không gian vô hạn chiều.

Bài 23.16* Tìm ví dụ chứng tỏ rằng Định lí 23.8 không đúng cho không gian vô hạn chiều. Nói riêng, tồn tại không gian Ơclit vô hạn chiều không có cơ sở trực chuẩn.

Bài 23.17 Cho $V_1 \subseteq V_2$ là hai không gian con của không gian Oclit (hay unita) E. Chứng tỏ rằng $V_1^\perp \supseteq V_2^\perp$. Ngoài ra $0^\perp = E$ và $E^\perp = 0$.

Bài 23.18 Cho V_1, V_2 là hai không gian con của không gian Oclit hữu hạn chiều. Chứng minh rằng

$$(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp \quad \text{và} \quad (V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp.$$

Bài 23.19 Cho V là không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn trên $\mathbb{R}$. Ta có thể xem nó là không gian con của không gian Oclit $\mathbb{R}^n$. Hãy tìm $V^\perp$.

Bài 23.20 Chứng tỏ rằng không gian các ma trận vuông $M(n;\mathbb{R})$ với

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$$

lập thành một không gian Oclit. Tìm các không gian con bù trực giao của không gian con các ma trận đường chéo, không gian con các ma trận đối xứng.

Bài 23.21 Tìm một cơ sở của phần bù trực giao của không gian con của $\mathbb{C}^4$ sinh bởi các véc tơ

$$u_1 = (1, 0, 2i+1, 1),\ u_2 = (2, i, 4i, 3),\ u_3 = (0, i, -2, 1).$$

Bài 23.22 Không gian con V của $\mathbb{R}^4$ được cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Tìm hệ phương trình xác định $V^\perp$.

Bài 23.23 Cho $e_1, ..., e_n$ là một hệ trực chuẩn của không gian Oclit (hay unita) E. Chứng minh bất đẳng thức Bessel: với mọi $v \in E$ ta có

$$|\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2 \leq |v|^2.$$

Bài 23.24* Cho P_{n+1} là không gian các đa thức với hệ số thực bậc nhỏ hơn hoặc bằng n và tích vô hướng được cho bởi:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt,$$

Chứng minh rằng P_{n+1} là không gian Oclit nhận các đa thức sau làm cơ sở trực giao:

$$p_0(t) = 1,\ p_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k].$$

(Những đa thức này được gọi là đa thức Legendre.)

Bài 23.25 Chứng minh rằng trong không gian Oclit các hàm liên tục $C[-\pi, \pi]$, các hàm số

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\cos x, \frac{1}{\pi}\sin x, ..., \frac{1}{\pi}\cos nx, \frac{1}{\pi}\sin nx, ...$$

lập thành hệ trực chuẩn.

Bài 23.26* Chứng minh rằng trong không gian $L^2[0,1]$ các hàm khả tích bình phương (tức là gồm các hàm $f(x)$ với $\int_0^1 (f(x))^2 dx$ hội tụ) với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

các hàm số Rademacher

$$r_n(x) = \text{sign}(\sin 2^{n+1}\pi x),\ n = 0, 1, ...$$

lập thành hệ trực chuẩn.

Bài 23.27* Cho hệ véc tơ $e_1, ..., e_r$ độc lập tuyến tính trong không gian Oclit (hay unita) E và hai hệ véc tơ trực giao $f_1, ..., f_r$; $g_1, ..., g_r$ không chứa véc tơ 0, sao cho các véc tơ f_k và g_k biểu diễn tuyến tính qua $e_1, ..., e_k$ $(k = 1, ..., s)$. Chứng minh rằng $f_k = \alpha_k g_k$, trong đó $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, ..., s$.

Bài 23.28* Cho P_{n+1} là không gian các đa thức với hệ số thực bậc nhỏ hơn hoặc bằng n. Chứng minh rằng dãy đa thức $f_0(t), f_1(t), ..., f_n(t)$ nhận được từ $1, t, ..., t^n$ bằng phương pháp trực giao Gram-Schmidt chỉ sai khác các đa thức Legendre trong Bài 23.24 một nhân tử vô hướng. Hãy xác định các nhân tử đó.

Bài 23.29 Giả sử trong quá trình trực giao hóa theo phương pháp Gram-Schmidt, các véc tơ (độc lập tuyến tính) $u_1, ..., u_k$ được biến thành $v_1, ..., v_k$. Chứng minh rằng

$$|\ v_i\ | \leq |\ u_i\ |,\ i = 1, ..., k.$$

Bài 23.30* Chứng minh rằng tích phân $\int_{-1}^{1}[f(t)]^2dt$ đạt giá trị cực tiểu trên tập các đa thức bậc n và hệ số đầu bằng 1 khi và chỉ khi $f(t)=\frac{2^n}{C_{2n}^n}P_n(t)$, trong đó $P_n(t)$ là đa thức Legendre trong Bài 23.24.

Bài 23.31* Hai cơ sở $e_1,...e_n$ và $f_1,...,f_n$ của một không gian Ơclit (hay unita) được gọi là liên hợp với nhau, nếu

$$\langle e_i,f_j\rangle=\begin{cases}1 & \text{nếu } i=j,\\ 0 & \text{nếu } i\neq j.\end{cases}$$

Chứng minh rằng với mỗi cơ sở cho trước có thể tìm được một và chỉ một cơ sở liên hợp.

Bài 23.32* Cho S là ma trận chuyển từ cơ sở $e_1,...e_n$ sang cơ sở $e'_1,...,e'_n$. Kí hiệu các cơ sở liên hợp tương ứng là $f_1,...,f_n$ và $f'_1,...,f'_n$ (xem Bài 23.31). Tìm ma trận chuyển cơ sở T từ $f_1,...,f_n$ sang $f'_1,...,f'_n$ trong hai trường hợp sau:

a) E là không gian Ơclit,

b) E là không gian unita.

Bài 23.33* Chứng minh mở rộng sau của Định lí 23.9: nếu F là không gian con hữu hạn chiều của không gian Ơclit (unita) E thì $(F^\perp)^\perp=F$ và $E=F^\perp\oplus F$.

24 Góc, véc tơ chiếu và thể tích

Trong mục này ta chỉ xét không gian Ơclit E hữu hạn chiều.

Định nghĩa 24.1 *Góc* giữa hai véc tơ u và v trong không gian Ơclit E là góc α với $0\leq\alpha\leq\pi$ sao cho

$$\cos\alpha=\frac{\langle u,v\rangle}{|\,x\,|\cdot|\,y\,|}.$$

Đôi khi góc giữa u và v được kí hiệu là (u,v).

Định nghĩa trên xuất phát từ định lí cosin trong tam giác ở hình học sơ cấp. Nói cách khác, định nghĩa trên đảm bảo cho kết quả sau đây đúng

Bổ đề 24.2 (Định lí cosin) *Nếu α là góc giữa hai véc tơ u và v thì*

$$| u \pm v | = | u |^2 + | v |^2 \pm 2 | u | \cdot | v | \cdot \cos\alpha.$$

Ví dụ 24.1 (i) Hai véc tơ u, v trực giao với nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng $\pi/2$.

(ii) Cho hai vé tơ u, v thỏa mãn điều kiện $| u | = | v | = | u - v |$ (tức là ta có tam giác đều). Khi đó theo bổ đề trên, góc α giữa u và v thỏa mãn $\cos\alpha = 1/2$. Từ đó $\alpha = \pi/3$.

Định nghĩa 24.3 Cho V là không gian con của không gian Oclit E và $x \in E$. *Véc tơ chiếu* của x lên V là véc tơ $v \in V$ sao cho $x - v$ trực giao với V. Khi đó ta gọi véc tơ $x - v$ là *véc tơ độ cao* từ x tới V.

Bổ đề 24.4 *Véc tơ chiếu của một véc tơ x lên một không gian con V, và do đó cả véc tơ độ cao, được xác định duy nhất. Cụ thể, nếu $e_1, ..., e_m$ là một cơ sở trực chuẩn trong V thì véc tơ chiếu v của x được xác định như sau:*

$$v = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_m \rangle e_m.$$

Bổ đề sau đây nói rằng véc tơ độ cao có độ dài ngắn nhất trong tất cả các véc tơ nối x với V.

Bổ đề 24.5 *Cho v là véc tơ chiếu của véc tơ x lên E. Khi đó với mọi $u \in V$ ta có*

$$| x - u | \geq | x - v | .$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = v$.

Định nghĩa 24.6 Cho $v_1, ..., v_m \in E$. Ta gọi

$$G(v_1, ..., v_m) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \langle v_m, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$$

là *ma trận Gram*. Định thức của ma trận này được gọi là *Định thức Gram của $v_1, ..., v_m$*.

Ta có thể tính ma trận Gram như sau:

Bổ đề 24.7 *Giả sử $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{nj})$ là tọa độ của véc tơ v_j, $j = 1, ..., m$, theo một cơ sở trực chuẩn. Kí hiệu $A = (\alpha_{ij}) \in M(n, m; \mathbb{R})$. Khi đó*

$$G(v_1, v_2, ..., v_m) = A^T A.$$

Các tính chất của ma trận và định thức Gram là

Định lí 24.8 *Cho $v_1, ..., v_m \in E$. Khi đó*

(i) $G(v_1, ..., v_m)$ *là ma trận đối xứng.*

(ii) $v_1, ..., v_m$ *là hệ trực giao khi và chỉ khi* $G(v_1, ..., v_m)$ *là ma trận đường chéo. Nó là hệ trực chuẩn khi và chỉ khi* $G(v_1, ..., v_m)$ *là ma trận đơn vị.*

(iii) $| G(v_1, ..., v_m) | \geq 0$. *Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hệ véc tơ* $v_1, ..., v_m$ *là phụ thuộc tuyến tính.*

Định nghĩa 24.9 Cho $v_1, ..., v_m \in E$ là các véc tơ độc lập tuyến tính. Ta gọi tập hợp

$$P(v_1, ..., v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m; \quad 0 \leq \alpha_1, ..., \alpha_m \leq 1\}$$

là *hình hộp* (trong không gian con sinh bởi $v_1, ..., v_m$), còn

$$V(v_1, ..., v_m) = \sqrt{| G(v_1, ..., v_m) |}$$

là *thể tích* của $P(v_1, ..., v_m)$.

Trong một số trường hợp, ta có thể tính thể tích đơn giản hơn như sau:

Bổ đề 24.10 *a) Nếu* $v_1, ..., v_m$ *là một hệ trực giao thì*

$$V(v_1, ..., v_m) = | v_1 | \cdots | v_m | .$$

b) Nếu $m = \dim E$ *và* A *là ma trận của các tọa độ của* $v_1, ..., v_m$ *theo một cơ sở trực chuẩn, thì thể tích của hình hộp bằng giá trị tuyệt đối của định thức:*

$$V(v_1, ..., v_m) = | \operatorname{Det}(A) | .$$

Nếu $v_1, ..., v_m$ là các véc tơ độc lập tuyến tính, thì hình hộp $P(v_1, ..., v_{m-1})$ được xem là một mặt đáy của $P(v_1, ..., v_m)$. Nếu h là véc tơ độ cao của v_m tới không gian con sinh bởi $v_1, ..., v_{m-1}$, thì ta xem $| h |$ là chiều cao (hạ xuống đáy $P(v_1, ..., v_{m-1})$).

Định lí 24.11 *Thể tích của một hình hộp bằng thể tích đáy nhân với chiều cao hạ xuống đáy đó.*

Ví dụ 24.2 Trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với cơ sở tự nhiên, nếu $u = (\alpha_1, \alpha_2)$, $v = (\beta_1, \beta_2)$, thì

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \begin{pmatrix} \alpha_1^2+\alpha_2^2 & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 & \beta_1^2+\beta_2^2 \end{pmatrix}, \\ |\, G(u,v)\,| &= (\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2) - (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2 = (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2, \\ V(u,v) &= \sqrt{|\, G(u,v)\,|} = |\, \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\,| = \left|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{matrix}\right| . \end{aligned}$$

Trong khi đó đường thẳng chứa v có cơ sở trực chuẩn là $\frac{v}{|v|}$. Do đó véc tơ chiếu của u lên đường thẳng chứa v là véc tơ

$$\langle u, \frac{v}{|\,v\,|}\rangle \cdot \frac{v}{|\,v\,|} = \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\beta_1^2+\beta_2^2} v.$$

Suy ra chiều cao (của hình bình hành hạ lên đáy v) là

$$|\, h\,| = |\, u - \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\beta_1^2+\beta_2^2} v\,| = \frac{|\,\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\,|}{|\,v\,|}.$$

Vì vậy ta cũng có diện tích hình bình hành

$$V(u,v) = |\, h\,| \cdot |\, v\,| = |\, \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\,| .$$

Như vậy các cách tính trên đều cho cùng một kết quả.

Bài tập

Bài 24.1 Tính cosin của góc giữa hai véc tơ

a) $u = (-1, 2, -3)$ và $v = (2, 1, 4)$ trong $\mathbb{R}^3$,

b) $u = 3t - 1$ và $v = 2t^2 + t - 1$ trong không gian các đa thức P_3 được xác định trong Bài 23.24,

c) $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $v = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ trong không gian các ma trận $M(2;\mathbb{R})$ cho trong Bài 23.20.

Bài 24.2 Cho $x \in E$ và $V \subset E$ là không gian con của không gian Oclit (hay unita). Giả sử $e_1, ..., e_m$ là một cơ sở trực giao của V. Chứng tỏ rằng véc tơ chiếu của x lên V có thể tính bằng công thức sau:

$$y = \frac{\langle x, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 + \cdots + \frac{\langle x, e_m\rangle}{\langle e_m, e_m\rangle} e_m.$$

Bài 24.3 Tìm véc tơ chiếu và véc tơ độ cao của véc tơ x lên không gian con $V \subset \mathbb{R}^4$ sinh bởi các véc tơ v_1, v_2, v_3 trong các trường hợp sau:

a) $x = (2, -1, 3, -2)$, $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 4, 2)$, $v_3 = (-3, 4, 5, 8)$.

b) $x = (1, -3, 4, 5)$, $v_1 = (-1, 1, -1, 1)$, $v_2 = (-1, 3, 1, 1)$, $v_3 = (1, 4, 2, 3)$.

Bài 24.4 a) Hãy cho một chứng minh khác của Bổ đề 24.4 không dựa vào công thức tính tường minh véc tơ chiếu.

b) Chứng tỏ rằng các khái niệm véc tơ chiếu và véc tơ độ cao cũng có thể được định nghĩa trong không gian unita và khi đó Bổ đề 24.4 vẫn đúng.

Bài 24.5 Kí hiệu $\mathrm{pr}_V x$ là véc tơ chiếu của x lên không gian con $V \subseteq E$. Chứng minh rằng

a) Với mọi $x, y \in E$, $\mathrm{pr}_V(x + y) = \mathrm{pr}_V(x) + \mathrm{pr}_V(y)$,

b) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_V(\alpha x) = \alpha \,\mathrm{pr}_V(x)$.

Bài 24.6 Cho u, v là hai véc tơ khác 0 trong không gian Óclit. Chứng minh rằng

a) $u = \alpha v$ với $\alpha > 0$ khi và chỉ khi góc giữa u và v bằng 0,

b) $u = \alpha v$ với $\alpha < 0$ khi và chỉ khi góc giữa u và v bằng π.

Bài 24.7* Cho V là không gian con khác 0 của không gian Óclit E và $x \in E$. Chứng minh rằng góc bé nhất giữa các véc tơ $v \in V$ và x chính là góc giữa véc tơ chiếu y của x và x. Hơn nữa với mọi $v \in V$, $\cos(v, x) = \cos(y, x)$ khi và chỉ khi $v = \alpha y$, $\alpha > 0$.

Bài 24.8 Chứng tỏ rằng định thức Gram không phụ thuộc vào thứ tự các phần tử của hệ, nghĩa là, nếu σ là một hoán vị của $\{1, ..., n\}$, thì

$$G(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = G(v_1, ..., v_n).$$

Bài 24.9* Cho E là không gian unita. Một cách tương tự có thể định nghĩa ma trận và định thức Gram (phức). Chứng minh rằng định thức Gram (phức) là một số thực không âm, và bằng 0 khi và chỉ khi hệ đã cho phụ thuộc tuyến tính (so sánh với Định lí 24.8).

Bài 24.10 Chứng minh rằng trong không gian Óclit (hay unita)

$$| G(v_1, ..., v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, ..., v_n) | = | \alpha |^2 G(v_1, ..., v_n).$$

Bài 24.11* Chứng minh rằng trong không gian Oclit (hay unita)

$$G(v_1, ..., v_n) \leq | v_1 |^2 \cdots | v_n |^2 .$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hoặc các véc tơ này là hệ trực giao, hoặc một véc tơ bằng 0.

Bài 24.12* Chứng minh rằng định thức Gram của hệ véc tơ $u_1, ..., u_m$ không thay đổi khi ta áp dụng quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt, tức là nếu $v_1, ..., v_m$ là hệ véc tơ trực giao nhận được thì

$$| G(u_1, ..., u_m) | = | G(v_1, ..., v_m) | = | v_1 |^2 \cdots | v_m |^2 .$$

Bài 24.13* Chứng minh rằng nếu trong quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt các véc tơ độc lập tuyến tính $u_1, ..., u_n$ được chuyển thành hệ véc tơ $v_1, ..., v_n$, thì

$$| v_k |^2 = \frac{| G(u_1, ..., u_k) |}{| G(u_1, ..., u_{k-1}) |}, \quad k = 1, ..., n,$$

trong đó ta qui ước định thức Gram của tập rỗng bằng 1.

Bài 24.14* Cho $D = | a_{ij} |$ là định thức cấp n trên trường số phức. Chứng minh bất đẳng thức Adamar sau đây

$$| D |^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 .$$

Khi nào xảy ra dấu bằng?

Bài 24.15* Chứng minh mệnh đề tổng quát của Bài 24.11 phát biểu như sau: trong không gian Oclit hoặc unita

$$| G(u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m) | \leq | G(u_1, ..., u_n) | \cdot | G(v_1, ..., v_m) | .$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi một trong hai hệ $u_1, ..., u_n$ và $v_1, ..., v_m$ phụ thuộc tuyến tính, hoặc hai hệ này trực giao với nhau.

Bài 24.16* Cho $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m$ là các véc tơ độc lập tuyến tính. Chứng minh rằng

$$V(u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m) \leq V(u_1, ..., u_n) V(v_1, ..., v_m).$$

25 Toán tử trực giao và toán tử unita

Cho E và F cùng là hai không gian Oclit hoặc unita. Kí hiệu K là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ trong trường hợp tương ứng.

Định nghĩa 25.1 Ta nói ánh xạ tuyến tính $\varphi : E \to F$ là ánh xạ *đẳng cự* (hay *trực giao*) nếu

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

với mọi $x, y \in E$. Nếu φ là một đẳng cấu đẳng cự, thì ta nói E và F *đẳng cự* với nhau.

Ví dụ 25.1 (a) Ánh xạ đồng nhất là ánh xạ đẳng cự. Một cách tổng quát hơn, nếu $E \subseteq F$ thì ánh xạ nhúng $\iota : E \hookrightarrow F$ là ánh xạ đẳng cự.

(b) Phép quay xung quanh gốc tọa độ một góc α trên mặt phẳng thực có thể được xem là ánh xạ từ $\mathbb{R}^2$ vào chính nó và được xác định như sau:

$$\varphi(x, y) = (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha).$$

Đây là một ánh xạ đẳng cự.

(c) Hợp của hai ánh xạ đẳng cự là một ánh xạ đẳng cự. Thật vậy, nếu $\varphi : E_1 \to E_2$ và $\psi : E_2 \to E_3$ là các ánh xạ đẳng cự, thì với mọi $x, y \in E_1$, ta có

$$\langle (\psi\varphi)(x), (\psi\varphi)(x) \rangle = \langle \psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(x)) \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(d) Ánh xạ nghịch đảo của một đẳng cấu đẳng cự là một đẳng cự. Thật vậy, nếu $\varphi : E \to F$ là một đẳng cấu đẳng cự, thì với mọi $x, y \in F$, ta có $x = \varphi(x')$ và $y = \varphi(y')$ trong đó $x', y' \in E$. Khi đó $x' = \varphi^{-1}(x)$ và $y' = \varphi^{-1}(y)$. Do đó

$$\langle \varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \rangle = \langle x', y' \rangle = \langle \varphi(x'), \varphi(y') \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Rõ ràng một ánh xạ đẳng cự là một đơn cấu. Ta có thể kiểm tra một ánh xạ đẳng cự bằng các cách khác nhau, dựa vào kết quả sau:

Định lí 25.2 *Cho $\varphi : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính. Các điều kiện sau tương đương*

(i) φ *là đẳng cự.*

(ii) $|\varphi(x)| = |x|$ *với mọi* $x \in E$.

(ii') φ *biến mọi véc tơ định chuẩn thành véc tơ định chuẩn.*

(iii) φ *biến một cơ sở trực chuẩn thành một hệ trực chuẩn.*

(iii) φ *biến mọi cơ sở trực chuẩn thành hệ trực chuẩn.*

Hệ quả 25.3 *Cho* $\varphi : E \to F$ *là ánh xạ đẳng cự của các không gian Ơclit. Khi đó với mọi* $x, y \in E$, *góc giữa* $\varphi(x)$ *và* $\varphi(y)$ *bằng góc giữa* x *và* y.

Hệ quả 25.4 *Hai không gian Ơclit (hay unita) hữu hạn chiều đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều.*

Định nghĩa 25.5 Ta gọi toán tử tuyến tính φ của không gian Ơclit (t.ư. unita) E là toán tử *trực giao* (t.ư. *unita*), nếu nó là ánh xạ đẳng cự.

Theo định lí về hạng ánh xạ, ta dễ dàng suy ra nếu không gian E có chiều hữu hạn thì các toán tử trực giao (hay unita) là các đẳng cấu đẳng cự. Điều này không đúng nếu chiều không gian vô hạn.

Ví dụ 25.2 (a) Xét không gian Ơclit l_2 các chuỗi số thực hội tụ bình phương. Khi đó

$$\varphi : \ l_2 \to l_2 : \quad (x_1, x_2, ...) \mapsto (0, x_1, x_2, ...)$$

là ánh xạ đẳng cự, nhưng không là đẳng cấu.

(b) Nếu π là một hoán vị của $\{1, ..., n\}$, thì $\varphi(x_1, ..., x_n) = (x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)})$ là toán tử trực giao khi xét như toán tử tuyến tính của $\mathbb{R}^n$, và là toán tử unita, khi xét như toán tử tuyến tính của $\mathbb{C}^n$.

Định lí 25.6 *Cho* E *là không gian Ơclit (hay unita) chiều* n *với cơ sở trực chuẩn* S. *Giả sử* A *là ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính* φ *theo cơ sở* S. *Kí hiệu* I *là ma trận đơn vị cấp* n. *Khi đó*

(i) φ *là toán tử trực giao khi và chỉ khi* A *là ma trận trực giao, tức là* $A^T A = AA^T = I$.

(ii) φ *là toán tử unita khi và chỉ khi* A *là ma trận unita, tức là* $A^* A = AA^* = I$.

Ví dụ 25.3 Các ma trận

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

là những ma trận trực giao. Các ma trận

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

là unita.

Các ma trận trực giao và unita có tính chất tương đối giống nhau. Cụ thể:

Mệnh đề 25.7 *(i) Ma trận đơn vị là ma trận trực giao.*

(ii) Mọi ma trận trực giao là ma trận unita.

(iii) Tích của hai ma trận trực giao (t.ư. unita) là trực giao (t.ư. unita).

(iv) Ma trận nghịch đảo của một ma trận trực giao (t.ư. unita) A cũng là ma trận trực giao (t.ư. unita). Hơn nữa $A^{-1} = A^T$ nếu A là ma trận trực giao, và $A^{-1} = A^*$, nếu A là unita.

(v) Định thức của ma trận trực giao bằng ± 1, còn định thức của ma trận unita có modun bằng 1.

Bây giờ ta chỉ xét không gian hữu hạn chiều.

Nhờ tính chất (ii) ở mệnh đề trên ta thấy nhiều kết quả về toán tử unita cũng đúng cho toán tử trực giao. Nói riêng, tập các toán tử (t. ư. ma trận cấp n) trực giao lập thành một nhóm được gọi là *nhóm các biến đổi trực giao* (t.ư. nhóm trực giao). Chúng được kí hiệu là $O(E)$ và $O(n)$. Tập các toán tử (t. ư. ma trận cấp n) unita lập thành một nhóm được gọi là *nhóm các biến đổi unita* (t.ư. nhóm unita). Chúng được kí hiệu là $U(E)$ và $U(n)$.

Hai kết quả sau đây là then chốt để chứng minh sự tồn tại dạng chuẩn tắc của toán tử trực giao hay unita.

Bổ đề 25.8 *Cho F là không gian con của không gian Ơclit (unita) hữu hạn chiều E. Nếu F là không gian con bất biến của một toán tử trực giao (unita) φ thì phần bù trực giao $F^\perp$ cũng là không gian con bất biến.*

Bổ đề 25.9 *(i) Mọi giá trị riêng thực của toán tử trực giao đều bằng* 1 *hoặc* -1.

(ii) Mọi giá trị riêng của toán tử unita đều có môđun bằng 1.

Dạng chuẩn tắc của toán tử trực giao (unita) được cho bởi

Định lí 25.10 *(i) Cho φ là một toán tử trực giao của không gian Oclit hữu hạn chiều E. Giả sử đa thức đặc trưng*

$$f_\varphi(t) = (-1)^n(t-1)^p(t+1)^q(t-c_1)(t-\overline{c_1})\cdots(t-c_s)(t-\overline{c_s}),$$

trong đó $c_j = \cos\alpha_j + i\sin\alpha_j$ với $\alpha_j \neq k\pi$. Khi đó tồn tại cơ sở trực chuẩn S của E sao cho ma trận biểu diễn của φ theo S là ma trận đường chéo khối:

$$\operatorname{diag}(I_p, -I_q, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_s & \sin\alpha_s \\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s \end{pmatrix}),$$

trong đó I_p, I_q là các ma trận đơn vị cấp p và q.

(ii) Cho φ là một toán tử unita của không gian unita hữu hạn chiều E. Giả sử đa thức đặc trưng

$$f_\varphi(t) = (-1)^n(t-c_1)\cdots(t-c_n).$$

Khi đó tồn tại cơ sở trực chuẩn S của E sao cho ma trận biểu diễn của φ theo S là ma trận đường chéo

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

Dạng ma trận

$$\operatorname{diag}(I_p, -I_q, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_s & \sin\alpha_s \\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s \end{pmatrix})$$

trong định lí trên tương ứng được gọi là *dạng chuẩn tắc trực giao*. Hai ma trận thực A và B (t.ư. phức) được gọi là *tương đương trực giao (t.ư. unita)*, nếu tồn tại ma trận trực giao (t.ư. unita) P sao cho $A = P^{-1}BP$.

Dạng ma trận của kết quả trên là

Định lí 25.11 *(i) Mọi ma trận trực giao đều tương đương trực giao với dạng chuẩn tắc trực giao của nó.*

(ii) Mọi ma trận unita đều tương đương unita với một ma trận đường chéo với các phần tử có môđun bằng 1.

Để tìm dạng chuẩn tắc của toán tử (hay ma trận) unita, ta thực hiện các bước sau

Thuật toán tìm dạng chuẩn tắc của toán tử và ma trận unita

1. Tìm ma trận biểu diễn A của toán tử φ đã cho theo một cơ sở trực chuẩn S.

   Bây giờ ta đồng nhất các véc tơ với các véc tơ cột tọa độ của nó theo S.

2. Tìm các giá trị riêng khác nhau $c_1, ..., c_p$ của đa thức đặc trưng $f_A(t)$. Giả sử các số bội tương ứng là $m_1, ..., m_p > 0$. Khi đó ma trận dạng chuẩn tắc của φ (hay A) là:

$$\text{diag}(c_1, ..., c_1, c_2, ..., c_2, ..., c_p, ..., c_p),$$

   trong đó c_i xuất hiện m_i lần.

   Để tìm ma trận chuyển cơ sở ta cần làm tiếp các bước sau:

3. Với mỗi i giải hệ phương trình

$$(A - c_i I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

   và nếu cần kết hợp với phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt, ta tìm được m_i nghiệm cơ sở sao cho chúng tạo thành một hệ véc tơ trực chuẩn $e_{i1}, ..., e_{im_i}$.

4. Gọi P là ma trận gồm các cột là các véc tơ

$$e_{11}, ..., e_{1m_1}, ..., e_{p1}, ..., e_{pm_p}.$$

   Theo cơ sở này ma trận biểu diễn của φ là ma trận nêu ở bước 2 và P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang cơ sở mới này.

Đối với toán tử trực giao về cơ bản các bước cũng như vậy:

Thuật toán tìm dạng chuẩn tắc của toán tử và ma trận trực giao

1. Tìm ma trận biểu diễn A của toán tử φ đã cho theo một cơ sở trực chuẩn S. Bây giờ ta đồng nhất các véc tơ với các véc tơ cột tọa độ của nó theo S.

2. Tìm các giá trị riêng khác nhau $1, -1, c_1, ..., c_s$ của đa thức đặc trưng $f_A(t)$, trong đó số bội của 1 là $p \geq 0$, của -1 là $q \geq 0$ và của $c_1, ..., c_s$ tương ứng là $m_1, ..., m_p > 0$, sao cho không có c_i nào là số phức liên hợp của c_j (nếu $p = 0$ thì có nghĩa là 1 không là giá trị riêng, cũng tương tự với -1). Viết c_j dưới dạng $c_j = \cos\alpha_j + i\sin\alpha_j$. Khi đó ma trận dạng chuẩn tắc của φ hay A là:

$$\operatorname{diag}\left(1, ..., 1, -1, ..., -1, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. ..., \begin{pmatrix} \cos\alpha_s & \sin\alpha_s \\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \cos\alpha_s & \sin\alpha_s \\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s \end{pmatrix}\right),$$

trong đó 1 xuất hiện p lần, -1 xuất hiện q lần, còn $\begin{pmatrix} \cos\alpha_j & \sin\alpha_j \\ -\sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix}$ xuất hiện m_j lần.

Để tìm ma trận chuyển cơ sở ta cần làm tiếp các bước sau:

3. Giải hệ phương trình

$$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

và nếu cần kết hợp với phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt, tương ứng ta tìm được p nghiệm cơ sở sao cho chúng tạo thành một hệ véc tơ trực chuẩn $e_1, ..., e_p$.

Tương tự, giải hệ phương trình

$$(A + I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

và nếu cần kết hợp với phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt, tương ứng ta tìm được q nghiệm cơ sở sao cho chúng tạo thành một hệ véc tơ trực chuẩn $e_{-1}, ..., e_{-q}$.

4. Với mỗi i giải hệ phương trình

$$(A - c_i I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

và nếu cần kết hợp với phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt, ta tìm được m_i nghiệm (phức) cơ sở sao cho chúng tạo thành một hệ véc tơ trực giao $f_{i1}, ..., f_{im_i}$.

5. Với mỗi véc tơ phức f_{ij}, ta viết nó dưới dạng $f_{ij} = u_{ij} + iv_{ij}$, trong đó u_{ij}, v_{ij} đều là các véc tơ cột tọa độ thực và khác 0. Đặt

$$e_{ij} = \frac{u_{ij}}{|\, u_{ij}\,|}, \quad e^*_{ij} = \frac{v_{ij}}{|\, v_{ij}\,|}.$$

6. Gọi P là ma trận gồm các cột là các véc tơ

$$e_1, ..., e_p, e_{-1}, ..., e_{-q}, e_{11}, e^*_{11}, ..., e_{1m_1}, e^*_{1m_1}, ..., e_{p1}, e^*_{p1}, ..., e_{pm_p}, e^*_{pm_p}.$$

Theo cơ sở này ma trận biểu diễn của φ là ma trận dạng chuẩn tắc nêu ở bước 2 và P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang cơ sở mới này.

Chú ý rằng trong hai thuật toán trên mọi việc có thể giải được, trừ việc tìm nghiệm của đa thức ở bước thứ 1!

Bài tập

Bài 25.1 Cho F là không gian con của không gian Ơclit (unita) E. Chứng tỏ rằng hạn chế của một một ánh xạ đẳng cự từ E vào V trên F lại là một ánh xạ đẳng cự.

Bài 25.2 Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại của Hệ quả 25.3 không đúng.

Bài 25.3 Cho E và F là hai không gian Ơclit (hoặc cùng là unita) hữu hạn chiều. Tìm điều kiện cần và đủ để có ánh xạ đẳng cự từ E vào F.

Bài 25.4 Chứng minh rằng ma trận chuyển cơ sở của các cơ sở trực chuẩn trong một không gian Óclit (hay unita) là một ma trận trực giao (t.ư. unita).

Bài 25.5 Chứng minh rằng mọi ma trận trực giao (t.ư. unita) là ma trận biểu diễn của một toán tử trực giao (t.ư. unita) theo một cơ sở trực chuẩn.

Bài 25.6 Cho v_1, v_2 và u_1, u_2 là hai cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$. Giả sử a, b, c, d là các số thực sao cho

$$u_1 = av_1 + bv_2,$$
$$u_2 = cv_1 + dv_2.$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$, $a^2 = d^2$ và $c^2 = b^2$.

Bài 25.7* Chứng minh rằng một ánh xạ từ E vào F của các không gian Óclit (unita) là đẳng cự nếu nó bảo toàn tích vô hướng.

Bài 25.8 Tìm ví dụ chứng tỏ rằng tồn tại ánh xạ từ không gian Óclit E vào chính nó và bảo toàn độ dài véc tơ, nhưng không là ánh xạ đẳng cự.

Bài 25.9 Cho $e_1, ..., e_n$ là một cơ sở của không gian Óclit (unita) E và $\varphi : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính của các không gian Óclit (unita). Chứng tỏ rằng φ là ánh xạ đẳng cự khi và chỉ khi với mọi i, j ta có $\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$.

Bài 25.10 Giả sử tích vô hướng của không gian Óclit (unita) E hữu hạn chiều được cho bởi một ma trận Gram G theo một cơ sở $e_1, ..., e_n$ nào đó (tức là cho biết $\langle e_i, e_j \rangle = G_{ij}$). Cho φ là toán tử tuyến tính của E với ma trận biểu diễn A theo cơ sở đã cho. Tìm điều kiện cần và đủ của A để φ là toán tử trực giao (unita).

Bài 25.11* Cho $v_1, ..., v_k$ và $u_1, ..., u_k$ là hai hệ véc tơ của một không gian Óclit E (t.ư. unita). Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để có một toán tử trực giao (t.ư. unita) φ biến v_i thành u_i, $i = 1, ..., k$ là các ma trận Gram tương ứng của hai hệ véc tơ bằng nhau.

Bài 25.12* Cho $F \subseteq E$ là không gian con hữu hạn chiều của không gian Óclit (unita) E. Chứng minh rằng mọi ánh xạ đẳng cự $\varphi : F \to E$ đều có thể mở rộng được thành đẳng cấu đẳng cự từ E vào E.

Bài 25.13 Cho A là ma trận vuông. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương:

a) A là ma trận trực giao (unita),

b) Các véc tơ cột là một hệ trực chuẩn,

c) Các véc tơ dòng là một hệ trực chuẩn.

Bài 25.14 Cho φ là toán tử unita và $\alpha \neq \beta$ là hai giá trị riêng của nó. Cho u là véc tơ riêng ứng với α và v là véc tơ riêng ứng với β. Chứng minh rằng u trực giao với v.

Bài 25.15* Cho φ là toán tử trực giao với ma trận biểu diễn A theo một cơ sở nào đó. Chứng minh rằng u trực giao với v nếu:

a) u là véc tơ riêng ứng với 1 và v là véc tơ riêng ứng với -1.

b) u là véc tơ riêng ứng với ± 1 và v là một trong hai véc tơ v_1 hoặc v_2 sao cho $v_1 + iv_2$ là nghiệm phức của hệ phương trình $(A - cI)X = 0$, trong đó $X \in \mathbb{C}^n$ là véc tơ cột tọa độ và $c \neq \pm 1$ là một nghiệm phức của đa thức đặc trưng.

c) u là một trong hai véc tơ u_1 hoặc u_2 sao cho $u_1 + iu_2$ là nghiệm phức của hệ phương trình $(A - c_1 I)X = 0$; còn v là một trong hai véc tơ v_1 hoặc v_2 sao cho $v_1 + iv_2$ là nghiệm phức của hệ phương trình $(A - c_2 I)X = 0$, trong đó $c_1 \neq c_2, \overline{c_2}$ là hai nghiệm không thực của đa thức đặc trưng.

Bài 25.16 Cho A là ma trận trực giao. Giả sử đa thức đặc trưng $f_A(t) = (t+1)^m g(t)$ với $g(t)$ không chia hết cho $t+1$. Chứng minh rằng $|A| = 1$ khi và chỉ khi $m = 0$ hay là một số chẵn.

Bài 25.17 Chứng tỏ rằng Bổ đề 25.8 không đúng nếu không gian có chiều vô hạn.

Bài 25.18 Chứng minh rằng mọi toán tử unita của không gian unita chiều n luôn có một không gian con bất biến chiều m, trong đó $m \leq n$ là một số tùy ý cho trước.

Bài 25.19* Chứng minh rằng đối với mọi toán tử tuyến tính của không gian unita đều tìm được cơ sở trực chuẩn sao cho tại đó ma trận biểu diễn của nó là ma trận tam giác (Định lí Schur).

Bài 25.20* Chứng minh rằng hai toán tử unita giao hoán với nhau có chung một cơ sở trực chuẩn là các véc tơ riêng.

Bài 25.21* Chứng minh rằng đối với hai toán tử trực giao giao hoán với nhau có thể tìm được một cơ sở trực chuẩn để tại đó ma trận biểu diễn của chúng có dạng chuẩn tắc.

Bài 25.22* Chứng minh rằng:

a) Tập các ma trận vuông $M(n;\mathbb{C})$ với tích vô hướng $\langle A, B\rangle = \sum a_{ij}\overline{b_{ij}}$ lập thành không gian unita.

b) Phép nhân bên trái $A \mapsto AU$ là toán tử unita khi và chỉ khi U là ma trận unita. Tương tự với phép nhân bên phải.

Bài 25.23 Biết dạng chuẩn tắc của ma trận trực giao A, hãy tìm dạng chuẩn tắc của A^k.

Bài 25.24 Cho φ là toán tử trực giao của $\mathbb{R}^3$ với ma trận biểu diễn sau (theo cơ sở trực chuẩn tự nhiên):

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy viết ma trận dạng chuẩn tắc của φ và tìm một cơ sở trực chuẩn để φ có dạng chuẩn tắc đó.

Bài 25.25 Cho ma trận trực giao

$$A = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 7/9 & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & -8/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận dạng chuẩn tắc B của ma trận này và ma trận trực giao P sao cho $B = P^{-1}AP$.

Bài 25.26 Cho ma trận trực giao

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4+\frac{5\sqrt{2}}{2} & -4-\frac{7\sqrt{2}}{2} & 2-2\sqrt{2} \\ -4-\frac{\sqrt{2}}{2} & -4+\frac{5\sqrt{2}}{2} & 2+4\sqrt{2} \\ 2+4\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & -1+4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận dạng chuẩn tắc B của ma trận này và ma trận trực giao P sao cho $B = P^{-1}AP$.

Bài 25.27 Cho ma trận unita

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & (2+\sqrt{3})i & (-2+\sqrt{3})i \\ -1 & 1 & (2-\sqrt{3})i & -(2+\sqrt{3})i \\ (2+\sqrt{3})i & (2-\sqrt{3})i & 1 & 1 \\ (-2+\sqrt{3})i & -(2+\sqrt{3})i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận dạng chuẩn tắc B của ma trận này và ma trận unita P sao cho $B = P^{-1}AP$.

26 Toán tử liên hợp và toán tử tự liên hợp

Ta luôn xem E là không gian Oclit hoặc unita hữu hạn chiều. Tương ứng trường K là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$. Nhắc lại rằng một *dạng tuyến tính* trên E là một ánh xạ tuyến tính từ E vào K.

Bổ đề 26.1 *Cho φ là một dạng tuyến tính trên E. Khi đó tồn tại duy nhất một véc tơ $u \in E$ sao cho*

$$\varphi(v) = \langle v, u\rangle,$$

với mọi $v \in E$.

Định lí 26.2 *Cho φ là toán tử tuyến tính trên E. Khi đó tồn tại duy nhất một toán tử tuyến tính được kí hiệu là φ^* thỏa mãn tính chất sau:*

$$\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle,$$

với mọi $x, y \in E$. Hơn nữa, nếu φ có ma trận biểu diễn A theo một cơ sở trực chuẩn S, thì ma trận biểu diễn của φ^* theo S là A^*.

Chú ý 26.3 Nếu E là không gian Oclit, tức là $K = \mathbb{R}$, thì $A^* = A^T$. Vì lẽ đó trong trường hợp này φ^* hay được kí hiệu là φ^T.

Định nghĩa 26.4 Ta gọi toán tử tuyến tính φ^* trong định lí trên là *toán tử liên hợp* của φ.

Ví dụ 26.1 (i) Cho φ là toán tử tuyến tính của $\mathbb{R}^3$ cho bởi

$$\varphi(x, y, z) = (3x + y - z, x + 2y + z, -4x - y + 3z).$$

Khi đó theo cơ sở tự nhiên, φ có ma trận biểu diễn:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Do đó theo cơ sở này φ^T có ma trận biểu diễn là A^T và viết tọa độ véc tơ theo cột ta có:

$$\varphi^T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y-4z \\ x+2y-z \\ -x+y+3z \end{pmatrix}$$

(ii) Tương tự, nếu toán tử tuyến tính φ của $\mathbb{C}^3$ là

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) = \; & ((2-i)x + (1+2i)y - z, \\ & (5+3i)x - (2+7i)y - (1-i)z, 3x + iy - iz), \end{aligned}$$

thì

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 1+2i & -1 \\ 5+3i & -2-7i & -1+i \\ 3 & i & -i \end{pmatrix},$$

và

$$\begin{aligned} \varphi^*(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2+i & 5-3i & 3 \\ 1-2i & -2+7i & -i \\ -1 & -1-i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2+i)x + (5-3i)y + 3z \\ (1-2i)x + (-2+7i)y - iz \\ -x - (1+i)y + iz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mệnh đề 26.5 *Các tính chất của toán tử liên hợp*

$$\begin{aligned} (\varphi^*)^* &= \varphi, \\ (\varphi+\psi)^* &= \varphi^* + \psi^*, \\ (\alpha\varphi)^* &= \bar{\alpha}\varphi^*, \quad (\alpha \in K), \\ (\varphi\psi)^* &= \psi^*\varphi^*, \\ (\varphi^*)^{-1} &= (\varphi^{-1})^* \quad \textit{(nếu } \varphi \textit{ khả nghịch).} \end{aligned}$$

Định nghĩa 26.6 (i) Ta gọi toán tử tuyến tính φ của không gian Oclit là *toán tử đối xứng* nếu $\varphi^T = \varphi$.

(ii) Ta gọi toán tử tuyến tính φ của không gian unita là *toán tử Hermite* nếu $\varphi^* = \varphi$.

Toán tử đối xứng và toán tử Hermite được gọi chung là *toán tử tự liên hợp.*

Bổ đề 26.7 *Cho A là ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính φ theo cơ sở trực chuẩn S. Khi đó φ là tự liên hợp nếu và chỉ nếu $A^* = A$.*

Bổ đề 26.8 *Các giá trị riêng của một toán tử tự liên hợp đều là các số thực.*

Bổ đề 26.9 *Cho φ là toán tử tự liên hợp và $V \subseteq E$ là không gian con bất biến của φ. Khi đó phần bù trực giao $V^\perp$ cũng là không gian con bất biến của φ.*

Định lí 26.10 (Định lí phổ)*: Cho φ là toán tử tự liên hợp với đa thức đặc trưng*

$$f_\varphi(t) = (-1)^n(t - c_1)\cdots(t - c_n),$$

trong đó $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại cơ sở trực chuẩn S của E sao cho ma trận biểu diễn của φ là ma trận đường chéo $\mathrm{diag}(c_1, ..., c_n)$.

Hệ quả 26.11 *(i) Mọi ma trận đối xứng thực đều tương đương trực giao với một ma trận đường chéo.*

(ii) Mọi ma trận Hermite đều tương đương unita với một ma trận đường chéo.

Ví dụ 26.2 Cho $A \in M(m, n; \mathbb{R})$. Khi đó ma trận AA^T chéo hóa được. Thật vậy, vì $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, nên AA^T là ma trận vuông cấp m, đối xứng thực. Theo hệ quả trên nó đồng dạng với ma trận đường chéo, tức là chéo hóa được.

Để tìm ma trận dạng chuẩn tắc của toán tử tự liên hợp (hay ma trận đối xứng thực, ma trận Hermite), ta cũng **thực hiện tương tự như thuật toán tìm ma trận dạng chuẩn tắc của toán tử unita**. Chỉ có một lưu ý là trong trường hợp này, mọi nghiệm của đa thức đặc trưng đều là số thực.

Bài tập

Bài 26.1 Cho e_1, e_2 là cơ sở trực chuẩn của một không gian Oclit và $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 - e_2$. Toán tử tuyến tính φ có ma trận biểu diễn theo cơ sở f_1, f_2 là $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm φ^T.

Bài 26.2 Cho ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính φ của $\mathbb{R}^3$ theo cơ sở

$$f_1 = (1, 2, 1),\ f_2 = (1, 1, 2),\ f_3 = (1, 1, 0)$$

là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận biểu diễn của φ^T theo cơ sở này.

Bài 26.3 Tìm toán tử liên hợp φ^T của toán tử φ của $\mathbb{R}^3$, biết rằng φ biến hệ véc tơ $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$ tương ứng thành hệ véc tơ $v_1 = (1,-2,1)$, $v_2 = (-1,3,-2)$, $v_3 = (2,1,0)$.

Bài 26.4 Cho không gian Óclit $E = L_1 \oplus L_2$, φ là phép chiếu của E lên L_1 dọc theo L_2, tức là $\varphi(v_1 + v_2) = v_1$ với mọi $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$. Chứng minh rằng $E = L_1^\perp \oplus L_2^\perp$ và φ^T là phép chiếu của E lên $L_2^\perp$ dọc theo $L_1^\perp$.

Bài 26.5 Chứng tỏ rằng nếu x đồng thời là véc tơ riêng của các toán tử tuyến tính φ và φ^* của không gian unita ứng với giá trị riêng α và β, thì $\beta = \bar{\alpha}$.

Bài 26.6 Cho φ là toán tử tuyến tính của một không gian unita. Chứng tỏ rằng nếu $\alpha_1, ..., \alpha_m$ là các giá trị riêng của φ, thì $\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_m}$ là các giá trị riêng của φ^*.

Bài 26.7 Cho φ là toán tử tuyến tính của một không gian unita. Chứng tỏ rằng các hệ số của đa thức cực tiểu $g_{\varphi^*}(t)$ là các số phức liên hợp của các hệ số của đa thức cực tiểu $g_\varphi(t)$.

Bài 26.8 Cho φ là toán tử tuyến tính của không gian unita có ma trận biểu diễn A theo cơ sở $e_1, ..., e_n$, còn B là ma trận biểu diễn của φ^* theo cơ sở $f_1, ..., f_n$ liên hợp với $e_1, ..., e_n$ (xem Bài 23.31). Chứng minh rằng $B = A^*$.

Bài 26.9 Cho $f(t)$ là đa thức với hệ số thực. Chứng minh rằng nếu φ là toán tử đối xứng (t.ư. Hermite) thì $f(\varphi)$ cũng có tính chất ấy.

Bài 26.10 Chứng minh rằng các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau của toán tử tự liên hợp vuông góc với nhau.

Bài 26.11 Cho $E = L_1 \oplus L_2$ là phân tích thành tổng trực tiếp của một không gian Óclit hay unita. Chứng minh rằng phép chiếu φ của E lên L_1 dọc L_2 là toán tử tự liên hợp khi và chỉ khi L_1 và L_2 trực giao với nhau.

Bài 26.12 Cho G là ma trận Gram của một cơ sở S của không gian E. Sử dụng G, tìm điều kiện cần và đủ để một toán tử tuyến tính φ có ma trận biểu diễn A theo cơ sở S là

a) Toán tử đối xứng.

b) Toán tử Hermite.

Bài 26.13 Cho G là ma trận Gram của một cơ sở S của không gian Oclit hay unita E và φ là toán tử tuyến tính có ma trận biểu diễn A. Sử dụng G, tìm ma trận biểu diễn B theo cơ sở S của φ^T.

Bài 26.14 Tìm cơ sở trực chuẩn để toán tử đối xứng φ cho bởi ma trận sau đây theo cơ sở tự nhiên có ma trận biểu diễn là dạng đường chéo.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 26.15 Tìm ma trận đường chéo B và ma trận unita P để ma trận A sau đây đưa về B, tức là $P^{-1}AP = B$:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 3 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 26.16* Chứng minh rằng hai toán tử tự liên hợp φ và ψ có chung một cơ sở trực chuẩn gồm các véc tơ riêng của cả hai ánh xạ khi và chỉ khi chúng giao hoán với nhau.

Bài 26.17 Một toán tử tự liên hợp φ được gọi là *xác định dương* (t.ư. *xác định không âm*), nếu $\langle \varphi(x), x\rangle > 0$ với mọi $x \neq 0$ (t.ư. $\langle \varphi(x), x\rangle \geq 0$ với mọi $x \in E$). Chứng minh rằng φ là xác định dương (t.ư. xác định không âm) khi và chỉ khi các giá trị riêng của nó dương (t.ư. không âm).

Bài 26.18* Cho φ, ψ là hai toán tử tự liên hợp xác định dương, χ là toán tử unita. Giả sử $\varphi = \chi\psi$ hoặc $\varphi = \psi\chi$. Chứng minh rằng $\varphi = \psi$ và χ là toán tử đồng nhất.

Bài 26.19* a) Chứng minh rằng mọi toán tử tuyến tính không suy biến φ của không gian Oclit đều có thể phân tích thành tích $\varphi = \psi_1\chi_1 = \chi_2\psi_2$, trong đó ψ_1, ψ_2 đều là các toán tử đối xứng xác định dương, còn χ_1, χ_2 là các toán tử trực giao. Hơn nữa các phân tích này là duy nhất.

b) Tương tự, mọi toán tử tuyến tính không suy biến φ của không gian unita đều có thể phân tích thành tích $\varphi = \psi_1\chi_1 = \chi_2\psi_2$, trong đó ψ_1, ψ_2 đều là các toán tử Hermite xác định dương, còn χ_1, χ_2 là các toán tử unita. Hơn nữa các phân tích này là duy nhất.

Bài 26.20 Chứng tỏ rằng kết quả tương tự của Bài 26.19 cũng đúng đối với toán tử suy biến (trừ tính duy nhất), cụ thể: mọi toán tử tuyến tính không suy biến φ của không gian unita đều có thể phân tích thành tích $\varphi = \psi_1\chi_1 = \chi_2\psi_2$, trong đó ψ_1, ψ_2 đều là các toán tử Hermite xác định không âm, còn χ_1, χ_2 là các toán tử unita. Hơn nữa ψ_1, ψ_2 được xác định duy nhất.

Bài 26.21 Chứng minh rằng một toán tử tự liên hợp là xác định dương khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của nó có tất cả các hệ số thực khác 0 và đan dấu.

Bài 26.22* Cho φ, ψ là hai toán tử tự liên hợp và φ xác định dương. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức đặc trưng của $\varphi\psi$ đều là những số thực.

Bài 26.23* Cho φ, ψ là hai toán tử tự liên hợp xác định không âm và một trong hai toán tử không suy biến. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức đặc trưng của $\varphi\psi$ đều là những số thực không âm.

Bài 26.24 Chứng minh rằng tổng của các toán tử tự liên hợp không âm là toán tử tự liên hợp không âm, và ngược lại một toán tử tự liên hợp không âm hạng r bao giờ cũng viết thành tổng của r toán tử tự liên hợp không âm hạng 1.

Bài 26.25 Toán tử tuyến tính φ của không gian Ơclit (hay unita) được gọi là *liên hợp lệch* nếu $\varphi^* = -\varphi$ (đối với không gian Ơclit, tên gọi thông dụng hơn là *đối xứng lệch*). Chứng minh rằng nếu L là không gian con bất biến của một toán tử tuyến tính liên hợp lệch φ thì $L^\perp$ cũng là không gian con bất biến của φ.

Bài 26.26 Chứng minh rằng các giá trị riêng của các toán tử liên hợp lệch là các số ảo.

Bài 26.27 Chứng minh rằng mọi toán tử liên hợp lệch của không gian unita đều có một cơ sở trực chuẩn gồm các véc tơ riêng.

Bài 26.28 Chứng minh rằng nếu φ là toán tử Hermite của một không gian unita, thì toán tử tuyến tính $\psi = (\varphi - i\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi + i\,\mathrm{id})$ tồn tại và là toán tử unita.

Bài 26.29 Giả sử φ là toán tử tuyến tính liên hợp lệch của không gian unita. Chứng minh rằng

$$\psi = (\mathrm{id} - \varphi)(\mathrm{id} + \varphi)^{-1}$$

là toán tử unita.

Ngược lại, nếu φ là toán tử unita không nhận -1 làm giá trị riêng, thì

$$\psi = (\mathrm{id} - \varphi)(\mathrm{id} + \varphi)^{-1}$$

là toán tử liên hợp lệch.

Bài 26.30 Chứng minh rằng

a) Mọi toán tử tuyến tính φ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, trong đó φ_1 là toán tử tự liên hợp, và φ_2 là toán tử liên hợp lệch.

b) Mọi toán tử tuyến tính φ của không gian unita đều biểu diễn duy nhất dưới dạng $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, trong đó φ_1, φ_2 là các toán tử tự liên hợp.

Bài 26.31* Một toán tử tuyến tính φ của không gian Oclit hay unita được gọi là *toán tử chuẩn tắc* nếu nó giao hoán với φ^*. Cho φ là toán tử chuẩn tắc của không gian unita. Chứng minh rằng

a) $\varphi(x) = 0$ khi và chỉ khi $\varphi^*(x) = 0$.

b) $\varphi - \alpha\,\mathrm{id}$ là toán tử chuẩn tắc.

c) Nếu $\varphi(x) = \alpha x$, thì $\varphi^*(x) = \bar{\alpha}x$.

d) Nếu x, y là hai véc tơ riêng của φ ứng với hai giá trị riêng khác nhau, thì chúng trực giao với nhau.

Bài 26.32* Chứng minh rằng đối với một họ (có thể vô hạn) các toán tử tuyến tính chuẩn tắc của không gian unita hữu hạn chiều đôi một giao hoán với nhau luôn tìm được một cơ sở trực chuẩn gồm các véc tơ riêng chung cho cả họ đã cho.

Bài 26.33* Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một toán tử tuyến tính φ của không gian unita là chuẩn tắc là mỗi véc tơ riêng của φ là véc tơ riêng của toán tử liên hợp φ^*.

Bài 26.34 Cho φ là một toán tử tuyến tính của không gian unita hữu hạn chiều. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở trực chuẩn để φ có ma trận biểu diễn là ma trận tam giác.

Bài 26.35 Cho E là không gian Óclit hay unita hữu hạn chiều và φ là một toán tử tuyến tính. Chứng minh rằng $\mathrm{Im}(\varphi^*) = (\mathrm{Ker}(\varphi))^{\perp}$.

Bài 26.36* Cho $E = \mathbb{R}[t]$ là không gian các đa thức với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Cho D là toán tử lấy đạo hàm. Chứng minh rằng không tồn tại toán tử T của E sao cho

$$\langle D(f), g\rangle = \langle f, T(g)\rangle,$$

với mọi $f, g \in E$. Nói cách khác trong không gian vô hạn chiều này D không có toán tử liên hợp.

Bài 26.37 Cho $E = \mathbb{R}[t]$ là không gian các đa thức với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Hãy cho ví dụ một dạng tuyến tính $\varphi : E \to \mathbb{R}$ sao cho không tồn tại $g \in E$ để $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$ với mọi $f \in E$.

Bài 26.38 Cho φ là toán tử tự liên hợp. Chứng minh rằng $\varphi^n(v) = 0$ kéo theo $\varphi(v) = 0$.

Chương 8

Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

27 Định nghĩa và các tính chất

Cho V và W là hai không gian véc tơ trên trường K.

Định nghĩa 27.1 Ta gọi ánh xạ $f : V \times W \to K$ là một *dạng song tuyến tính* trên $V \times W$, nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây đối với mọi $x, x' \in V,\ y, y' \in W$ và $\alpha \in K$:

(i) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y),\ f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$,

(ii) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y'),\ f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$.

Nói cách khác khi cố định một biến thì f là dạng tuyến tính đối với biến còn lại. Dạng song tuyến tính trên $V \times V$ còn được gọi là *dạng song tuyến tính trên* V.

Ví dụ 27.1 a) Nếu g là một dạng tuyến tính trên V và h là một dạng tuyến tính trên W, thì $f(x, y) = g(x)h(y)$ với mọi $x \in V$ và $y \in W$ là một dạng song tuyến tính trên $V \times W$. Chẳng hạn khi $V = K^2$ và $W = K^3$, thì

$$f(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 - 2y_2 + 3y_3)$$

là dạng song tuyến tính.

b) Nếu E là không gian Ơclit, thì tích vô hướng là một dạng song tuyến tính trên E.

c) Ánh xạ $f : K^2 \times K^2 \to K$ cho bởi

$$f(a, b; c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

là một dạng song tuyến tính (tính chất của định thức).

d) Ánh xạ $f : M(m, n; K) \times M(n, p; K) \to K$ cho bởi

$$f(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$$

là một dạng song tuyến tính.

Cho $S = (v_1, ..., v_m)$ là cơ sở của V và $T = (w_1, ..., w_n)$ là cơ sở của W. Khi đó, tương tự như ánh xạ tuyến tính (xem Định lí 15.1), dạng song tuyến tính được xác định duy nhất qua các giá trị của nó trên $S \times T$.

Định lí 27.2 *Ánh xạ $f : V \times W \to K$ là một dạng song tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại mn phần tử $a_{ij} \in K$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ sao cho*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

với mọi $x = x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m$ và $y = y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n$. Hơn nữa khi đó

$$f(v_i, w_j) = a_{ij}, \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n,$$

và f là dạng song tuyến tính duy nhất thỏa mãn điều kiện này.

Nếu kí hiệu $A = (a_{ij}) \in M(m, n; K)$, thì định lí trên có thể viết dưới dạng như sau

$$f(x, y) = (x_1, ..., x_m) A (y_1, ..., y_n)^T.$$

Định nghĩa 27.3 Ta gọi A ở trên là *ma trận biểu diễn* của f theo cặp cơ sở (S, T). Nếu f là dạng song tuyến tính trên V, thì ma trận biểu diễn của f theo cặp (S, S) được nói gọn là ma trận biểu diễn của f theo S.

Ví dụ 27.2 (i) Nếu f là dạng song tuyến tính trên $K^2 \times K^3$ được cho bởi

$$f(x_1, x_2; y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_2)(y_1 - 2y_2 + 3y_3),$$

thì ma trận biểu diễn của f theo cặp các cơ sở tự nhiên là

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Nếu f là tích vô hướng của không gian Oclit, thì ma trận biểu diễn của f theo một cơ sở S chính là ma trận Gram của cơ sở đó.

Mệnh đề 27.4 *Nếu dạng song tuyến tính f trên V có các ma trận biểu diễn theo các cơ sở S và T lần lượt là A và B và P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T, thì*

$$B = P^T AP.$$

Hai ma trận A và B như trên được gọi là *tương đẳng*. Như vậy hai ma trận là tương đẳng với nhau khi và chỉ khi chúng là ma trận biểu diễn của cùng một dạng song tuyến tính.

Định nghĩa 27.5 *Hạng* của dạng song tuyến tính f trên V là hạng của một ma trận biểu diễn của nó và được kí hiệu là $\text{rank}(f)$. Ta nói dạng song tuyến tính f *suy biến* nếu $\text{rank}(f) < \dim V$, và *không suy biến* nếu $\text{rank}\, f = \dim V$.

Ví dụ 27.3 Dạng song tuyến tính $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2$ trên K^2 là không suy biến khi $\text{char}(K) \neq 3$ và suy biến khi $\text{char}(K) = 3$. Khi đó $\text{rank}(f) = 1$.

Định nghĩa 27.6 Cho f là một dạng song tuyến tính trên V. Nó tương ứng được gọi là *đối xứng* nếu

$$f(x, y) = f(y, x),$$

đối xứng lệch nếu

$$f(x, y) = -f(x, y),$$

và *thay phiên* nếu

$$f(x, x) = 0,$$

với mọi $x, y \in V$.

Ví dụ 27.4 (i) Cho $V = K^2$. Khi đó $f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ là một dạng song tuyến tính đối xứng, còn $g(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ vừa là dạng song tuyến tính thay phiên, vừa là đối xứng lệch. Chú ý rằng, nếu $\text{char}(K) = 2$ thì f cũng là dạng song tuyến tính thay phiên.

(ii) Chú ý rằng nếu $\text{char}(K) = 2$ thì hai khái niệm dạng song tuyến tính đối xứng và dạng song tuyến tính đối xứng lệch là trùng nhau, nhưng khái niệm dạng song tuyến tính thay phiên là khác. Chẳng hạn dạng song tuyến tính $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ trên K^2 là đối xứng, nhưng không thay phiên.

(iii) Mọi dạng song tuyến tính thay phiên là đối xứng lệch (xem Bài 27.12).

Bổ đề 27.7 *Cho A là ma trận biểu diễn của một dạng song tuyến tính f. Khi đó f là đối xứng khi và chỉ khi A đối xứng, và f là đối xứng lệch khi và chỉ khi A đối xứng lệch.*

Định nghĩa 27.8 Cho f là một dạng song tuyến tính trên V. Ta gọi ánh xạ xác định bởi

$$\Gamma(x) = f(x, x)$$

là *dạng toàn phương* trên V sinh bởi f (hoặc liên kết với f).

Bổ đề sau đây không chỉ cho ta ví dụ, mà còn cho ta biết dạng tổng quát của dạng toàn phương, đồng thời giải thích tên gọi "toàn phương" (toàn bậc hai).

Bổ đề 27.9 *Cho S là cơ sở của không gian véc tơ V chiều n. Một ánh xạ $\Gamma : V \to K$ là một dạng toàn phương khi và chỉ khi nó được viết dưới dạng*

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

trong đó $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của x theo S và $a_{ij} \in K$.

Nếu ta đã cố định một cơ sở S của không gian véc tơ, thì nhiều khi ta cũng nói $\Gamma(x)$ là *dạng toàn phương của các biến* (tọa độ) $x_1, ..., x_n$. Ngược lại, khi cho dạng toàn phương dưới dạng

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

ta hiểu đó là dạng toàn phương trên K^n và $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của x theo cơ sở tự nhiên.

Bổ đề 27.10 *Giả sử* $\mathrm{char}(K) \neq 2$. *Cho Γ là một dạng toàn phương trên V. Khi đó tồn tại duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng h sinh ra Γ. Dạng này được xác định bởi công thức:*

$$h(x, y) = \frac{1}{2}[\Gamma(x + y) - \Gamma(x) - \Gamma(y)],$$

với mọi $x, y \in V$. *Hơn nữa, nếu* Γ *trong cơ sở* S *được viết dưới dạng*

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

thì ma trận biểu diễn của h *theo* S *là* (a'_{ij}), *trong đó* $a'_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$.

Định nghĩa 27.11 Ta gọi dạng song tuyến tính h này là *dạng cực* của dạng toàn phương Γ. Ma trận (a'_{ij}) được gọi là *ma trận biểu diễn* của Γ.

Định lí 27.12 *Giả sử* $\mathrm{char}(K) \neq 2$. *Nếu* f *là một dạng song tuyến tính đối xứng trên* V *có chiều* n, *thì tồn tại cơ sở* S *để ma trận biểu diễn của nó có dạng đường chéo. Nói cách khác, theo cơ sở đó* f *và dạng toàn phương sinh bởi nó được cho bởi các công thức sau:*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= d_1x_1y_1 + \cdots + d_nx_ny_n, \\ \Gamma(x) &= d_1x_1^2 + \cdots + d_nx_n^2. \end{aligned}$$

Dạng này được gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương.

Việc tìm ma trận biểu diễn chính tắc của dạng song tuyến tính đối xứng tương đương với tìm dạng chính tắc của dạng toàn phương sinh bởi nó. Điều đó được thực hiện bằng thuật toán sau:

Thuật toán Lagrange

Thuật toán này thực hiện theo cách giảm dần số biến. Cho ma trận đối xứng $A = (g_{ij})$ là ma trận biểu diễn của Γ.

1. Nếu $g_{ii} = 0$ với mọi i thì chọn một hệ số $g_{ij} \neq 0$, $i < j$. Khi đó $i \neq j$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{aligned} x_k &= y_k \quad (k \neq j), \\ x_j &= y_i + y_j. \end{aligned}$$

   Khi đó ta đưa về trường hợp 2 sau đây.

2. Tồn tại $g_{ii} \neq 0$. Chọn một i như vậy. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{aligned} x_k &= y_k \quad (k \neq i), \\ x_i &= y_i - \textstyle\sum_{k\neq i} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} y_k. \end{aligned}$$

Thực chất của bước này là ta nhóm tất cả những hạng tử chứa x_i lại với nhau và thêm vào một bình phương tổ hợp tuyến tính của các biến còn lại để được một bình phương đủ, và do đó sẽ tách ra được một dạng toàn phương có số biến ít hơn. Cụ thể khi đó

$$\Gamma(y_1, ..., y_n) = d_i y_i^2 + \Gamma'(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n).$$

3. Lặp lại các bước trên đối với Γ' và cứ thế tiếp tục cho đến khi đạt được dạng chính tắc:

$$\Gamma(z) = d_1 z_1^2 + \cdots + d_n z_n^2,$$

trong đó $z_1, ..., z_n$ là tập biến ở bước cuối cùng.

4. Biểu diễn $x_1, ..., x_n$ qua $z_1, ..., z_n$ ta được ma trận chuyển cơ sở P gồm các dòng là các véc tơ hệ số của x_i (biểu diễn qua $z_1, .., z_n$) - xem Bổ đề 15.6. Khi đó

$$P^T A P = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 27.5 Cho dạng song tuyến tính có ma trận biểu diễn là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

tức là

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Thực hiện đổi biến $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$, ta được

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= 2y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 - 2y_2y_3 \\ &= 2[y_1^2 + 2y_1(\tfrac{y_2}{2} + \tfrac{y_3}{2})] - 2y_2y_3 \\ &= 2z_1^2 - 2(\tfrac{z_2}{2} + \tfrac{z_3}{2})^2 - 2z_2z_3 \\ &= 2z_1^2 - \tfrac{z_2^2}{2} - 3z_2z_3 - \tfrac{z_3^2}{2}. \end{aligned}$$

Trên đây, theo trường hợp 2, ta đã thực hiện đổi biến

$$z_1 = y_1 + (\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{2}),\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,$$

hay tương đương

$$y_1 = z_1 - (\frac{z_2}{2} + \frac{z_3}{2}),\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3,$$

để biểu thức trong móc vuông thành bình phương đủ.

Bây giờ tiếp tục trường hợp 2 trong thuật toán nêu trên, ta được

$$G(x) = 2z_1^2 - \frac{1}{2}[z_2^2 + 2z_2 \cdot 3z_3 + 9z_3^2] + 4z_3^2 = 2u_1^2 - \frac{1}{2}u_2^2 + 4u_3^2,$$

trong đó

$$z_1 = u_1,\ z_2 = u_2 - 3u_3,\ z_3 = u_3.$$

Tóm lại dạng chính tắc của Γ là

$$\Gamma(u_1, u_2, u_3) = 2u_1^2 - \frac{1}{2}u_2^2 + 4u_3^2.$$

Vì

$$x_1 = u_1 - \frac{u_2}{2} + u_3,\ x_2 = u_1 + \frac{u_2}{2} - 2u_3,\ x_3 = u_3,$$

nên ma trận chuyển cơ sở là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Như vậy

$$P^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Chú ý: Dạng chính tắc của một dạng toàn phương hay dạng song tuyến tính xác định không duy nhất.

Bài tập

Bài 27.1 Ánh xạ $f : K^2 \to K$ cho bởi $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ có là dạng song tuyến tính trên K không?

Bài 27.2 Cho f là dạng song tuyến tính trên K^3 cho bởi

$$f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 7x_2y_1 - x_1y_3 + 9x_3y_1 - x_2y_2 + 4x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3.$$

Viết ma trận biểu diễn của f và ma trận biểu diễn của dạng cực của dạng toàn phương sinh bởi f theo cơ sở tự nhiên.

Bài 27.3 Cho f là dạng song tuyến tính trên K^2 cho bởi

$$f(x_1, x_2; y_1, y_2) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_2.$$

Viết ma trận biểu diễn của f theo cơ sở $v_1 = (2, 1),\ v_2 = (1, 2)$.

Bài 27.4 Kí hiệu $L^2(U, V)$ là các dạng song tuyến tính trên $U \times V$. Chứng tỏ rằng tập hợp này trở thành không gian véc tơ với các phép toán sau:

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &:= f(x, y) + g(x, y),\\ (\alpha f)(x, y) &:= \alpha f(x, y),\end{aligned}$$

với mọi $f, g \in L^2(U, V)$ và $x \in U,\ y \in V$.

Bài 27.5* Cho $\dim V = n$ và $\varphi_1, ..., \varphi_n$ là một cơ sở của không gian đối ngẫu $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$. Chứng minh rằng các dạng song tuyến tính trên V xác định bởi $f_{ij}(x, y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)$ lập thành một cơ sở của $L^2(V, V)$. Từ đó hãy tính chiều của nó.

Bài 27.6 Cho $\dim U = n,\ \dim V = m$. Tính $\dim L^2(U, V)$.

Bài 27.7 Chứng minh rằng ánh xạ từ các dạng song tuyến tính trên $U \times V$ của các không gian hữu hạn chiều vào ma trận biểu diễn của nó theo một cặp cơ sở cố định là một đẳng cấu của các không gian véc tơ.

Bài 27.8 Chứng minh rằng dạng song tuyến tính khác 0 trên K^n được viết thành tích của hai dạng tuyến tính khi và chỉ khi hạng của nó bằng 1.

Bài 27.9 Chứng minh rằng tích của hai dạng tuyến tính l_1, l_2 trên K^n đồng nhất bằng 0, tức là $l_1(x)l_2(x) = 0$ với mọi $x \in K^n$, khi và chỉ khi một trong hai dạng này đồng nhất bằng 0.

Bài 27.10 Chứng tỏ rằng hạng của dạng song tuyến tính không phụ thuộc vào ma trận biểu diễn (khi thay đổi cơ sở).

Bài 27.11 Cho $f(x, y)$ là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V chiều n và L là không gian con chiều k của V. Kí hiệu L^* là tập các véc tơ $y \in V$ sao cho $f(x, y) = 0$ với mọi $x \in L$. Chứng minh rằng

a) L^* là không gian con của V và $\dim L^* \geq n - k$.

b) Chứng tỏ rằng nói chung $V \neq L + L^*$, nhưng nếu $f(x, x) \neq 0$ với mọi $0 \neq x \in L$, thì $V = L \oplus L^*$.

Bài 27.12 Chứng tỏ rằng mọi dạng song tuyến tính thay phiên trên V là đối xứng lệch. Điều ngược lại cũng đúng khi $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Bài 27.13 Cho $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Chứng tỏ rằng mọi dạng song tuyến tính trên V là tổng của một dạng song tuyến tính đối xứng và một dạng song tuyến tính thay phiên.

Bài 27.14* Cho $\mathrm{char}(K) \neq 2$ và f là một dạng song tuyến tính thay phiên trên V chiều hữu hạn. Chứng minh rằng tồn tại cơ sở để ma trận biểu diễn của f có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa số khối $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ xuất hiện $\frac{\mathrm{rank}(f)}{2}$ lần.

Bài 27.15 Với mỗi dạng song tuyến tính $f : U \oplus V \to K$, ta xác định một ánh xạ

$$\begin{aligned} \Phi &: U \to V^* \\ u &\mapsto \Phi(u) : \quad (\Phi(u))(v) = f(u, v). \end{aligned}$$

Chứng tỏ rằng:

a) Φ là ánh xạ tuyến tính.

b) Ánh xạ: $f \mapsto \Phi$ xác định như trên là một đẳng cấu giữa $L^2(U, V)$ và $L(U, V^*)$ (xem kí hiệu Bài 13.9).

Bài 27.16 Chứng minh rằng nếu ánh xạ $\Gamma : V \to K$ là một dạng toàn phương thì với mọi $x, y \in V$ ta có

$$\Gamma(x + y) + \Gamma(x - y) = 2(\Gamma(x) + \Gamma(y)).$$

Điều ngược lại có đúng không nếu $\mathrm{char}(K) \neq 2$?

Bài 27.17 Tìm dạng chính tắc của các dạng toàn phương sau trên $\mathbb{Q}$:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$.

b) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3$.

c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

Bài 27.18 Tìm dạng chính tắc và các phép biến đổi tuyến tính biến các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc đó (xét trên $\mathbb{Q}$):

a) $x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$,

b) $4x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 3x_2x_3$.

c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

Bài 27.19 Tìm dạng chính tắc và các phép biến đổi tuyến tính biến các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc đó (xét trên $\mathbb{Q}$):

a) $\sum_{i,j=1}^n a_ia_jx_ix_j$, trong đó $a_1, ..., a_n$ không đồng thời bằng 0.

b) $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

Bài 27.20* Tìm dạng chính tắc và các phép biến đổi tuyến tính biến các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc đó (xét trên $\mathbb{Q}$):

a) $\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

b) $\sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i$.

Bài 27.21* Tìm dạng chính tắc và các phép biến đổi tuyến tính biến các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc đó (xét trên $\mathbb{Q}$):

a) $\sum_{i=1}^n (x_i - s)^2$, trong đó $s = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

b) $\sum_{1\le i<j\le n} |i-j|x_ix_j$.

Bài 27.22 Ta gọi định thức con góc của dạng toàn phương là định thức con chính gồm các phần tử nằm trên giao của k dòng đầu và cột đầu, trong đó $k = 1, 2, ..., n$ và n là chiều không gian. Chứng minh rằng các định thức con góc của một dạng toàn phương không thay đổi khi ta thực hiện các phép chuyển cơ sở bằng ma trận tam giác trên có tất cả các phần tử trên đường chéo chính bằng 1.

Bài 27.23* Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để dạng toàn phương $f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ hạng r đưa về được dạng chính tắc

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2,\ \lambda_1 \neq 0, ..., \lambda_r \neq 0,$$

bằng phép biến đổi tam giác trên là

$$D_1, ..., D_r \neq 0,\ D_{r+1} = \cdots = D_n = 0.$$

Ở trên D_k là định thức góc thứ k. Hơn nữa, nếu phép biến đổi tam giác có tất cả các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, thì dạng chính tắc trên được xác định duy nhất theo công thức:

$$\lambda_k = \frac{D_k}{D_{k-1}},\ k = 1, ..., r;\ D_0 := 1.$$

28 Dạng toàn phương thực

Trong mục này ta luôn giả sử V là không gian véc tơ chiều n trên $\mathbb{R}$. Khi đó một dạng toàn phương trên V được gọi là *dạng toàn phương thực.*

Bổ đề 28.1 *Cho Γ là một dạng toàn phương thực. Ta có thể tìm thấy một cơ sở S của V sao cho*

$$\Gamma(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2,$$

trong đó $x_1, ..., x_n$ là tọa độ của véc tơ x theo S.

Biểu thức ở bổ đề trên được gọi là *dạng chuẩn tắc* của Γ. Chú ý rằng một dạng toàn phương thực có nhiều dạng chính tắc, nhưng chỉ có một dạng chuẩn tắc.

Định lí 28.2 (Luật quán tính Sylvester-Jacobi) *Mọi dạng chính tắc của dạng toàn phương thực*

$$\Gamma(x) = c_1x_1^2 + \cdots + c_px_p^2 - c_{p+1}x_{p+1}^2 - \cdots - c_rx_r^2, \quad (c_1, ..., c_r > 0)$$

đều có cùng số p các hệ số dương và số $r - p$ các hệ số âm.

Định nghĩa 28.3 Số p các hệ số dương và số $r - p$ các hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương thực tương ứng được gọi là *chỉ số quán tính dương* và *chỉ số quán tính âm.* Hiệu giữa chỉ số quán tính dương và chỉ số quán tính âm được gọi là *kí số* của Γ.

Như vậy cách phát biểu khác của Luật quán tính Sylvester-Jacobi là các chỉ số quán tính dương và âm của một dạng toàn phương không phụ thuộc vào dạng chính tắc cụ thể.

Định nghĩa 28.4 Một dạng toàn phương thực Γ được gọi là *xác định dương* (hay *xác định âm*) nếu $\Gamma(x) > 0$ (hay $\Gamma(x) < 0$) với mọi $x \neq 0$.

Một dạng toàn phương thực Γ được gọi là *nửa xác định dương* (hay *nửa xác định âm*) nếu $\Gamma(x) \geq 0$ (hay $\Gamma(x) \leq 0$) với mọi x.

Ví dụ 28.1 $| x |^2$ trên không gian Óclit là một dạng toàn phương xác định dương.

Bổ đề 28.5 *Một dạng toàn phương thực là xác định dương (t.ư. âm) khi và chỉ khi chỉ số quán tính dương (t.ư. âm) của nó bằng* $\dim V$.

Định lí 28.6 *(Sylvester) Cho A là ma trận biểu diễn của dạng toàn phương thực Γ. Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) Γ *xác định dương,*

(ii) Tất cả các định thức con chính của A dương,

(iii) Tất cả các định thức con góc (xem Bài 27.22) của A đều dương.

Như vậy để xét xem một dạng toàn phương thực có là (nửa) xác định dương hay không ta có 3 cách:

- ◇ Sử dụng phương pháp Lagerange đưa về dạng chính tắc, rồi xét xem tất cả các hệ số có dương (không âm) hay không?
- ◇ Tính các định thức con theo định lí trên (xem cả Bài 28.16 cho trường hợp nửa xác định dương).
- ◇ Tính các giá trị riêng của một ma trận biểu diễn của nó, và xem tất cả chúng có dương (hay không âm) không. Phương pháp này dựa vào Bài 28.1.

Dạng toàn phương thực và toán tử đối xứng của không gian Oclit có mối liên hệ chặt chẽ:

Bổ đề 28.7 *Dạng song tuyến tính f trên không gian Oclit là một dạng song tuyến tính đối xứng khi và chỉ khi tồn tại toán tử đối xứng φ sao cho*

$$f(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle, \ \forall x, y \in V.$$

Định lí 28.8 *Cho E là không gian Oclit chiều n và Γ là một dạng toàn phương trên E. Khi đó ta có thể tìm thấy một cơ sở trực chuẩn S của E sao cho*

$$\Gamma(x) = c_1 x_1^2 + \cdots + c_n x_n^2,$$

với mọi $x \in E$, trong đó $x_1, ..., x_n$ là tọa độ của x theo S. Hơn nữa, các hằng số $c_1, ..., c_n$ được xác định duy nhất (nếu không kể đến thứ tự) và là nghiệm của đa thức đặc trưng của một ma trận biểu diễn của Γ theo một cơ sở trực chuẩn.

Định nghĩa 28.9 Ta gọi dạng chính tắc của một dạng toàn phương thực Γ trên một không gian Oclit theo một cơ sở trực chuẩn S là *dạng chính tắc trục chính* của Γ, và các véc tơ của S là các *trục chính*. Quá trình chuyển đổi Γ về dạng chính tắc trục chính được gọi là một *phép biến đổi trục chính*.

Thuật toán tìm dạng chính tắc trục chính

1. Xác định ma trận biểu diễn A của dạng toàn phương Γ theo một cơ sở trực chuẩn nào đó (A phải là một ma trận đối xứng).

2. Tính đa thức $f_A(t)$.

3. Tìm các nghiệm $c_1, ..., c_n$ của $f_A(t)$ (tất cả các nghiệm này đều là số thực; nếu là nghiệm bội thì được liệt kê nhiều lần).

Khi đó dạng chính tắc trục chính của Γ là

$$\Gamma(x) = c_1x_1^2 + \cdots + c_nx_n^2.$$

Để tìm các trục chính của dạng chính tắc trục chính này cần phải thực hiện tiếp các bước sau:

4. Tại bước 3, sắp xếp nghiệm $c_1, ..., c_n$ lại như sau:

$$\lambda_1 = c_1 = c_2 = \cdots = c_{k_1},\ \lambda_2 = c_{k_1+1} = \cdots = c_{k_2},$$
$$..., \lambda_m = c_{k_{m-1}+1} = \cdots = c_{k_m},$$

trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_m$ đôi một khác nhau.

5. Với mỗi λ_i giải hệ phương trình tuyến tính

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ta tìm được $l_i = k_i - k_{i-1}$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính $u_{k_{i-1}+1}, ..., u_{k_i}$.

6. Đối với mỗi $i \leq m$, áp dụng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt đối với $u_{k_{i-1}+1}, ..., u_{k_i}$ để tìm một hệ trực chuẩn $e_{k_{i-1}+1}, ..., e_{k_i}$.

Khi đó $e_1, ..., e_n$ là một cơ sở trực chuẩn mà Γ có biểu diễn chính tắc trục chính.

Bài tập

Bài 28.1 Cho A là một ma trận biểu diễn của dạng toàn phương thực Γ. Chứng minh rằng Γ là (nửa) xác định dương khi và chỉ khi các giá trị riêng của A là dương (t.ư. không âm), còn Γ là (nửa) xác định âm khi và chỉ khi các giá trị riêng của A là âm (t.ư. không dương).

Bài 28.2 Cho φ là một toán tử tuyến tính tùy ý của không gian Ơclit E. Chứng minh rằng

$$\Gamma(x) = \langle x, \varphi\varphi^T(x)\rangle$$

là một dạng toàn phương nửa xác định dương.

Bài 28.3* Cho Γ là một dạng toàn phương và $A = (a_{ij})$ là ma trận biểu diễn của nó. Xét các số $D_0 = 1$ và

$$D_i = |\, A(1, ..., i; 1, ..., i)\,| \quad (i = 1, ..., n).$$

Chứng minh rằng Γ xác định âm khi và chỉ khi $(-1)^i D_i > 0$ với mọi $i = 1, ..., n$.

Bài 28.4 Cho Γ là một dạng toàn phương trên không gian Ơclit với dạng chính tắc trực chính

$$\Gamma(x) = c_1 x_1^2 + \cdots + c_n x_n^2,$$

trong đó $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$. Chứng minh rằng

$$c_1 = \max\{\Gamma(\frac{x}{|\,x\,|});\ x \neq 0\} \text{ và } c_n = \min\{\Gamma(\frac{x}{|\,x\,|});\ x \neq 0\}.$$

Bài 28.5* Cho Γ_1 và Γ_2 là hai dạng toàn phương thực, trong đó Γ_1 xác định dương. Chứng minh rằng có thể đồng thời đưa hai dạng toàn phương này về dạng chính tắc.

Bài 28.6* Cho dạng toàn phương thực

$$f(x) = l_1^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2,$$

trong đó $l_1, ..., l_{p+q}$ là các dạng tuyến tính thực của các biến $x_1, ..., x_n$. Chứng minh rằng chỉ số quán tính dương của f không vượt quá p và chỉ số quán tính âm của f không vượt quá q.

Bài 28.7 Hai dạng toàn phương f và g (trên không gian véc tơ V) được gọi là tương đương nếu tồn tại phép biến đổi không suy biến φ của V sao cho

$$f(x) = g(\varphi(x))$$

với mọi $x \in V$. Chứng minh rằng

a) Hai dạng toàn phương là tương đương khi và chỉ khi chúng có cùng dạng chính tắc.

b) Hai dạng toàn phương thực là tương đương khi và chỉ khi chúng có cùng các chỉ số quán tính.

Bài 28.8* Cho hai dạng toàn phương thực f và g. Chứng minh rằng nếu từ mỗi dạng này đều đưa về được dạng kia bằng phép biến đổi tuyến tính (có thể suy biến) thì hai dạng này tương đương với nhau.

Bài 28.9 Hãy đặc trưng thông qua hạng và kí số để dạng toàn phương thực f tương đương với $-f$.

Bài 28.10 Chứng minh rằng một dạng toàn phương thực có thể viết thành tích của hai dạng tuyến tính thực khi và chỉ khi nó có hạng không vượt quá 2, và trong trường hợp hạng bằng 2 thì kí số bằng 0.

Bài 28.11 Chứng minh rằng dạng toàn phương thực là xác định dương khi và chỉ khi ma trận biểu diễn của nó được viết dưới dạng $A = C^T C$, trong đó C là ma trận thực khả nghịch.

Bài 28.12 Chứng tỏ rằng trong một biểu diễn tùy ý của một dạng toàn phương xác định dương f mọi hệ số của các bình phương là dương, nhưng đây không phải là điều kiện đủ.

Bài 28.13 Tìm các giá trị λ để các dạng toàn phương thực sau đây xác định dương:

a) $6x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

b) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

c) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4\lambda x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Bài 28.14* Ta gọi hợp thành của hai dạng toàn phương thực

$$f = \sum a_{ij}x_ix_j \quad \text{và} \quad g = b_{ij}x_ix_j$$

là dạng toàn phương $(f, g) = \sum a_{ij}b_{ij}x_ix_j$. Chứng minh rằng:

a) Nếu f, g là nửa xác định dương, thì (f, g) cũng là nửa xác định dương.

b) Nếu f, g là xác định dương, thì (f, g) cũng là xác định dương.

Bài 28.15 Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ma trận đối xứng thực A biểu diễn được dưới dạng $A = C^TC$, trong đó C là ma trận thực không suy biến, là các định thức con góc của A dương (xem Bài 27.22).

Bài 28.16* Chứng minh điều tương tự sau đây của Định lí Sylvester: một dạng toàn phương thực là nửa xác định dương khi và chỉ khi mọi định thức con chính của ma trận biểu diễn của nó không âm. Hãy chỉ ví dụ chứng tỏ mệnh đề không đúng nếu chỉ xét định thức con góc.

Bài 28.17* Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ma trận đối xứng thực A biểu diễn được dưới dạng $A = C^TC$, trong đó C là ma trận thực, vuông, là các định thức con chính của A không âm. Hơn nữa, nếu hạng của A bằng r thì hạng của C cũng bằng r và có thể chọn C sao cho r dòng đầu của nó độc lập tuyến tính còn các dòng còn lại bằng 0.

Bài 28.18 Cho hai dạng toàn phương thực f và g của cùng n biến $x_1, ..., x_n$, trong đó g là xác định dương. Chứng minh rằng dạng chính tắc của f:

$$f = a_1y_1^2 + \cdots + a_ny_n^2$$

nhận được khi thực hiện đổi biến để đồng thời g là tổng các bình phương $\sum y_i^2$ (xem Bài 28.5) được xác định duy nhất nếu không kể tới thứ tự của các số hạng. Hơn nữa $a_1, ..., a_n$ là nghiệm của đa thức $| A - \lambda B | = 0$, trong đó A và B là các ma trận hệ số của f và g.

Bài 28.19 Cho hai dạng toàn phương xác định dương f và g của cùng n biến $x_1, ..., x_n$. Giả sử dạng chính tắc của f là $\sum a_iy_i^2$ khi g được đưa về tổng các bình phương $\sum y_i^2$, và ngược lại dạng chính tắc của g là $\sum b_iz_i^2$ khi f được đưa về tổng các bình phương $\sum z_i^2$. Hãy tìm mối liên hệ giữa các hệ số này.

Bài 28.20 Hai dạng toàn phương trên không gian Oclit được gọi là *tương đương trực giao* nếu ta có thể đưa từ dạng này sang dạng khác bằng phép biến đổi trực giao. Chứng tỏ rằng một dạng toàn phương không suy biến tương đương trực giao với dạng chuẩn tắc của nó khi và chỉ khi ma trận biểu diễn của nó theo một cơ sở trực chuẩn là trực giao.

Bài 28.21 *Đa thức đặc trưng* của một dạng toàn phương trên không gian Oclit là đa thức đặc trưng của một ma trận biểu diễn của nó theo một cơ sở trực chuẩn. Chứng tỏ rằng định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở trực chuẩn.

Bài 28.22 Chứng minh rằng hai dạng toàn phương trên không gian Oclit tương đương trực giao khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của chúng trùng nhau.

Bài 28.23 Chứng minh rằng mọi giá trị riêng của ma trận thực đối xứng A thuộc đoạn $[a, b]$ khi và chỉ khi dạng toàn phương thực với ma trận biểu diễn $A - \lambda I$ là xác định dương với mọi $\lambda < a$ và xác định âm với mọi $\lambda > b$.

Bài 28.24* Cho A và B là hai ma trận thực đối xứng với các giá trị riêng tương ứng nằm trong đoạn $[a, b]$ và $[c, d]$. Chứng minh rằng giá trị riêng của $A + B$ nằm trong đoạn $[a + c, b + d]$.

Bài 28.25* Chứng minh rằng mọi ma trận thực, vuông, không suy biến A có thể biểu diễn thành tích $A = QB$, trong đó Q là ma trận trực giao, còn B là ma trận tam giác trên với các phần tử trên đường chéo chính dương. Hơn nữa phân tích này là duy nhất.

Bài 28.26* Chứng minh rằng mọi ma trận thực, vuông, không suy biến A có thể biểu diễn thành tích $A = Q_1B_1 = B_2Q_2$, trong đó Q_1, Q_2 là các ma trận trực giao, còn B_1, B_2 là các ma trận đối xứng thực với các định thức con góc dương. Hơn nữa các phân tích này là duy nhất.

Bài 28.27 Hãy xét xem những dạng toàn phương thực trong số dạng sau đây tương đương với nhau:

a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $f_2 = 2x_2^2 - x_1x_3$, $f_3 = 3x_3^2 + x_1x_2$.

b) $f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2$,
$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,
$f_3 = -2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 10x_2x_3$.

Bài 28.28 Trong cặp sau đây, hãy đồng thời đưa dạng toàn phương xác định dương về dạng chuẩn tắc và dạng toàn phương còn lại về dạng chính tắc (không cần tìm phép biến đổi):

a) $f = 21x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$ và
$g = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$.

b) $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$ và
$g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Bài 28.29* Tìm ví dụ chứng tỏ không có thể luôn cùng một lúc đưa hai dạng toàn phương thực về dạng chính tắc (tức là bằng cùng một phép biến đổi tuyến tính).

Bài 28.30 Tìm dạng chính tắc trục chính của các dạng toàn phương sau đây:

a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

b) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Bài 28.31* Tìm dạng chính tắc trục chính của dạng toàn phương

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n.$$

Bài 28.32 Tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương sau đây của không gian Ơclit về dạng chính tắc trục chính:

a) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

c) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.

d) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$.

Bài 28.33* Tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương sau đây của không gian Ơclit về dạng chính tắc trục chính:

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

b) $\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

Bài 28.34 Tìm phép biến đổi đồng thời đưa dạng toàn phương xác định dương của cặp dạng toàn phương sau đây về dạng chuẩn tắc, còn dạng còn lại về dạng chính tắc:

a) $f = -4x_1x_2$ và $g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

b) $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ và
$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

29 Dạng Hermite và dạng toàn phương Hermite

Cho V và W là hai không gian véc tơ trên trường số phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 29.1 Ta gọi ánh xạ $f : V \times W \to \mathbb{C}$ là một *dạng song tuyến tính liên hợp* trên $V \times W$, nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây đối với mọi $x, x' \in V$, $y, y' \in W$ và $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$, $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$,

(ii) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$, $f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x, y)$.

Nói cách khác khi cố định biến thứ hai thì f là dạng tuyến tính đối với biến thứ nhất, còn khi cố định biến thứ nhất thì f là "nửa" tuyến tính đối với biến thứ 2. Dạng song tuyến tính liên hợp trên $V \times V$ còn được gọi là *dạng song tuyến tính liên hợp trên* V.

Ví dụ: Tích vô hướng trên không gian unita là một dạng song tuyến tính liên hợp. Nói riêng, trên $\mathbb{C}^n$

$$f(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

là một dạng song tuyến tính liên hợp, trong đó $x = (x_1, ..., x_n)$ và $y = (y_1, ..., y_n)$.

Dạng song tuyến tính liên hợp cũng có các tính chất tương tự như dạng song tuyến tính trong Mục 27. Cụ thể:

Định lí 29.2 *Cho $S = (v_1, ..., v_m)$ là cơ sở của V và $T = (w_1, ..., w_n)$ là cơ sở của W. Ánh xạ $f : V \times W \to \mathbb{C}$ là một dạng song tuyến tính liên hợp khi và chỉ khi tồn tại mn phần tử $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ sao cho*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \bar{y}_j,$$

với mọi $x = x_1v_1 + \cdots + x_mv_m$ và $y = y_1w_1 + \cdots + y_nw_n$. Hơn nữa, khi đó

$$f(v_i, w_j) = a_{ij}, \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n,$$

và f là dạng song tuyến tính liên hợp duy nhất thỏa mãn điều kiện này.

Nếu kí hiệu $A = (a_{ij}) \in M(m,n;K)$, thì định lí trên có thể viết dưới dạng như sau

$$f(x,y) = (x_1,...,x_m)A(\bar{y}_1,...,\bar{y}_n)^T.$$

Ta cũng gọi A là *ma trận biểu diễn* của f theo cặp cơ sở (S,T). Nếu f là dạng song tuyến tính liên hợp trên V, thì ma trận biểu diễn của f theo cặp (S,S) được nói gọn là ma trận biểu diễn của f theo S.

Mệnh đề 29.3 *Nếu dạng song tuyến tính liên hợp f trên V có các ma trận biểu diễn theo các cơ sở S và T lần lượt là A và B và P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T, thì*

$$B = P^T A\bar{P}.$$

Định nghĩa 29.4 Cho f là một dạng song tuyến tính liên hợp trên V. Ta gọi ánh xạ xác định bởi

$$\Gamma(x) = f(x,x)$$

là *dạng toàn phương liên hợp* trên V sinh bởi f (hoặc liên kết với f).

Bổ đề 29.5 *Cho S là cơ sở của không gian véc tơ V chiều n. Ánh xạ $\Gamma : V \to \mathbb{C}$ là một dạng toàn phương liên hợp khi và chỉ khi nó viết được dưới dạng*

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{x}_j,$$

trong đó $(x_1,...,x_n)$ là tọa độ của x theo S và $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Tương tự như dạng toàn phương, khi đã cố định một cơ sở S của không gian véc tơ, thì nhiều khi ta cũng nói $\Gamma(x)$ là *dạng toàn phương liên hợp của các biến* (tọa độ) $x_1,...,x_n$. Ngược lại, khi cho dạng toàn phương liên hợp dưới dạng

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{x}_j,$$

ta hiểu đó là dạng toàn phương liên hợp trên $\mathbb{C}^n$ và $(x_1,...,x_n)$ là tọa độ của x theo cơ sở tự nhiên.

Dạng toàn phương không xác định dạng song tuyến tính sinh ra nó. Tuy nhiên đối với dạng toàn phương liên hợp thì khác.

Bổ đề 29.6 *Giả sử f là dạng song tuyến tính liên hợp và Γ là dạng toàn phương liên hợp tương ứng. Khi đó với mọi $x, y \in V$ ta có*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[\Gamma(x+y) + i\Gamma(x+iy) - (1+i)\Gamma(x) - (1+i)\Gamma(y)].$$

Tương ứng với dạng song tuyến tính đối xứng, ta có khái niệm

Định nghĩa 29.7 Ta gọi dạng song tuyến tính liên hợp f trên V là *dạng Hermite*, nếu với mọi $x, y \in V$ ta có

$$f(x,y) = \overline{f(y,x)}.$$

Khi đó dạng toàn phương liên hợp tương ứng được gọi là *dạng toàn phương Hermite.*

Như vậy đối với dạng toàn phương Hermite: $\Gamma(x) \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in V$.
Ví dụ: Trên $\mathbb{C}^n$, $f(x,y) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$ là dạng Hermite và

$$\Gamma(x) = x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_n\bar{x}_n = |\, x_1 \,|^2 + \cdots + |\, x_n \,|^2$$

là một dạng toàn phương Hermite.

Định lí 29.8 *Cho $S = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở tùy ý của V. Dạng song tuyến tính liên hợp f là một dạng Hermite khi và chỉ khi*

$$f(e_i, e_j) = \overline{f(e_j, e_i)}, \ i,j = 1, ..., n.$$

Nói cách khác ma trận biểu diễn A của f là một ma trận Hermite, tức là $A = A^*$ (xem trang 40).

Chẳng hạn, các ma trận $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 3 \\ 1-i & 4 & i \\ 3 & -i & 6 \end{pmatrix}$ là Hermite, nhưng $\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ không là ma trận Hermite.

Mối liên hệ giữa dạng Hermite và toán tử Hermite được cho bởi:

Bổ đề 29.9 *Dạng song tuyến tính liên hợp f trên không gian unita E là một dạng Hermite khi và chỉ khi tồn tại toán tử Hermite φ sao cho*

$$f(x,y) = \langle \varphi(x), y \rangle, \ \forall x, y \in E.$$

Dạng toàn phương Hermite có những tính chất tương tự như dạng toàn phương thực

Định lí 29.10 *Cho E là không gian unita chiều n và Γ là một dạng toàn phương Hermite trên E. Khi đó ta có thể tìm thấy một cơ sở trực chuẩn S của E sao cho*

$$\Gamma(x) = c_1 \mid x_1 \mid^2 + \cdots + c_n \mid x_n \mid^2,$$

với mọi $x \in E$, trong đó $x_1, ..., x_n$ là tọa độ của x theo S. Hơn nữa , các hằng số $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ được xác định duy nhất (nếu không kể tới thứ tự) và là nghiệm của đa thức đặc trưng của một ma trận biểu diễn của Γ theo một cơ sở trực chuẩn.

Nghiệm của đa thức đặc trưng của một ma trận biểu diễn của Γ theo một cơ sở trực chuẩn không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở, và cũng được gọi là các *giá trị riêng.*

Thuật toán để tìm dạng chính tắc trục chính nêu ở trên hoàn toàn tương tự như trường hợp dạng toàn phương thực.

Ta cũng có các khái niệm tương tự như đối với dạng toàn phương thực. Chẳng hạn

Định nghĩa 29.11 Ta nói dạng toàn phương Hermite Γ *xác định dương* nếu $\Gamma(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Định lí 29.12 *Một dạng toàn phương Hermite là xác định dương khi và chỉ khi mọi giá trị riêng của nó là các số thực dương.*

Bài tập

Mọi không gian véc tơ trong phần này được xác định trên trường số phức.

Bài 29.1 Cho f là đa thức với hệ số thực và A là một ma trận Hermite. Chứng tỏ rằng $f(A)$ lại là ma trận Hermite.

Bài 29.2 Cho f là một dạng song tuyến tính liên hợp trên V và Γ là dạng toàn phương liên hợp tương ứng. Chứng minh rằng với mọi $x, y \in V$ ta có

$$f(x,y) = \frac{1}{4}[\Gamma(x+y) + i\Gamma(x+iy) - \Gamma(x-y) - i\Gamma(x-iy)].$$

Bài 29.3 Cho f là một dạng song tuyến tính liên hợp trên V và Γ là dạng toàn phương liên hợp tương ứng. Chứng minh rằng f là dạng Hermite khi và chỉ khi $\Gamma(x) \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in V$.

Bài 29.4 Cho E là một không gian unita. Chứng minh rằng ánh xạ $f : E^2 \to \mathbb{C}$ là một dạng song tuyến tính liên hợp khi và chỉ khi tồn tại một toán tử tuyến tính φ trên E sao cho

$$f(x, y) = \langle x, \varphi(y) \rangle$$

với mọi $x, y \in E$. Hơn nữa, nếu A là ma trận biểu diễn của f theo cơ sở trực chuẩn S, thì $\bar{A}$ là ma trận biểu diễn của φ theo S. Nói riêng φ được xác định duy nhất theo f.

Bài 29.5 Chứng tỏ rằng $\mathrm{Tr}(A\bar{B})$ là dạng song tuyến tính liên hợp trên $M(m, n; \mathbb{C}) \times M(n, p; \mathbb{C})$.

Bài 29.6 Chứng tỏ rằng có những dạng toàn phương liên hợp không chéo hóa được, nghĩa là không thể đưa được về dạng $c_1 y_1 \bar{y}_1 + \cdots + c_n y_n \bar{y}_n$ bằng một phép đổi biến không suy biến, trong đó $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Bài 29.7 a) Cho A là một ma trận Hermite cấp n. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{C}^n$ ta có $xA\bar{x}^T \in \mathbb{R}$.

b) Ma trận Hermite A được gọi là *ma trận xác định dương* nếu với mọi $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ ta có $xA\bar{x}^T > 0$. Chứng minh rằng một dạng toàn phương Hermite là xác định dương khi và chỉ khi mọi ma trận biểu diễn của nó xác định dương.

Bài 29.8 Cho A là một ma trận Hermite. Chứng minh rằng với mọi số thực dương c đủ lớn, $A + cI$ là ma trận Hermite xác định dương.

Bài 29.9 Chứng tỏ rằng tập hợp các ma trận Hermite cấp n lập thành một không gian véc tơ E trên $\mathbb{R}$ và $\mathrm{Tr}(AA)$ là một dạng toàn phương xác định dương.

Bài 29.10 Cho A là ma trận vuông trên trường số phức. Chứng minh rằng A là ma trận Hermite xác định dương khi và chỉ khi tồn tại ma trận không suy biến C sao cho $A = CC^*$.

Bài 29.11* Cho A là ma trận phức không suy biến. Chứng minh rằng tồn tại phân tích $A = UP$, trong đó A là ma trận unita và P là ma trận Hermite xác định dương. Hơn nữa phân tích này là duy nhất.

Bài 29.12* Chứng minh rằng nếu A là ma trận Hermite xác định dương thì nó có căn bậc hai, tức là có ma trận Hermite xác định dương B sao cho $A = B^2$. Hơn nữa, B như vậy được xác định duy nhất.

Bài 29.13 Chứng minh rằng nếu A là ma trận Hermite, thì tồn tại hai ma trận Hermite xác định dương P và Q sao cho $A = P - Q$.

Bài 29.14 Chứng tỏ rằng nếu A là ma trận Hermite thì các ma trận $I \pm iA$ là khả nghịch.

Bài 29.15 Chứng minh rằng Định lí Sylvester 28.6 cũng đúng cho các dạng toàn phương Hermite xác định dương.

Bài 29.16* Cho A là ma trận Hermite với các định thức góc là các số thực dương và B là ma trận unita. Chứng minh rằng AB và BA là các ma trận Hermite với các định thức góc là các số thực dương khi và chỉ khi $B = I$.

Bài 29.17 Cho φ là toán tử tuyến tính chéo hóa được của một không gian phức E hữu hạn chiều. Chứng minh rằng có thể xác định một dạng toàn phương Hermite xác định dương sao cho φ là toán tử

a) tự liên hợp

b) liên hợp lệch

c) unita

khi và chỉ khi điều kiện tương ứng sau đây (theo thứ tự) được thỏa mãn:

a) mọi giá trị riêng của φ là thực

b) mọi giá trị riêng của φ là thuần ảo hoặc bằng 0

c) mọi giá trị riêng của φ có môđun bằng 1.

Chương 9

Đại số đa tuyến tính

30 Ánh xạ đa tuyến tính

Cho $p+1$ không gian véc tơ $V_1, ..., V_p, U$ cùng xác định trên một trường K. Ánh xạ đa tuyến tính là ánh xạ tuyến tính theo từng biến (véc tơ) khi ta cố định các biến còn lại. Cụ thể

Định nghĩa 30.1 Ta gọi

$$\varphi : \prod_{i=1}^{p} V_i = V_1 \times \cdots \times V_p \to U$$

là *ánh xạ đa tuyến tính* (hay chính xác hóa hơn: *p-tuyến tính*), nếu với mọi $i = 1, ..., p$, $v_1 \in V_1, ..., v_p \in V_p$, $u_i \in V_i$ và $\alpha, \beta \in K$ ta có

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, ..., v_{i-1}, \alpha v_i + \beta u_i, v_{i+1}, ..., v_p) &= \alpha\varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_p) \\ &+\beta\varphi(v_1, ..., v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, ..., v_p).\end{aligned}$$

Khi $p = 2$ ta còn gọi φ là *ánh xạ song tuyến tính*, và khi $U = K$ ta cũng gọi φ là *dạng đa tuyến tính*.

Ví dụ 30.1 a) Khi $p = 1$ ta có khái niệm ánh xạ tuyến tính thông thường. Các dạng song tuyến tính (Mục 27) là các ánh xạ song tuyến tính.

b) Định thức của ma trận vuông cấp n là dạng n-tuyến tính trên tập các véc tơ cột (hoặc dòng).

c) Phép chiếu

$$\pi_i : \prod_{j=1}^{p} V_j \to V_i;\ \pi_i(v_1, ..., v_p) \mapsto v_i$$

là một ánh xạ đa tuyến tính.

d) Ánh xạ $(A, B) \mapsto AB$ là ánh xạ song tuyến tính từ $M(m, n; K) \times M(n, p; K)$ vào $M(m, p; K)$.

Ta có thể xác định một ánh xạ đa tuyến tính tương tự như đối với ánh xạ tuyến tính. Cụ thể tương tự Định lí 15.1 và Định lí 15.2 ta có

Định lí 30.2 *Cho $S_i = \{e_{i1}, ..., e_{im_i}\}$ là cơ sở của V_i, $i = 1, ...p$. Ánh xạ đa tuyến tính $\varphi : \prod_{i=1}^{p} V_i \to U$ được xác định duy nhất bởi ảnh của nó trên $S_1 \times \cdots \times S_p$. Nói cách khác, nếu $u_{1,...,1}, ..., u_{m_1,...,m_p}$ là một tập $m_1 \cdots m_p$ véc tơ tùy ý (có thể trùng nhau) trong U, thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $\varphi : \prod_{i=1}^{p} V_i \to U$ thỏa mãn điều kiện*

$$\varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = u_{i_1,...,i_p},\ 1 \le i_1 \le m_1, ..., 1 \le i_p \le m_p.$$

Ánh xạ này được xác định như sau: nếu $v = \sum \alpha_{i_1,...,i_p}(e_{i_1}, ..., e_{i_p})$ thì

$$\varphi(v) = \sum \alpha_{i_1,...,i_p} u_{i_1,...,i_p}.$$

Định lí 30.3 *Cho $S_i = \{e_{i1}, ..., e_{im_i}\}$ là cơ sở của V_i, $i = 1, ...p$ và $S = \{f_1, ..., f_m\}$ là cơ sở của U. Cho $\alpha_{i,i_1,...,i_p} \in K$, trong đó $1 \le i \le m$, $1 \le i_1 \le m_1$, ..., $1 \le i_p \le m_p$. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ đa tuyến tính $\varphi : \prod_{i=1}^{p} V_i \to U$ thỏa mãn điều kiện*

$$\varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) = \alpha_{1,i_1,...,i_p} f_1 + \cdots + \alpha_{m,i_1,...,i_p} f_m.$$

Nếu kí hiệu $(v_{i1}, ..., v_{im_i})$ là tọa độ của $v_i \in V_i$ và $(u_1, ..., u_m)$ là tọa độ của $u \in U$, thì tọa độ của $\varphi(v_1, ..., v_p)$ là

$$(\sum \alpha_{1,i_1,...,i_p} v_{1i_1} \cdots v_{pi_p}, ..., \sum \alpha_{m,i_1,...,i_p} v_{1i_1} \cdots v_{pi_p}).$$

Như vậy, khi cố định các cơ sở thì ánh xạ đa tuyến tính cũng được xác định bởi ma trận nhiều chiều $(\alpha_{i,i_1,...,i_p})$. Tuy nhiên khác với trường hợp ánh xạ tuyến tính, kiểu biểu diễn này không thuận tiện như trường hợp $p = 1$ vì không có những phép toán tương ứng với nhân ma trận hay phép lấy định thức (của ma trận vuông).

Bài tập

Bài 30.1 Cho $\varphi : U \times V \to W$ là ánh xạ song tuyến tính. Chứng tỏ rằng

$$\varphi(0, v) = \varphi(u, 0) = 0;\ \varphi(\alpha(u, v)) = \alpha^2\varphi(u, v).$$

Nói riêng φ không là ánh xạ tuyến tính.

Bài 30.2 a) Cho $\varphi : U \times V \to W$ là một ánh xạ song tuyến tính. Cho $U' \subsetneq U$ và $V' \subseteq V$ là các không gian con. Chứng tỏ rằng ánh xạ

$$\varphi' : U' \times V' \to W;\ \varphi'(u, v) = \varphi(u, v)\ \forall u \in U',\ v \in V'$$

là ánh xạ song tuyến tính. Nó được gọi là *ánh xạ hạn chế* của φ trên $U' \times V'$.

b) Cho $U = \oplus U_i$, $V = \oplus V_j$ và $\varphi_{ij} : U_i \times V_j \to W$ là các ánh xạ song tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ song tuyến tính $\varphi : U \times V \to W$ sao cho với mọi i, j thì φ_{ij} là ánh xạ hạn chế của φ.

c) Tổng quát các kết quả trên cho ánh xạ đa tuyến tính.

Bài 30.3 Cho $\varphi : \prod_{i=1}^{p} V_i \to U$ là ánh xạ p-tuyến tính và $0 < j_1 < \cdots < j_q < p$. Chứng tỏ rằng ánh xạ $\varphi' : \prod_{i=1}^{q} V_{j_i} \to U$ xác định bởi

$$\varphi'(v_{j_1}, ..., v_{j_q}) = \varphi(0, ..., 0, v_{j_1}, 0, ..., 0, v_{j_2}, ..., v_{j_q}, 0, ..., 0),$$

trong đó 0 xuất hiện ở tất cả các thành phần khác các chỉ số $j_1, ..., j_q$, là ánh xạ q-tuyến tính.

Bài 30.4 Cho $\varphi : U \times V \to W$ là một ánh xạ song tuyến tính. Cho $U' \subseteq U$, $V' \subseteq V$ và $W' \subseteq W$ là các không gian con. Tìm điều kiện cần và đủ để phép tương ứng sau đây

$$\bar{\varphi} : U/U' \times V/V' \longrightarrow W/W';\ (u + U', v + V') \longmapsto \varphi(u, v) + W'$$

là một ánh xạ. Chứng tỏ rằng trong trường hợp ấy, $\bar{\varphi}$ là một ánh xạ song tuyến tính.

Hãy tổng quát cho trường hợp ánh xạ đa tuyến tính.

Bài 30.5 Chứng tỏ rằng tập hợp $L(V_1, ..., V_p; U)$ các ánh xạ đa tuyến tính từ $\prod V_i \to U$ với hai phép toán:

$$(\varphi + \psi)(v_1, ..., v_p) = \varphi(v_1, ..., v_p) + \psi(v_1, ..., v_p),$$

và

$$(\alpha\varphi)(v_1, ..., v_p) = \alpha\varphi(v_1, ..., v_p),\ \alpha \in K,$$

lập thành một không gian véc tơ trên K.

Tính $\dim L(V_1, ..., V_p; U)$ biết rằng $d_i = \dim V_i$ và $d = \dim U$.

Bài 30.6 Chứng minh rằng

$$L(U,V;W) \cong L(U,L(V,W)) \cong L(V,L(U,W)).$$

(Xem kí hiệu trong Bài 13.9). Hãy tổng quát cho trường hợp không gian các ánh xạ p-tuyến tính.

Bài 30.7 Cho U,V là hai không gian véc tơ không tầm thường. Chứng tỏ rằng ánh xạ

$$\beta:\ L(U,V)\times U \to V;\ \beta(\varphi,u)=\varphi(u)$$

là ánh xạ song tuyến tính và là toàn ánh.

Bài 30.8 Cho ánh xạ song tuyến tính $\varphi:\ V_1\times V_2 \to U$, kí hiệu

$N_1(\varphi)=\{x\in V_1;\ \varphi(x,y)=0\ \forall y\in V_2\}$;

$N_2(\varphi)=\{y\in V_2;\ \varphi(x,y)=0\ \forall x\in V_1\}$.

Chứng tỏ rằng đây là các không gian con. Hơn nữa, nếu kí hiệu ánh xạ cảm sinh (xem Bài 30.4)

$$\bar{\varphi}:\ V_1/N_1(\varphi)\times V_2/N_2(\varphi)\to U,$$

thì $N_1(\bar{\varphi})=0$ và $N_2(\bar{\varphi})=0$.

Bài 30.9 Cho V là không gian véc tơ và $V^*=\mathrm{Hom}(V,K)=L(V,K)$ là không gian đối ngẫu. Chứng tỏ rằng ánh xạ

$$\varphi:\ V^*\times V^*\to V^*;\ [\varphi(f,g)](v)=f(v)g(v)$$

là dạng song tuyến tính và $N_1(\varphi)=0$, $N_2(\varphi)=0$.

Bài 30.10 Cho V là không gian véc tơ không tầm thường và V^* là không gian đối ngẫu. Chứng tỏ rằng ánh xạ

$$\varphi:\ V^*\times V\to K;\ \varphi(f,v)=f(v)$$

là một dạng song tuyến tính với $N_1(\varphi)=0$, $N_2(\varphi)=0$.

31 Tích tenxơ

Như mục trước, ta chỉ xét các không gian véc tơ trên trường K.

Định nghĩa 31.1 Cho $p \geq 2$ không gian véc tơ $V_1, ..., V_p$. Kí hiệu $\mathcal{T}$ là không gian véc tơ nhận $V_1 \times \cdots \times V_p$ làm cơ sở, tức là tập hợp các tổng hữu hạn hình thức

$$\mathcal{T} = \{ \sum_{v_1 \in V_1, ..., v_p \in V_p} \alpha_{v_1,...,v_p}(v_1, ..., v_p);\ \alpha_{v_1,...,v_p} \in K \}.$$

Trong mỗi tổng ở trên chỉ có hữu hạn phần tử $\alpha_{v_1,...,v_p}$ khác 0. Kí hiệu H là không gian con của $\mathcal{T}$ sinh bởi tất cả các phần tử dạng sau:

$$\begin{aligned} (v_1, ..., v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1}, ..., v_p) \quad & -(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_p) \\ & -(v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_p), \\ (v_1, ..., v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, ..., v_p) \quad & -\alpha(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_p), \end{aligned}$$

trong đó $v_j \in V_j$, $\alpha \in K$ và $i = 1, ..., p$. Khi đó không gian thương

$$T = \otimes_{i=1}^{p} V_i = V_1 \otimes \cdots \otimes V_p := \mathcal{T}/H$$

được gọi là *tích tenxơ* của $V_1, ..., V_p$.

Ta kí hiệu phép chiếu tự nhiên từ $\mathcal{T}$ lên T bởi τ và

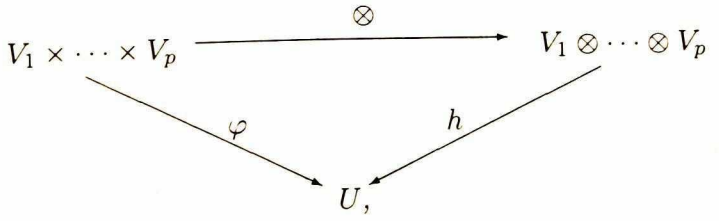
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p := \tau(v_1, ..., v_p),$$

với mọi $v_1 \in V_1, ..., v_p \in V_p$. Những phần tử này được gọi là các *tenxơ cơ bản*.

Chú ý rằng $V_1 \times \cdots \times V_p$ là tập hợp con của $\mathcal{T}$ và cũng có cấu trúc của không gian véc tơ (như là không gian tích), nhưng nó không phải là không gian con của $\mathcal{T}$. Ta kí hiệu $\otimes$ là ánh xạ hạn chế của τ trên $V_1 \times \cdots \times V_p$.

Bổ đề 31.2 $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ *là ánh xạ p-tuyến tính.*

Định lí 31.3 (Tính phổ dụng) *Với mọi ánh xạ đa tuyến tính* $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to U$ *tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính* $h : V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \to U$ *làm cho biểu đồ sau giao hoán:*



tức là $\varphi = h \circ \otimes$.

Ngược lại, cho T *là không gian véc tơ và* $\omega : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$ *có tính chất như trên, nghĩa là với mọi ánh xạ đa tuyến tính* $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to U$ *tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính* $h : T \to U$ *sao cho* $\varphi = h \circ \omega$. *Khi đó* T *đẳng cấu với* $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$.

Chú ý 31.4 Thông thường người ta lấy tính phổ dụng trong định lí trên làm định nghĩa, còn chứng minh sự tồn tại bằng cách xây dựng nêu trong định nghĩa trước đó!

Nói một cách chính xác hơn, tích tenxơ là một cặp (T, ω) gồm không gian véc tơ T và ánh xạ đa tuyến tính $\omega : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$ có tính chất phổ dụng nêu trên.

Dưới đây là một số tính chất cơ bản của tích tenxơ. Để diễn đạt cho gọn, đối với một số kết quả ta chỉ phát biểu cho tích tenxơ của hai không gian véc tơ (trường hợp nhiều không gian được phát biểu hoàn toàn tương tự).

Mệnh đề 31.5 *Cho* $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ *và* $\alpha \in K$. *Khi đó*

a) $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$,

b) $u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$,

c) $(\alpha u) \otimes v = \alpha(u \otimes v) = u \otimes (\alpha v)$.

d) Các tenxơ cơ bản là hệ sinh của $U \otimes V$.

Bổ đề 31.6 *Giả sử* $u_1, ..., u_n \in U$ *là các véctơ độc lập tuyến tính trong* U *và* $v_1, ..., v_n \in V$. *Khi đó quan hệ*

$$u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_n \otimes v_n = 0$$

dẫn đến $v_1 = \cdots = v_n = 0$.

Mệnh đề 31.7 *Cho* V_1, V_2, V_3 *là các không gian véc tơ tùy ý. Khi đó tồn tại các đẳng cấu tự nhiên*

a) (Tính chất giao hoán) $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ *sao cho* $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$.

b) (Tính chất kết hợp)

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \longrightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

và

$$g : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \longrightarrow V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

sao cho

$$f(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3,\ g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3).$$

Định lí 31.8 *Giả sử* $(e_i;\ i \in I)$ *là cơ sở của* U *và* $(f_j;\ j \in J)$ *là cơ sở của* V. *Khi đó* $(e_i \otimes f_j;\ i \in I, j \in J)$ *là cơ sở của* $U \otimes V$. *Nói riêng, nếu* U, V *là hai không gian véc tơ hữu hạn chiều thì*

$$\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V.$$

Từ kết quả trên suy ra nếu $U' \subseteq U$ và $V' \subseteq V$ thì ta có thể xem $U' \otimes V'$ là không gian con của $U \otimes V$.

Mệnh đề 31.9 *Cho* $U = \oplus U_i$ *và* $V = \oplus V_j$. *Khi đó*

$$U \otimes V = \oplus_{i,j}(U_i \otimes V_j).$$

Định lí 31.10 *Cho* $U_1, U_2 \subseteq U$ *và* $V_1, V_2 \subseteq V$. *Khi đó*

$$(U_1 \otimes V_1) \cap (U_2 \otimes V_2) = (U_1 \cap U_2) \otimes (V_1 \cap V_2).$$

Bài tập

Bài 31.1 Chứng minh rằng mọi phần tử của $U \otimes V$ đều có thể viết dưới dạng $\sum_j u_j \otimes v_j$, trong đó $u_j \in U,\ v_j \in V$. Hơn nữa có thể giả thiết cả hai hệ véctơ u_j và v_j đều độc lập tuyến tính.

Bài 31.2 Cho $\tau : U \otimes V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng tỏ rằng ánh xạ

$$(u, v) \mapsto \tau(u \otimes v)$$

là một ánh xạ song tuyến tính.

Bài 31.3 Cho V là không gian véc tơ trên K. Chứng tỏ rằng $V \otimes K \cong V$.

Bài 31.4 Chứng tỏ rằng ánh xạ song tuyến tính:

$$\begin{aligned} K^n \times K^m &\to M(m, n; K); \\ ((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_m)) &\mapsto (a_1, ..., a_n)^T \cdot (b_1, ..., b_m). \end{aligned}$$

cảm sinh ra đẳng cấu giữa $M(n, m; K)$ và $K^n \otimes K^m$.

Bài 31.5 Chứng tỏ rằng ánh xạ song tuyến tính:

$$K^n \times V \to \oplus^n V;\ ((a_1, ..., a_n), v) \mapsto (a_1 v, ..., a_n v)$$

cảm sinh ra đẳng cấu giữa $K^n \otimes V$ và $\oplus^n V$.

Bài 31.6 Chứng minh rằng $L(U, V; W) \cong L(U \otimes V, W)$.

Bài 31.7 Chứng minh rằng tồn tại đẳng cấu

$$\varphi :\ \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$$

của các không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ sao cho $\varphi((a_1, ..., a_n) \otimes \alpha) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$

Bài 31.8 Cho V là không gian véc tơ trên K và L là mở rộng trường của K. Chứng minh rằng tập $V \otimes L$ với phép cộng thông thường (như là không gian véc tơ trên K) và phép nhân vô hướng

$$\alpha \cdot \sum_j c_j (v_j \otimes \beta_j) := \sum_j c_j (v_j \otimes (\alpha \beta_j)),$$

trong đó $\alpha, \beta_j \in L,\ c_j \in K$ lập thành không gian véc tơ trên L.

Bài 31.9 Xem $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ như là không gian véc tơ trên $\mathbb{C}$ theo Bài 31.8. Chứng minh rằng ánh xạ trong Bài 31.7 là một đẳng cấu của các không gian trên $\mathbb{C}$.

Bài 31.10* Cho L là mở rộng trường của K. Chứng minh rằng $K^n \otimes L \cong L^n$ như là các không gian véc tơ trên L.

Bài 31.11 Cho $A :\ V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $F : V \otimes V \to V \otimes V$ sao cho

$$F(u \otimes v) = A(u) \otimes A(v).$$

Bài 31.12 Cho $A :\ U \to U$ và $B : V \to V$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $F : U \otimes V \to U \otimes V$ sao cho

$$F(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v).$$

Ánh xạ này được kí hiệu là $A \otimes B$.

Bài 31.13 Cho S và T là hai tập hợp nào đó. Kí hiệu $C(S)$ là không gian véc tơ gồm các ánh xạ f từ S vào K sao cho $f(s) \neq 0$ chỉ tại hữu hạn phần tử. Tương tự ta có $C(T)$, $C(S \times T)$. Chứng minh rằng $C(S \times T) \cong C(S) \otimes C(T)$.

Bài 31.14* Hãy đưa ví dụ cụ thể chứng tỏ nói chung một phần tử $0 \neq x \in U \otimes V$ có thể có nhiều cách biểu diễn dưới dạng:

$$z = \sum u_i \otimes v_i,$$

trong đó $u_i \in U$ độc lập tuyến tính và $v_i \in V$ cũng độc lập tuyến tính. Tuy nhiên chứng minh rằng nếu có hai biểu diễn

$$z = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{s} u'_i \otimes v'_i,$$

với tính chất trên, thì $r = s$.

Bài 31.15 Giả sử $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \neq 0$ trong $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$. Chứng minh rằng

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$$

khi và chỉ khi $v_i = \lambda_i u_i$ $(i = 1, ..., p)$ và $\lambda_1 \cdots \lambda_p = 1$.

Bài 31.16 Cho $\varphi \in L(U, U')$ và $\psi \in L(V, V')$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính được kí hiệu là $\varphi \otimes \psi$ từ $U \otimes V$ vào $U' \otimes V'$ thỏa mãn điều kiện

$$(\varphi \otimes \psi)(u \otimes v) = \varphi(u) \otimes \psi(v).$$

Nó được gọi là *tích tenxơ của hai ánh xạ.*

Bài 31.17* Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đơn ánh

$$F : L(U, U') \otimes L(V, V') \longrightarrow L(U \otimes V, U' \otimes V'),$$

sao cho ảnh của $\varphi \otimes \psi$ xét như phần tử của tích $L(U, U') \otimes L(V, V')$ chính là tích tenxơ của hai ánh xạ φ và ψ được định nghĩa trong Bài 31.16. Hơn nữa, nếu U, V là các không gian hữu hạn chiều thì F là đẳng cấu.

Bài 31.18* Hãy tìm ví dụ chứng tỏ ánh xạ F nêu trong Bài 31.17 không là toàn cấu.

Bài 31.19 Cho $\varphi \in L(U,V)$ và $\psi \in L(U',V')$. Chứng minh rằng
a) $\mathrm{Im}(\varphi \otimes \psi) = \mathrm{Im}(\varphi) \otimes \mathrm{Im}(\psi)$.
b) $\mathrm{Ker}(\varphi \otimes \psi) = \mathrm{Ker}\,\varphi \otimes V + U \otimes \mathrm{Ker}\,\psi$.

Bài 31.20 Cho $\varphi \in L(U,V)$ và $\psi \in L(U',V')$.
a) Chứng minh rằng $\varphi \otimes \psi$ là đơn ánh khi và chỉ khi φ và ψ là đơn ánh.
b) Giả sử $\dim U$, $\dim V < \infty$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{rank}(\varphi \otimes \psi) = \mathrm{rank}(\varphi)\,\mathrm{rank}(\psi).$$

Bài 31.21* Cho φ, ψ tương ứng là hai toán tử tuyến tính của hai không gian véc tơ hữu hạn chiều $U = K^n$ và $V = K^m$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Det}(\varphi \otimes \psi) = (\mathrm{Det}\,\varphi)^m (\mathrm{Det}\,\psi)^n.$$

Bài 31.22* Cho $V_1, ..., V_n$ là các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \cong (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*.$$

Bài 31.23 Chứng minh rằng $U^* \otimes V \cong L(U,V)$ nếu $\dim U < \infty$. Khi $\dim U = \infty$ điều đó có còn đúng không?

Bài 31.24 Cho U_i, U_i^* và V_i, $V_i^*, (i = 1,2)$ là 4 cặp không gian véc tơ đối ngẫu. Cho

$$\varphi_1 : U_1 \to V_1;\ \varphi_1^* : V_1^* \to U_1^*,$$

và

$$\varphi_2 : U_2 \to V_2;\ \varphi_2^* : V_2^* \to U_2^*$$

là hai cặp ánh xạ đối ngẫu. Chứng minh rằng, nếu đồng nhất $(U_1 \otimes U_2)^*$ với $U_1^* \otimes U_2^*$ và đồng nhất $(V_1 \otimes V_2)^*$ với $V_1^* \otimes V_2^*$ (xem Bài 31.22) thì

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)^* = \varphi_1^* \otimes \varphi_2^*.$$

32 Đại số đối xứng và đại số ngoài

Định nghĩa 32.1 Cho V là không gian véc tơ trên K. Với mỗi $p \geq 2$ ta kí hiệu

$$\otimes^p V = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p}.$$

Ta cũng kí hiệu $\otimes^0 V = K$ và $\otimes^1 V = V$. Không gian $\otimes^p V$ được gọi là *lũy thừa tenxơ bậc p*.

Tenxơ bậc $p \geq 1$ dạng $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ và các tenxơ bậc 0 (tức phần tử thuộc trường K) được gọi là *tenxơ khả qui*.

Theo (mở rộng của) Mệnh đề 31.7 ta có

$$(\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V) \cong \otimes^{p+q} V,$$

và ta cũng có thể đồng nhất

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) \equiv v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}.$$

Định lí - Định nghĩa 32.2 *Trên không gian véc tơ trên K*

$$\otimes V = \oplus_{p=0}^{\infty}(\otimes^p V),$$

ta xác định phép nhân như sau: nếu

$$u = \sum_p u_p,\ u_p \in \otimes^p V;\ v = \sum_q v_q,\ v_q \in \otimes^q V,$$

(trong mỗi tổng chỉ có hữu hạn số hạng), thì

$$uv := \sum_{p,q} u_p \otimes v_q.$$

Khi đó $\otimes V$ lập thành một K-đại số kết hợp, phân bậc, có đơn vị. Ta gọi nó là đại số tenxơ của V.

Ví dụ 32.1 Theo Bài 31.1, ta có thể viết một phần tử của $\otimes^p V$ dưới dạng

$$\sum_{\underline{\alpha}} v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_p},$$

trong đó $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^p$ và tổng chỉ có hữu hạn số hạng. Một phần tử tùy ý của $\otimes V$ được viết dưới dạng

$$\sum_p \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^p} v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_p}.$$

Tuy nhiên, nếu $\dim V = n$ và ta cố định một cơ sở $e_1, ..., e_n$ của V, thì một phần tử của $\otimes^p V$ có thể viết dưới dạng

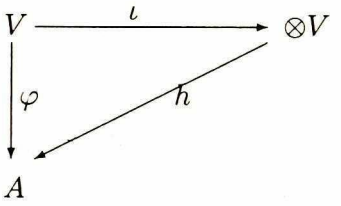
$$\sum_{\alpha_1,...,\alpha_p=1}^{n} \xi_{\underline{\alpha}} e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}.$$

Với định nghĩa phép nhân trong $\otimes V$ như trên, ta có

$$v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_p} = v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_p}.$$

Đại số này có tính chất phổ dụng như sau:

Định lí 32.3 *Ta kí hiệu $\iota : V \to \otimes V$ là ánh xạ $\iota(v) = v \in \otimes^1 V$. Cho A là một K-đại số kết hợp với đơn vị e và một ánh xạ tuyến tính: $\varphi : V \to A$. Khi đó tồn tại duy nhất một đồng cấu đại số $h : \otimes V \to A$ sao cho $h(1) = e$ và $h \circ \iota = \varphi$, tức là sao cho ta có biểu đồ giao hoán:*



Ta kí hiệu A_p là không gian con của $\otimes^p V$ sinh bởi các tenxơ có dạng

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)},$$

trong đó $\sigma \in S_p$ - nhóm các hoán vị của $1, ..., p$. Ta gọi

$$S^p(V) = (\otimes^p V)/A_p$$

là *lũy thừa đối xứng bậc p* của V. Mỗi phần tử của nó được gọi là *tenxơ đối xứng* trên V. Đặt

$$A := \oplus_{p=0}^{\infty} A_p \subseteq \otimes V.$$

Khi đó A là iđêan hai phía thuần nhất của $\otimes V$.

Định nghĩa 32.4 Ta gọi đại số thương

$$S(V) := (\otimes V)/A \cong \sum_{p=0}^{\infty} S^p(V)$$

là *đại số đối xứng* của không gian véc tơ V.

Tích của hai phần tử $x \in S^p(V)$ và $y \in S^q(V)$ được kí hiệu là xy và được gọi là *tích đối xứng* của x và y.

Mệnh đề 32.5 *Đại số đối xứng $S(V)$ là một vành giao hoán, có đơn vị.*

Định lí 32.6 *Cho $\dim V = n$ và $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của V. Khi đó hệ véc tơ*

$$(e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n};\ i_1, ..., i_n \in \mathbb{N})$$

lập thành cơ sở của $S(V)$. Hơn nữa $S(V)$ đẳng cấu với vành đa thức n biến như là các đại số.

Định nghĩa 32.7 Ta kí hiệu $B_p(V)$ là không gian con của $\otimes^p V$ sinh bởi các tenxơ có dạng $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$, trong đó $v_i = v_j$ đối với ít nhất một cặp chỉ số $i \neq j$ nào đó. Ta gọi không gian thương

$$\wedge^p(V) = (\otimes^p V)/B_p$$

là *lũy thừa ngoài bậc p* của V. Các phần tử của $\wedge^p(V)$ được gọi là *p-véctơ*. Ảnh của $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ được kí hiệu là $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$.

Đại số thương

$$\wedge(V) = (\otimes V)/(\oplus_{p=0}^{\infty} B_p) \cong \oplus_{p=0}^{\infty} \wedge^p (V)$$

được gọi là *đại số ngoài* của V.

Tích của ω và η trong $\wedge(V)$ được kí hiệu là $\omega \wedge \eta$ và được gọi là *tích ngoài*.

Định nghĩa 32.8 Ta gọi ánh xạ đa tuyến tính $\varphi : V^p \to U$ là *thay phiên*, nếu

$$\varphi(v_1, ..., v_n) = 0$$

khi $v_i = v_j$ đối với ít nhất một cặp chỉ số $i \neq j$ nào đó.

Ví dụ 32.2 a) Cho $v_1, ...v_p \in K^p$ là các véc tơ cột. Khi đó ánh xạ định thức

$$(v_1, ..., v_p) \longmapsto | v_1, ..., v_p |$$

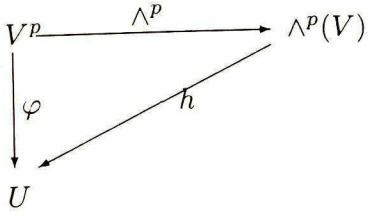
là ánh xạ đa tuyến tính thay phiên.

b) Ánh xạ

$$\wedge^p : V^p \longrightarrow \wedge^p(V);\ (v_1, ..., v_p) \longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$$

là một ánh xạ đa tuyến tính thay phiên.

Mệnh đề 32.9 *Cặp $(\wedge^p(V), \wedge^p)$ gồm một không gian véc tơ và một ánh xạ p-tuyến tính thay phiên có tính chất phổ dụng sau đây: Với mọi ánh xạ đa tuyến tính thay phiên $\varphi : V^p \to U$ tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h : \wedge^p(V) \to U$ làm cho biểu đồ*



giao hoán, tức là $\varphi = h \circ \wedge^p$.

Mệnh đề 32.10 *Cho* $\omega \in \wedge^p(V)$ *và* $\eta \in \wedge^q(V)$. *Khi đó*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega.$$

Định lí 32.11 *Cho* $n = \dim V$. *Khi đó*

(i) $\wedge^p(V) = 0$ *với mọi* $p > n$.

(ii) Giả sử $(e_1, ..., e_n)$ *là một cơ sở của* V. *Khi đó hệ p-véc tơ*

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p};\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

lập thành cơ sở của $\wedge^p(V)$. *Nói riêng* $\dim \wedge^p(V) = \binom{n}{p}$.

Bài tập

Bài 32.1 Cho $v_1 = x_1 \otimes y_1$ và $v_2 = x_2 \otimes y_2$ là hai tenxơ khả qui (trong $\otimes^2 V$). Giả sử $v_1 \neq 0$. Chứng tỏ rằng $v_1 + v_2$ khả qui khi và chỉ khi $x_2 = \alpha x_1$, hoặc $y_2 = \alpha y_1$, $\alpha \in K$.

Bài 32.2 Chứng tỏ rằng đại số tenxơ $\otimes V$ không giao hoán, trừ phi $\dim V = 1$.

Bài 32.3 Cho $\dim V = n$. Chuỗi Poincaré của $\otimes V$ được định nghĩa như sau

$$P(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \dim(\otimes^p V) t^p.$$

Chứng minh rằng $P(t) = 1/(1 - nt)$.

Bài 32.4 Cho $\dim V = n$. Chứng minh rằng $\otimes V$ đẳng cấu với vành đa thức n biến không giao hoán.

Bài 32.5 Cho $V \neq 0$. Chứng tỏ rằng ánh xạ song tuyến tính:

$$\beta : (\otimes V) \times (\otimes V) \to \otimes V : (u, v) \mapsto u \otimes v,$$

cùng với $\otimes V$ không là tích tenxơ (xem Chú ý 31.4).

Bài 32.6 Kí hiệu $V^p = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p}$ và $\varphi : V^p \to S^p(V)$ với $\varphi(v_1, ..., v_p) = v_1 \cdots v_p$. Chứng minh rằng cặp $(S^p(V), \varphi)$ có tính chất phổ dụng sau đây: với mọi ánh xạ p-tuyến tính đối xứng $\psi : V^p \to U$ (nghĩa là $\psi(v_1, ..., v_p) = \psi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)})$ nếu $\sigma \in S_p$), tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h : S^p(V) \to U$ sao cho $\psi = h \circ \varphi$.

Bài 32.7* Giả sử $\operatorname{char} K = 0$. Cho $\varphi : V \times \cdots \times V \to U$ là ánh xạ p-tuyến tính đối xứng sao cho

$$\varphi(v, ..., v) = 0$$

với mọi $v \in V$. Chứng minh rằng $\varphi = 0$.

Bài 32.8 Chứng minh rằng hệ các véctơ

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_p - v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_p,$$

trong đó $1 \leq i < j \leq p$ và $v_1, ..., v_p \in V$, là hệ sinh của A_p.

Bài 32.9 Giả sử $\operatorname{char} K = 0$. Ta định nghĩa tác động của một hoán vị σ trên $\otimes^p V$ như sau: nếu $u = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$, thì $\sigma(u) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}$. Xét toán tử tuyến tính sau đây của $\otimes^p V$:

$$\pi_S = \frac{1}{p} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma.$$

Chứng minh rằng $\operatorname{Ker} \pi_S = A_p$. Từ đó suy ra $S^p(V) \cong \operatorname{Im}(\pi_S) \subset \otimes^p V$.

Bài 32.10 Giả sử $\operatorname{char} K = 0$. Cho π_S là toán tử tuyến tính của $\otimes^p V$ được xác định trong Bài 32.9. Chứng minh rằng $\operatorname{Im}(\pi_S)$ là tập hợp các tenxơ $u \in \otimes^p V$ bất biến với π_S, tức là $\pi_S(u) = u$. Nói cách khác, ta có thể xem $S^p(V)$ là tập các tenxơ bất biến đối với π_S. Hơn nữa

$$\otimes^p V = S^p(V) \oplus A_p.$$

Bài 32.11 Với mọi $u \in \otimes^p V$ và mọi hoán vị $\sigma \in S_p$, hãy chứng tỏ rằng $u - \operatorname{sign}(\sigma)\sigma(u) \in B_p$, trong đó $\operatorname{sign}(\sigma)$ là hàm dấu của σ (xem thêm Bài 32.9).

Bài 32.12 Giả sử $\operatorname{char} K = 0$. Toán tử thay phiên hóa $\pi_A : \otimes^p V \to \otimes^p V$ được định nghĩa như sau:

$$\pi_A = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sign}(\sigma)\sigma.$$

Chứng minh rằng $B_p = \operatorname{Ker}\pi_A$, tức là $\wedge^p(V) \cong \operatorname{Im}(\pi_A)$. Hơn nữa, nếu kí hiệu $X^p(V)$ là tập các tenxơ $u \in \otimes^p V$ sao cho $\sigma(u) = \operatorname{sign}(\sigma)u$ với mọi $\sigma \in S_p$, thì

$$\otimes^p V = B_p \oplus X^p(V).$$

Bài 32.13 Giả sử V là không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ song tuyến tính $F : \wedge^p(V) \times \wedge^p(V^*) \to K$ sao cho

$$F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, \varphi_1 \wedge \cdots \varphi_p) = \operatorname{Det}(\varphi_i(v_j)).$$

Từ đó suy ra

$$\wedge^p(V^*) \cong (\wedge^p(V))^*.$$

(Vì lí do này, mỗi phần tử của $\wedge^p(V^*)$ được gọi là *p-dạng ngoài trên V).*

Bài 32.14 Giả sử $\operatorname{char} K = 0$. Chứng minh rằng một ánh xạ đa tuyến tính $\varphi : V^p \to U$ là thay phiên khi và chỉ khi $\sigma\varphi = \operatorname{sign}(\sigma)\varphi$ với mọi $\sigma \in S_p$, trong đó

$$\sigma\varphi(v_1, \ldots, v_p) = \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}).$$

Bài 32.15 Cho φ là ánh xạ đa tuyến tính thay phiên. Chứng minh rằng nếu $v_1, \ldots, v_p$ phụ thuộc tuyến tính thì $\varphi(v_1, \ldots, v_p) = 0$.

Bài 32.16 Cho $\dim V = n$.

a) Chứng minh rằng với mỗi ánh xạ n-tuyến tính thay phiên $\varphi : V^n \to U$ luôn tìm được véctơ $u \in U$ sao cho

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \Delta(v_1, \ldots, v_n)u,$$

trong đó $\Delta(v_1, \ldots, v_n)$ là định thức của ma trận gồm các véctơ cột tọa độ của $v_1, \ldots, v_n$ theo một cơ sở cố định S nào đó của V.

b)* Chứng minh rằng mọi dạng $(n-1)$-tuyến tính thay phiên $\Phi : V^{n-1} \to K$ đều có thể viết được dưới dạng

$$\Phi(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \Delta(v_1, \ldots, v_{n-1}, x_\Phi),$$

trong đó $x_\Phi \in V$ là một véc tơ cố định.

Bài 32.17 Giả sử $\operatorname{char} K = 0$. Lũy thừa ngoài bậc k của phần tử $u \in \wedge(V)$ là phần tử

$$u^k = \frac{1}{k!}\underbrace{u \wedge \cdots \wedge u}_{k},\ k \geq 1;\ u^0 = 1 \in K.$$

Chứng tỏ rằng

$$\begin{aligned} u^k \wedge u^l &= \tbinom{k+l}{k} u^{k+l}, \\ (u+v)^k &= \textstyle\sum_{i+j=k} u^i \wedge v^j. \end{aligned}$$

Bài 32.18 Chứng minh tính chất phổ dụng sau đây của đại số ngoài: Cho A là đại số kết hợp có đơn vị và cho ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to A$ sao cho

$$(\varphi(v))^2 = 0, \ \forall v \in V.$$

Khi đó tồn tại duy nhất một đồng cấu đại số $h : \wedge(V) \to A$ sao cho $h(1) = e$ và $\varphi = h \circ \iota$, trong đó $\iota : V \hookrightarrow \wedge(V) : v \mapsto v$ là ánh xạ nhúng.

Bài 32.19* Giả sử $\operatorname{char} K \neq 2$. Chứng minh rằng 2-véctơ z là khả qui khi và chỉ khi $z \wedge z = 0$.

Bài 32.20 Cho E là không gian Ơclit. Chứng minh rằng trên $\wedge(E)$ có tích vô hướng sao cho

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \operatorname{Det}(\langle u_i, v_j \rangle).$$

Bài 32.21 Cho $\varphi : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng có thể mở rộng φ một cách duy nhất thành đồng cấu đại số $\varphi_\wedge : \wedge(U) \to \wedge(V)$ sao cho $\varphi_\wedge(1) = 1$. Hơn nữa, nếu $\psi : V \to W$ thì

$$(\psi \circ \varphi)_\wedge = \psi_\wedge \circ \varphi_\wedge.$$

Bài 32.22 Chứng minh rằng nếu φ là toàn ánh hoặc đơn ánh thì ánh xạ $\varphi_\wedge$ xác định trong Bài 32.21 cũng có tính chất đó.

Bài 32.23 Cho $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của không gian véc tơ hữu hạn chiều V. Cho

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ &\cdots \\ u_n &= a_{n1}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Hãy biểu diễn $u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ qua $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

Bài 32.24 Cho $\dim V = n$ và $r > n$. Chứng minh rằng mọi ánh xạ tuyến tính thay phiên $f : V^r \to U$ là ánh xạ 0.

Bài 32.25 Cho $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của không gian véc tơ hữu hạn chiều V và $\varphi : V^n \to U$ là một ánh xạ đa tuyến tính thay phiên. Chứng minh rằng với mọi toán tử tuyến tính: $A : V \to V$ và $v_1, ..., v_n \in V$ ta có

$$\varphi(Av_1, ..., Av_n) = \operatorname{Det}(A)\varphi(v_1, ..., v_n).$$

Chương 10

Hình học giải tích

33 Không gian afin và ánh xạ afin

Định nghĩa 33.1 *Không gian afin* trên trường K là một bộ đôi $(\mathbb{A}, V)$ gồm tập điểm $\mathbb{A}$ và một không gian véc tơ V trên K cùng với phép toán hai ngôi

$$\mathbb{A} \times V \to \mathbb{A} : \ (a, v) \mapsto a + v,$$

thỏa mãn các tiên đề sau:

(i) $(a + u) + v = a + (u + v)$ với mọi $a \in \mathbb{A}$ và $u, v \in V$, trong đó phép cộng trên V cũng được kí hiệu chung là $+$.

(ii) $a + 0 = a$ với mọi $a \in \mathbb{A}$, còn 0 là véc tơ không,

(iii) Với mọi $a, b \in \mathbb{A}$ tồn tại duy nhất một véc tơ $v \in V$ sao cho $b = a + v$.

Chiều của không gian afin $(\mathbb{A}, V)$ là chiều của V và được kí hiệu là $\dim \mathbb{A}$.

Không gian véc tơ V được xác định duy nhất bởi tập điểm $\mathbb{A}$. Vì vậy trong đa số các trường hợp, không gian afin được kí hiệu đơn giản là $\mathbb{A}$, và ta cũng nói nó là *không gian afin liên kết* với V.

Ví dụ 33.1 a) Tập $\mathbb{A}$ là tập các điểm, còn V là tập các véc tơ tự do trên mặt phẳng hoặc không gian Oclit thông thường.

b) Cho V là không gian véc tơ tùy ý. Cặp (V, V) là không gian afin với phép cộng điểm và véc tơ trùng với phép cộng các véc tơ! Như vậy ở đây mỗi véc tơ vừa đóng vai trò là điểm, vừa đóng vai trò là véc tơ. Không gian afin n-chiều (K^n, K^n) được kí hiệu là $\mathbb{A}^n_K$, hoặc đơn giản là $\mathbb{A}^n$.

c) Cho $\mathbb{A}$ là tập điểm trên đường thẳng $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x-y=1\}$, còn V là tập các véc tơ $(x,x) \in \mathbb{R}^2$. Khi đó (A,V) là không gian afin.

Cho $a,b \in \mathbb{A}$. Véc tơ v duy nhất xác định trong tiên đề (iii) nêu trên được kí hiệu là $b-a$, hoặc $\overrightarrow{ab}$. Đây chính là véc tơ gốc a đầu mút b, nếu $\mathbb{A}$ là không gian Oclit thông thường. Ta có thể xem đây là phép toán trừ ngoài: $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$.

Mệnh đề 33.2 *Với mọi $a,b,c \in \mathbb{A}$ và $u,v \in V$, ta có*

(i) $a-a=0$ *(hay* $\overrightarrow{aa}=0$*),*

(ii) $b-a=-(a-b)$ *(hay* $\overrightarrow{ab}=-\overrightarrow{ba}$*),*

(iii) $(c-b)+(b-a)=c-a$ *(hay* $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{ac}$ *- qui tắc tam giác),*

(iv) $(a+v)-(b+u)=(a-b)+(v-u)$.

(v) $a+(b-c)=b+(a-c)$.

Định nghĩa 33.3 *Ánh xạ afin* từ không gian$(\mathbb{A}_1,V_1)$ vào $(\mathbb{A}_2,V_2)$ là cặp ánh xạ (f,Df), trong đó $f:\ \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ và $Df:\ V_1 \to V_2$, thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Df là ánh xạ tuyến tính,

(ii) Với mọi $a,b \in \mathbb{A}$: $f(a)-f(b)=Df(a-b)$.

Ta gọi Df là *phần tuyến tính* của f. Nó được xác định duy nhất bởi f. Do vậy ta thường hiểu ánh xạ afin (f,Df) đơn giản là ánh xạ tập hợp f.

Ví dụ 33.2 a) Mọi ánh xạ tuyến tính $f: U \to V$ cảm sinh ra ánh xạ afin của các không gian afin $(U,U) \to (V,V)$. Trong trường hợp này $Df=f$.

b) Cặp ánh xạ đồng nhất $(\mathrm{id}_{\mathbb{A}},\mathrm{id}_V)$ là ánh xạ afin.

c) Với mỗi $v \in V$ ta kí hiệu $t_v:\ \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ là *phép tịnh tiến* biến a thành $a+v$. Khi đó (t_v,id_V) là ánh xạ afin.

d) Hợp của hai ánh xạ afin (f,Df) và (g,Dg) là một ánh xạ afin $(f\circ g,(Df)\circ(Dg))$.

e) Ánh xạ hằng $f:\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ với $f(a)=a^*$, trong đó $a^* \in \mathbb{A}'$ cố định và $a \in \mathbb{A}$ tùy ý, là ánh xạ afin với $Df=0$.

Định nghĩa 33.4 Ánh xạ afin (f, Df) được gọi là đơn cấu, toàn cấu hay đẳng cấu nếu f tương ứng là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh.

Ta gọi đẳng cấu afin từ $\mathbb{A}$ vào chính nó là *phép biến đổi afin.*

Mệnh đề 33.5 *Ánh xạ afin (f, Df) là đơn cấu, toàn cấu hay đẳng cấu khi và chỉ khi Df có tính chất tương ứng.*

Nếu (f, Df) là đẳng cấu thì $(f^{-1}, (Df)^{-1})$ cũng là đẳng cấu.

Từ Định nghĩa 33.3 ta đã biết Df được xác định duy nhất bởi f. Ngược lại Df cũng hầu như xác định duy nhất f (nếu biết được ảnh của một điểm!)

Định lí 33.6 *Cho hai không gian afin $(\mathbb{A}_1, V_1)$, $(\mathbb{A}_2, V_2)$ và một ánh xạ tuyến tính: $g : V_1 \to V_2$. Khi đó, với mỗi cặp điểm $a_1 \in V_1$ và $a_2 \in V_2$ tồn tại duy nhất một ánh xạ afin $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ sao cho $f(a_1) = a_2$ và $Df = g$.*

Hai không gian afin được gọi là đẳng cấu với nhau nếu có đẳng cấu từ không gian này vào không gian kia.

Hệ quả 33.7 *Không gian afin $(\mathbb{A}, V)$ đẳng cấu với (V, V). Đặc biệt, hai không gian afin hữu hạn chiều đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều.*

Định nghĩa 33.8 Cho $(\mathbb{A}, V)$ là một không gian afin hữu hạn chiều. *Hệ tọa độ afin* của $(\mathbb{A}, V)$ là một bộ $(O; e_1, ..., e_n)$ gồm một điểm $O \in \mathbb{A}$ gọi là *gốc tọa độ* và một cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ của không gian véc tơ V. *Tọa độ* của điểm $a \in \mathbb{A}$ là bộ phần tử $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ sao cho

$$a = O + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Nếu $S = (O; e_1, ..., e_n)$ và $a \in \mathbb{A}$, thì đôi khi ta kí hiệu tọa độ của a theo S là a_S, tức là

$$a_S = (\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Ví dụ 33.3 Một cặp gồm điểm 0 và cơ sở tự nhiên $(e_1, ..., e_n)$ của không gian véc tơ K^n lập thành hệ tọa độ afin của không gian afin $\mathbb{A}^n = (K^n, K^n)$. Ta cũng gọi nó là hệ tọa độ tự nhiên.

Mệnh đề 33.9 (Công thức đổi tọa độ): *Cho $(O; e_1, ..., e_n)$ và $(O'; e'_1, ..., e'_n)$ là hai hệ tọa độ của không gian afin. Giả sử*

$$\overrightarrow{OO'} = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n,$$

và

$$(e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)P,$$

trong đó $P = (p_{ij}) \in M(n; K)$ *là ma trận chuyển cơ sở. Khi đó tọa độ* $(x_1, ..., x_n)$ *của điểm* a *theo hệ* $(O; e_1, ..., e_n)$ *được tính qua tọa độ* $(x'_1, ..., x'_n)$ *của nó theo hệ* $(O'; e'_1, ..., e'_n)$ *như sau:*

$$x_i = b_i + p_{i1}x'_1 + \cdots + p_{in}x'_n, \ i = 1, ..., n.$$

Mệnh đề 33.10 (Biểu thức tọa độ của ánh xạ afin)*: Cho* $S = (A; e_1, ..., e_n)$ *và* $T = (B; f_1, ..., f_m)$ *là các hệ tọa độ của các không gian afin* $\mathbb{A}$ *và* $\mathbb{B}$*. Giả sử* $(\varphi, D\varphi)$ *là ánh xạ afin từ* $\mathbb{A}$ *vào* $\mathbb{B}$ *với* Φ *là ma trận biểu diễn của* $D\varphi$ *theo cặp cơ sở* $((e_1, ..., e_n), (f_1, ..., f_m))$*. Khi đó với mọi* $x \in \mathbb{A}$*, ta có*

$$\phi(x)_T = \Phi x_S + \phi(A)_T.$$

Ví dụ 33.4 Ánh xạ afin

$$f : (\mathbb{A}, V) \to (K, K)$$

được gọi là *hàm tuyến tính afin.* Trong (K, K) ta chọn hệ tọa độ afin tự nhiên và đồng nhất mỗi điểm với tọa độ của nó. Ta cố định một hệ tọa độ afin $(O, e_1, ..., e_n)$ trong $\mathbb{A}$ và gọi $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của điểm $x \in \mathbb{A}$. Giả sử $f(O) = \beta \in K$. Khi đó

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta.$$

Bài tập

Bài 33.1 Cho $a_0, ..., a_n \in \mathbb{A}$ là các điểm của một không gian afin và $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ sao cho $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = 1$. Cho $a \in \mathbb{A}$. Ta định nghĩa

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i := a + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (a_i - a).$$

Chứng tỏ rằng định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn điểm a. (Điểm $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$ thường được gọi là *tổ hợp trọng tâm* hay *tổ hợp afin* của các điểm $a_0, ..., a_n$).

Bài 33.2 Cho $a_1, ..., a_n \in \mathbb{A}$ là các điểm của một không gian afin và $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ sao cho $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Giả sử tập hợp $\{1, ..., n\}$ được chia thành hợp các tập hợp con đôi một không giao nhau $\cup I_j$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_j \beta_j (\sum_{k \in I_j} \frac{\alpha_k}{\beta_j} a_k),$$

trong đó $\beta_j = \sum_{k \in I_j} \alpha_k$.

Bài 33.3 Cho $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ sao cho $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ là các điểm của một không gian afin $(\mathbb{A}, V)$, thì

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

b) Nếu $a_1, ..., a_n$ là các điểm và $v_1, ..., v_n$ là các véc tơ thì

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Bài 33.4 Chứng tỏ rằng một ánh xạ afin từ $\mathbb{A}^n$ vào $\mathbb{A}^m$ có thể cho bởi công thức tọa độ sau theo các hệ tọa độ tự nhiên:

$$\begin{cases} y_1 &= \beta_1 + \alpha_{11} x_1 + \cdots + \alpha_{1n} x_n, \\ &\cdots \\ y_m &= \beta_m + \alpha_{m1} x_1 + \cdots + \alpha_{mn} x_n, \end{cases}$$

trong đó $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của $x \in \mathbb{A}^n$, $(y_1, ..., y_m)$ là tọa độ của $f(x)$ và $\beta_i,\ \alpha_{ij} \in K$.

Bài 33.5 Cho $a_0, ..., a_n \in \mathbb{A}_1$ và $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ là một ánh xạ afin. Chứng minh rằng nếu $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ thì

$$f(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a_i).$$

Bài 33.6 Chứng tỏ rằng mọi phép biến đổi afin f với $Df = \mathrm{id}$ là một phép tịnh tiến.

Bài 33.7 Cho một điểm $O \in \mathbb{A}$ và phần tử $0 \neq \lambda \in K$. Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một phép biến đổi afin h của $\mathbb{A}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{A}$ ta có $\overrightarrow{Oh(x)} = \lambda \overrightarrow{Ox}$. Phép biến đổi này được gọi là *phép vị tự* tâm O hệ số λ. Ngược lại mọi phép biến đổi afin f với $Df = \lambda \mathrm{id}$, $\lambda \neq 0, 1$ là một phép vị tự.

Bài 33.8 Cho $a_0, ..., a_n$ là các điểm của một không gian afin $(\mathbb{A}, V)$ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng $a_0 - a_1, ..., a_0 - a_n$ là cơ sở của V khi và chỉ khi với mọi $a \in \mathbb{A}$, a có thể biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$ sao cho $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. (Ta gọi các điểm $a_0, ..., a_n$ như vậy là *hệ tọa độ trọng tâm.*)

Bài 33.9 Cho $a_0, ..., a_n \in \mathbb{A}$ là các điểm của không gian afin. Chứng minh rằng $a_0 - a_1, ..., a_0 - a_n$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi với mọi $0 < i \leq n$ ta có $a_i - a_0, ..., a_i - a_{i-1}, a_i - a_{i+1}, ..., a_i - a_n$ độc lập tuyến tính. (Ta nói các điểm thỏa mãn tính chất này *độc lập afin.*)

Bài 33.10 Cho $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$. Chứng minh rằng f được xác định duy nhất bởi các ảnh qua f của các điểm thuộc một hệ tọa độ trọng tâm. Nói cách khác nếu $a_0, ..., a_n$ là một hệ tọa độ trọng tâm của $\mathbb{A}_1$ và $b_0, ..., b_n \in \mathbb{A}_2$, thì tồn tại duy nhất một ánh xạ afin f sao cho $f(a_i) = b_i$ với mọi $i = 0, ..., n$.

Bài 33.11 Chứng minh rằng mọi phép biến đổi afin là ánh xạ hợp thành của một phép tịnh tiến và một phép biến đổi afin có điểm bất động ($a \in \mathbb{A}$ được gọi là điểm bất động của f nếu $f(a) = a$).

Bài 33.12 Chứng minh rằng mọi phép biến đổi afin (f, Df) của không gian afin hữu hạn chiều sao cho 1 không là giá trị riêng của Df đều có duy nhất một điểm bất động.

34 Không gian con afin

Định nghĩa 34.1 Cho $(\mathbb{A}, V)$ là một không gian afin. Tập con $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ được gọi là *không gian con (afin)* nếu $\mathbb{B} = \emptyset$ hoặc $\mathbb{B} \neq \emptyset$ và tập hợp

$$U = \{b_1 - b_2 \in V;\ b_1, b_2 \in \mathbb{B}\}$$

là không gian con của không gian véc tơ V sao cho $t_u(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}$ với mọi $u \in U$.

Chú ý 34.2 a) Nếu $\mathbb{B} \neq \emptyset$ thì $(\mathbb{B}, U)$ là một không gian afin.

b) Với mọi $b \in B$ ta có $\mathbb{B} = b + U$. Vì vậy ta gọi U là *không gian chỉ phương* của $\mathbb{B}$.

c) Nếu $\dim \mathbb{B} = m$, ta cũng gọi $\mathbb{B}$ là *m-phẳng* đi qua điểm b. Khi $m = 0, 1, 2, \dim \mathbb{A} - 1$ thì $\mathbb{B}$ lần lượt được gọi là *điểm, đường thẳng, mặt phẳng và siêu phẳng.*

d) Ta nói hai không gian con *song song* với nhau, nếu giữa các không gian chỉ phương của chúng có quan hệ bao hàm thức.

Ví dụ 34.1 a) Cho $(\mathbb{A}, V) = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ (mặt phẳng Oclit thông thường), và

$$\mathbb{B} = \{(1, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Khi đó $\mathbb{B}$ là không gian con của $\mathbb{A}$. Đây chính là đường thẳng song song với trục hoành và đi qua điểm $(1, 0)$.

b) Xét tập con sau đây của tập $\mathbb{A}$

$$\mathbb{B} = \{(0, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(\alpha, 0);\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

($\mathbb{B}$ là hợp của hai đường thẳng.) Khi đó tập con U tương ứng bằng $\mathbb{R}^2$, nhưng $t_u(B) \not\subseteq B$ với mọi $u \neq 0$. Do đó B không là không gian con. Tương tự, nửa đường thẳng

$$\{(0, \alpha);\ \alpha \geq 0\}$$

cũng không thỏa mãn điều kiện thứ hai.

c) Cho $\mathbb{A}$ là đường thẳng thực và $\mathbb{B}$ là tập các điểm nguyên. Khi đó $\mathbb{B}$ thỏa mãn điều kiện thứ hai, nhưng không thỏa mãn điều kiện thứ nhất, nên cũng không là không gian con.

Cho $\mathbb{B}$ là không gian con m-chiều của không gian afin n-chiều $(\mathbb{A}, V)$. Cố định một hệ tọa độ afin $(O; e_1, ..., e_n)$ của $\mathbb{A}$. Giả sử $(\beta_1, ..., \beta_n)$ là tọa độ của một điểm $b \in \mathbb{B}$ và $(\alpha_{i1}, ..., \alpha_{in})$, $i = 1, ..., m$, là tọa độ của các véc tơ cơ sở trong không gian chỉ phương của $\mathbb{B}$. Khi đó tọa độ $(x_1, ..., x_n)$ của một điểm $x \in \mathbb{B}$ tùy ý được cho bởi

$$x_i = \beta_i + \alpha_{1i}t_1 + \cdots + \alpha_{mi}t_m;\ i = 1, ..., m;\ t_1, ..., t_m \in K.$$

Đây được gọi là *biểu diễn tham số* của $\mathbb{B}$.

Mệnh đề 34.3 *Hai không gian con afin $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{A}$ có cùng số chiều song song với nhau khi và chỉ khi không gian con này là ảnh của không gian con kia qua một phép tịnh tiến, tức là tồn tại $v \in V$ sao cho $t_v(\mathbb{B}_1) = \mathbb{B}_2$. Hơn nữa hai véc tơ với tính chất như vậy sai khác nhau bởi một véctơ thuộc không gian chỉ phương chung của $\mathbb{B}_1$ và $\mathbb{B}_2$.*

Hệ quả 34.4 *Hai không gian con song song với nhau và có cùng số chiều thì hoặc trùng nhau, hoặc không giao nhau.*

Mệnh đề 34.5 *Giao của hai không gian con afin là một không gian con afin. Hơn nữa hoặc giao của chúng là rỗng, hoặc không gian chỉ phương của giao là giao của các không gian chỉ phương.*

Định nghĩa 34.6 Cho $S \subseteq \mathbb{A}$ là một tập con. *Bao afin* của S là không gian con afin bé nhất chứa S.

Mệnh đề 34.7 *Bao afin của tập hợp S tồn tại và trùng với tập hợp các tổ hợp trọng tâm của các điểm thuộc S, tức là trùng với*

$$E(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i;\ n \in \mathbb{N},\ s_i \in S,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}.$$

Ví dụ 34.2 Bao afin của hai điểm phân biệt là đường thẳng đi qua hai điểm đó. Bao afin của ba điểm phân biệt là mặt phẳng đi qua ba điểm đó. Siêu phẳng của không gian n-chiều là bao afin của n điểm độc lập afin.

Mệnh đề 34.8 *Ảnh và nghịch ảnh của một không gian con afin qua ánh xạ afin là một không gian con afin.*

Ví dụ: Nghịch ảnh của một hàm afin tuyến tính là một siêu phẳng.

Mệnh đề 34.9 *Cho $\mathbb{A}$ là không gian afin chiều n. Tập con $\mathbb{B}$ là không gian con chiều m khi và chỉ khi tồn tại $n - m$ hàm afin tuyến tính $f_1, ..., f_{n-m}$ sao cho*

$$\mathbb{B} = \{a \in \mathbb{A};\ f_1(a) = \cdots = f_{n-m}(a) = 0\}.$$

Nói cách khác $\mathbb{B}$ là giao của $n - m$ siêu phẳng.

Hệ quả 34.10 *Cho $(\mathbb{A}, V) = (K^n, K)$. Khi đó mọi không gian con afin chiều m là tập nghiệm của một hệ gồm $n - m$ phương trình tuyến tính, và ngược lại tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính là một không gian con. Trong trường hợp này, không gian chỉ phương chính là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết.*

Bài tập

Bài 34.1 Cho $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ là hai không gian con afin. Gọi $\mathbb{B}$ là bao afin của hai không gian con này, và U_1, U_2, U lần lượt là không gian chỉ phương của $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ và $\mathbb{B}$. Chứng minh rằng

a) Nếu $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = \emptyset$ thì $\dim U = \dim(U_1 + U_2) + 1$,

b) Nếu $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \neq \emptyset$ thì $U = U_1 + U_2$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $\dim \mathbb{B} \leq \dim \mathbb{B}_1 + \dim \mathbb{B}_2 + 1$.

Bài 34.2 Cho $\mathbb{B}_1 \subseteq \mathbb{B}_2$ là hai không gian con hữu hạn chiều với các không gian chỉ phương là U_1, U_2. Chứng minh rằng

a) $U_1 \subseteq U_2$,

b) $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$ khi và chỉ khi $\dim \mathbb{B}_1 = \dim \mathbb{B}_2$.

Bài 34.3 Chứng minh rằng qua n điểm $P_1, ..., P_n$ độc lập afin trong không gian afin n-chiều có một và chỉ một siêu phẳng đi qua. Hơn nữa, nếu P_i có tọa độ là $(p_{i1}, ..., p_{in})$ (theo một hệ tọa độ afin nào đó) thì phương trình của các tọa độ của các điểm nằm trong siêu phẳng này là

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 1 \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bài 34.4 Cho P_i là điểm có tọa độ $(0, ..., c_i, ..., 0)$, trong đó $c_i \neq 0$ (theo một hệ tọa độ afin nào đó). Chứng minh rằng phương trình của siêu phẳng đi qua các điểm $P_1, ..., P_n$ là

$$\frac{x_1}{c_1} + \cdots + \frac{x_n}{c_n} = 1.$$

Bài 34.5 Chứng minh rằng hai siêu phẳng trong không gian n-chiều hoặc song song với nhau, hoặc có giao là một $n-2$ phẳng.

Bài 34.6 Trong không gian afin 4-chiều hãy tìm hai mặt phẳng không song song với nhau và cũng không giao nhau.

Bài 34.7 Chứng tỏ rằng ảnh của các điểm nằm trong m-phẳng qua ánh xạ afin cũng nằm trong một m-phẳng.

Bài 34.8* Cho $\text{char}(K) \neq 2$. Chứng minh rằng tập con $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ là không gian con khi và chỉ khi $\mathbb{B}$ chứa tất cả các đường thẳng đi qua với hai điểm khác nhau tùy ý của nó.

Bài 34.9* Hãy trình bày một phương pháp tìm biểu diễn tham số của giao hai không gian con afin khi biết biểu diễn tham số của từng không gian con. Minh họa phương pháp đó đối với các không gian con sau:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_1 &= (2,0,0) + \mathbb{R}\cdot(2,-1,1) + \mathbb{R}\cdot(2,-1,-1) \subset \mathbb{R}^3\\ \mathbb{B}_2 &= (-1,0,0) + \mathbb{R}\cdot(1,3,0) + \mathbb{R}(0,3,1) \subset \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Bài 34.10* Hãy trình bày một phương pháp tìm hệ phương trình xác định bao afin của hai không gian con afin, khi biết các phương trình của từng không gian con. Áp dụng đối với hai không gian con cụ thể sau:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_1 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + 2x_2 = 2,\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -3\},\\ \mathbb{B}_2 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}.\end{aligned}$$

Bài 34.11 Tìm biểu diễn tham số của mặt phẳng sau trong không gian $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2,\\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1.\end{cases}$$

Bài 34.12 Viết hệ phương trình xác định mặt phẳng sau trong $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2u + v,\\ x_2 = -1 - u + 3v,\\ x_3 = 3 - 2u - 2v,\\ x_4 = -3 + 3u + v,\\ x_5 = 1 - u - 3v.\end{cases}$$

Bài 34.13 Sử dụng hạng của ma trận, hãy xét vị trí tương hỗ của ba mặt phẳng khác nhau

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1,\\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2,\\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}$$

trong không gian ba chiều.

Bài 34.14 Sử dụng hạng của ma trận, hãy xét vị trí tương hỗ của hai đường thẳng khác nhau

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\quad \text{và}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,\quad a_4x + b_4y + c_4z = d_4.$$

trong không gian ba chiều.

Bài 34.15 (Định lí về đường trung tuyến): Cho $\text{char}(K) > 3$ và A, B, C là ba điểm không thẳng hàng trong một không gian afin. Đặt $A' = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, $B' = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$, $C' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng qui tại một điểm G sao cho $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$.

Bài 34.16 (Mở rộng định lí về đường trung tuyến): Cho $\text{char}(K) = 0$ và $A_1, ..., A_n$ là ba điểm không thẳng hàng trong một không gian afin. Điểm $A_i' = \sum_{j \neq i} \frac{1}{n-1} A_j$ được gọi là trọng tâm của $n-1$ điểm $\{A_j; j \neq i\}$, còn các đường thẳng A_iA_i' được gọi là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_i', $i = 1, ..., n$, đồng qui tại một điểm.

Bài 34.17 Cho hai không gian con khác rỗng $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ không giao nhau của không gian afin hữu hạn chiều. Chứng minh rằng luôn xây dựng được một siêu phẳng $\mathbb{B}$ song song với hai không gian con đó.

Bài 34.18 Ta gọi *cấu hình* trong một không gian afin $\mathbb{A}$ là một dãy hữu hạn sắp thứ tự các không gian con $\{\mathbb{B}_1, ..., \mathbb{B}_m\}$. Hai cấu hình $\{\mathbb{B}_1, ..., \mathbb{B}_m\}$ và $\{\mathbb{B}_1', ..., \mathbb{B}_m'\}$ được gọi là *tương đẳng afin* nếu tồn tại một tự đẳng cấu afin f của $\mathbb{A}$ thỏa mãn $f(\mathbb{B}_i) = \mathbb{B}_i'$ với mọi i. Chứng minh rằng hai cấu hình $(b, \mathbb{B})$ và $(b', \mathbb{B}')$ - mỗi cấu hình gồm một điểm và một không gian con - của không gian afin hữu hạn chiều là tương đẳng afin với nhau khi và chỉ khi $\dim \mathbb{B} = \dim \mathbb{B}'$ và hoặc đồng thời $b \in \mathbb{B}$ và $b' \in \mathbb{B}'$ hoặc đồng thời $b \notin \mathbb{B}$ và $b' \notin \mathbb{B}'$.

35 Không gian Ơclit afin

Định nghĩa 35.1 *Không gian Ơclit afin* $\mathbb{E}$ (hoặc còn gọi là *không gian Ơclit điểm* - hay đơn giản hơn - không gian Ơclit) là không gian afin trên trường số thực liên kết với một không gian (véc tơ) Ơclit E. Trên $\mathbb{E}$ *khoảng cách* giữa hai điểm A, B được định nghĩa như sau

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| .$$

$d(A, B)$ cũng được gọi là độ dài của đoạn

$$AB = \{\alpha A + (1 - \alpha)B;\ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Hệ tọa độ Đề-các vuông góc của không gian Ơclit hữu hạn chiều là một bộ $(O; e_1, ..., e_n)$ gồm một điểm O và một cơ sở trực chuẩn $(e_1, ..., e_n)$ của không gian E .

Hàm khoảng cách này thỏa mãn các tính chất thông thường của một metric. Cụ thể: Cho $A, B, C \in \mathbb{E}$. Khi đó

a) $d(A,B) \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv B$.

b) $d(A,B) = d(B,A)$.

c) $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$.

Hơn nữa, các tính chất về chuẩn hay góc của không gian (véctơ) Ơclit có thể diễn đạt dễ dàng dưới ngôn ngữ của hàm khoảng cách này. Chẳng hạn, nếu $(O; e_1, ..., e_n)$ là một hệ tọa độ Đề-các vuông góc của không gian Ơclit afin hữu hạn chiều, và nếu A, B có các tọa độ là $(a_1, ..., a_n)$ và $(b_1, ..., b_n)$, thì

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Ta có thể dễ dàng mở rộng các khái niệm của không gian Ơclít ba chiều thông thường ra trường hợp nhiều chiều. Chẳng hạn:

Định nghĩa 35.2 Cho α, β là hai phẳng trong không gian Ơclit (afin) hữu hạn chiều. Khoảng cách giữa hai phẳng này là đại lượng

$$d(\alpha, \beta) = \inf_{A \in \alpha,\ B \in \beta} d(A,B).$$

Mệnh đề 35.3 *Cho $A \in \alpha$, $B \in \beta$ và U, V là các không gian chỉ phương của hai phẳng α, β. Kí hiệu x là véc tơ độ cao của $\overrightarrow{AB}$ lên $U + V$ (xem Định nghĩa 24.3). Khi đó*

$$d(\alpha, \beta) = \mid x \mid .$$

Nói riêng, nếu $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với U và V thì $d(\alpha, \beta) = \mid \overrightarrow{AB} \mid$.

Ta có thể áp dụng Bổ đề 24.4 (hoặc Bài tập 24.2) để tìm véctơ độ cao. Tuy nhiên khi đã biết các phương trình định nghĩa các phẳng, ta có thể sử dụng phương pháp trong Bài 35.3.

Ví dụ 35.1 Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc giả sử A là điểm có tọa độ $(a_1, ..., a_n)$, còn α là siêu phẳng được cho bởi phương trình

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + d = 0.$$

Lấy B là một điểm của siêu phẳng này với tọa độ $(b_1, ..., b_n)$. $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với α (tức vuông góc với không gian chỉ phương của nó) khi và chỉ

chi $(b_1 - a_1, ..., b_n - a_n) = b(c_1, ..., c_n)$. Rút b_i từ hệ thức này và thay vào phương trình trên, ta được

$$b = -\frac{c_1a_1 + \cdots + c_na_n + d}{c_1^2 + \cdots + c_n^2}.$$

Lấy điểm B này, ta suy ra

$$d(A, \alpha) = d(A, B) = \mid b \mid \cdot \mid (c_1, ..., c_n) \mid = \frac{c_1a_1 + \cdots + c_na_n + d}{\sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}}.$$

Định nghĩa 35.4 Ánh xạ afin $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ của hai không gian Oclit afin được gọi là một *ánh xạ đẳng cự* nếu với mọi $A, B \in \mathbb{E}$ ta có

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

Ánh xạ đẳng cự của một không gian Oclit afin hữu hạn chiều vào chính nó còn được gọi là *phép dời hình*. Tùy thuộc vào $\mathrm{Det}(Df) = 1$ hay -1, người ta còn gọi là phép dời hình loại 1 hay loại 2.

Định lí 35.5 *Cho $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ của hai không gian Oclit afin. Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) f là một đẳng cự.

(ii) f là một ánh xạ afin với phần tuyến tính Df của nó là một ánh xạ đẳng cự.

(iii) $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ với mọi $A, B \in \mathbb{E}$.

Định lí 35.6 *Cho f là một phép dời hình của không gian Oclit afin $(\mathbb{E}, E)$ hữu hạn chiều với phần tuyến tính Df. Khi đó tồn tại véctơ $l \in E$ sao cho $Df(l) = l$ và $f = t_l \circ g$, trong đó g là phép dời hình của $\mathbb{E}$ có một điểm bất động $a \in \mathbb{E}$.*

Chú ý rằng trong định lí trên l có thể bằng 0. Nếu ta đồng nhất $\mathbb{E}$ với E bằng cách xem a là gốc tọa độ (tức biến a thành 0) thì g là một biến đổi trực giao. Nếu $l \neq 0$, thì khi đó vì $Dg = Df$ ta sẽ có $g(l) = l$, tức là l cũng cố định qua phép dời hình g. Khi đó nếu viết $E = (\mathbb{R}l) \oplus l^\perp$ thì g được xác định bởi $g_0 = g \mid_{l^\perp}$. Như vậy g là phép quay quanh trục $\mathbb{R}l$, hoặc là hợp của phép quay với một phép phản xạ. Do đó $f = t_l \circ g$ là một chuyển động xoáy ốc (vừa quay, vừa chuyển động dọc theo trục $\mathbb{R}l$).

Ví dụ 35.2 Cho $\dim \mathbb{E} = 2$. Nếu $Df = \mathrm{id}$ thì f là phép tịnh tiến. Nếu $Df \neq \mathrm{id}$ và $\mathrm{Det}(Df) = 1$ thì Df không có véc tơ riêng, nên $l = 0$ và f có một điểm bất động chính là điểm gốc của phép quay f! Nếu $\mathrm{Det}(Df) = -1$, thì Df là phép phản xạ qua một đường thẳng. Khi đó f là hợp của phép phản xạ và phép tịnh tiến.

Định lí 35.7 *Mọi phép biến đổi afin của không gian Ơclit afin n-chiều là ánh xạ hợp thành của các ánh xạ sau:*

(a) Tối đa n phép vị tự (với hệ số dương),

(b) Phép dời hình có điểm bất động,

(c) Phép tịnh tiến.

Bài tập

Bài 35.1 Tìm khoảng cách từ điểm cho bởi tọa độ là véc tơ a và mặt phẳng cho bởi hệ phương trình trong không gian Ơclit 4 chiều:

a) $a = (4, 2, -5, 1)$ và

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$$

b) $a = (2, 4, -4, 2)$ và

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Bài 35.2* Cho $(a_1, ..., a_n)$ là tọa độ của điểm A và

$$c_{i1}x_1 + \cdots + c_{in}x_n = d_i, \ i = 1, ..., m,$$

là hệ phương trình xác định $(n - m)$-phẳng π trong không gian Ơclit n chiều. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} c_{i1}x_1 + \cdots + c_{in}x_n = d_i, \ i = 1, ..., m, \\ x_j - a_j = c_{1j}u_1 + \cdots + c_{mj}u_m, \ j = 1, ..., n, \end{cases}$$

trong đó $u_1, ..., u_m$ là các biến mới, có nghiệm duy nhất $(x_1^0, ..., x_n^0, u_1^0, ..., u_m^0)$. Hơn nữa nếu đặt $h = (x_1^0, ..., x_n^0)$ thì $| h | = d(A, \pi)$.

Bài 35.3* Cho α là $(n-p)$-phẳng và β là $n-q$)-phẳng trong không gian Oclit n-chiều với các hệ phương trình định nghĩa là

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = c_i,\ i = 1, ..., p,$$

và

$$b_{i1}x_1 + \cdots + b_{in}x_n = d_i,\ i = 1, ..., q.$$

Lập hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n & = c_i,\ i = 1, ..., p, \\ b_{i1}y_1 + \cdots + b_{in}y_n & = d_i,\ i = 1, ..., q, \\ x_j - y_j & = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{pj}u_p,\ j = 1, ..., n, \\ x_j - y_j & = b_{1j}v_1 + \cdots + b_{qj}v_q,\ j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ này có nghiệm, và với mọi nghiệm riêng

$$(x_1^0, ..., x_n^0, y_1^0, ..., y_n^0, u_1^0, ..., u_p^0, v_1^0, ..., v_q^0),$$

thì $d(\alpha, \beta) = \mid h \mid$, trong đó $h = (x_1^0 - y_1^0, ..., x_n^0 - y_n^0)$.

Bài 35.4* Cho điểm $a \in \mathbb{R}^n$ và không gian con $\pi = b + V \subseteq \mathbb{R}^n$, trong đó V là không gian chỉ phương có cơ sở là các véc tơ $e_1, ..., e_k$. Chứng minh rằng khoảng cách từ a tới π được tính qua định thức Gram như sau:

$$d(a, \pi)^2 = \frac{\mid G(e_1, ..., e_k, a-b) \mid}{\mid G(e_1, ..., e_k) \mid}.$$

Bài 35.5 Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng $\alpha = a + t_1a_1 + t_2a_2$ và $\beta = b + t_1b_1 + t_2b_2$ trong không gian Oclit 4-chiều, trong đó

$$\begin{aligned} a &= (4, 5, 3, 2), & b &= (1, -2, 1, -3), \\ a_1 &= (1, 2, 2, 2), & a_2 &= (2, -2, 1, 2), \\ b_1 &= (2, 0, 2, 1), & b_2 &= (1, -2, 0, -1). \end{aligned}$$

Bài 35.6* Một ánh xạ f từ không gian Oclit afin hữu hạn chiều $\mathbb{E}$ vào chính nó được gọi là *ánh xạ đồng dạng* nếu tồn tại $\lambda > 0$ sao cho với mọi $a, b \in \mathbb{E}$ ta có

$$d(f(a), f(b)) = \lambda d(a, b).$$

Chứng minh rằng f là ánh xạ đồng dạng khi và chỉ khi nó là hợp của một phép vị tự (xem Bài 33.7) và phép dời hình.

Bài 35.7 Cho $\mathbb{E}$ là một không gian Óclit hữu hạn chiều. Chứng minh rằng một đẳng cấu afin f của $\mathbb{E}$ biến các đường thẳng vuông góc thành các đường thẳng vuông góc là một ánh xạ đồng dạng (xem Bài 35.6).

Bài 35.8* Cho $\mathbb{E}$ là một không gian Óclit chiều $n \geq 2$. Cho f là một song ánh từ $\mathbb{E}$ vào chính nó thỏa mãn tính chất sau:

Nếu A, B, C, D là 4 điểm tùy ý mà $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{f(A)f(B)} \perp \overrightarrow{f(C)f(D)}$.

Chứng minh rằng f là một ánh xạ đồng dạng.

Bài 35.9* Hai cấu hình (xem Bài 34.18) trong không gian Óclit hữu hạn chiều được gọi là *tương đẳng metric* nếu tồn tại một tự đẳng cấu đẳng cự biến cấu hình này thành cấu hình kia. Chứng minh rằng hai cấu hình $\{b_0, ..., b_n\}$ và $\{b'_0, ..., b'_n\}$ gồm các điểm là tương đẳng metric với nhau khi và chỉ khi $d(b_i, b_j) = d(b'_i, b'_j)$ với mọi cặp (i, j).

Bài 35.10 Chứng minh rằng hai cấu hình $(b, \mathbb{B})$ và $(b', \mathbb{B}')$ - mỗi cấu hình gồm một điểm và một không gian con - trong không gian Óclit hữu hạn chiều là tương đẳng metric với nhau khi và chỉ khi $\dim \mathbb{B} = \dim \mathbb{B}'$ và $d(b, \mathbb{B}) = d(b', \mathbb{B}')$.

Bài 35.11 *Góc* giữa hai đường thẳng là góc giữa hai véc tơ chỉ phương của chúng hoặc phần bù của góc đó (sao cho giá trị của góc nằm giữa 0 và $\pi/2$). Chứng minh rằng hai cấu hình - mỗi cấu hình gồm hai đường thẳng - trong không gian Óclit hữu hạn chiều là tương đẳng metric với nhau khi và chỉ khi góc và khoảng cách giữa chúng trong hai cấu hình bằng nhau.

Bài 35.12 *Góc* giữa một đường thẳng d và một không gian con π trong không gian Óclit là góc giữa một véc tơ e khác 0 trên d và hình chiếu vuông góc e' của nó trên không gian chỉ phương V của π, hoặc phần bù của góc đó (sao cho giá trị của góc nằm giữa 0 và $\pi/2$). Chứng minh rằng hai cấu hình $(b, \mathbb{B})$ và $(c, \mathbb{C})$ - mỗi cấu hình gồm một đường thẳng và một không gian con - trong không gian Óclit hữu hạn chiều là tương đẳng metric với nhau khi và chỉ khi góc và khoảng cách giữa chúng trong hai cấu hình bằng nhau và $\dim \mathbb{B} = \dim \mathbb{C}$.

Bài 35.13 Cho $\mathbb{E}$ là không gian Óclit hữu hạn chiều. Tập $S \subseteq \mathbb{E}$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $x, y \in S$ và $0 \leq \alpha \leq 1$ ta đều có $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$. *Bao lồi* của tập con $A \subseteq \mathbb{E}$ là tập hợp

$$\mathrm{conv}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i;\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ a_i \in A\}.$$

Chứng minh rằng bao lồi của một tập lồi là một tập lồi.

Bài 35.14 *Hình lập phương n-chiều* là bao lồi của các điểm $a_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ trong không gian Oclit $\mathbb{E}$, trong đó $a_0 \in \mathbb{E}$, $e_1, ..., e_n$ là một hệ véc tơ trực giao có độ dài như nhau, và $\alpha_i = 0, 1$. Đường chéo là đường nối hai đỉnh có độ dài lớn nhất. Hãy tìm số đường chéo của một hình lập phương n-chiều vuông góc với một đường chéo cho trước.

Bài 35.15 Chứng minh rằng đường chéo của hình lập phương n-chiều tạo với tất cả các cạnh của nó các góc bằng nhau.

Bài 35.16 Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của bất kì một cạnh nào của hình lập phương n-chiều lên một đường chéo của nó cũng có độ dài bằng $\frac{1}{n}$ độ dài đường chéo. Từ đó suy ra các hình chiếu vuông góc của các đỉnh hình lập phương n-chiều lên đường chéo chia nó thành n phần bằng nhau.

Bài 35.17 Tính góc tạo bởi đường chéo và một mặt k-chiều của hình lập phương n-chiều.

Bài 35.18 *Góc* α giữa hai không gian con U và V của một không gian (véc tơ) Oclit hữu hạn chiều được định nghĩa như sau:

- Nếu $U \cap V = 0$ thì α là góc bé nhất trong các góc tạo bởi các véc tơ khác không $x \in U$ và $y \in V$.
- Nếu $U \subseteq V$ hoặc $V \subseteq U$ thì $\alpha = 0$.
- Nếu $U \cap V = L$ và $L \neq U, V$ thì đặt $U^* = U \cap L^\perp$ và $V^* = V \cap L^\perp$. Khi đó đặt α là góc giữa U^* và V^*.

Góc giữa hai phẳng của không gian Oclit afin là góc giữa hai không gian chỉ phương.

Chứng tỏ rằng khái niệm góc giữa hai phẳng là hoàn toàn xác định và bằng 0 khi và chỉ khi hai phẳng song song với nhau.

Bài 35.19* *Đơn hình đều n-chiều* là bao lồi của $n+1$ điểm trong không gian Oclit mà khoảng cách của 2 điểm tùy ý là như nhau. Bao lồi của $k+1$ điểm tùy ý trong số $n+1$ điểm đó tạo thành một mặt k-chiều. Mặt k-chiều và mặt $(n-k-1)$-chiều được gọi là đối nhau nếu mỗi đỉnh của đơn hình thuộc một trong hai mặt ấy. Tìm khoảng cách giữa chúng nếu biết độ dài của mỗi cạnh đơn hình là a.

Bài 35.20 Cho S là một tập lồi trong không gian Oclit hữu hạn chiều. Một tập con lồi $T \subseteq S$ được gọi là một *mặt* (biên) nếu mọi đoạn thẳng có hai đầu mút trong S mà có một điểm trong thuộc T thì cả đoạn thẳng đó nằm trong T (đoạn thẳng với hai đầu mút $a, b \in S$ là tập hợp các điểm có

dạng $\alpha a + (1-\alpha)b$, trong đó $0 \leq \alpha \leq 1$. Nếu $0 < \alpha < 1$ thì điểm đó được gọi là điểm trong). Chứng minh rằng:

a) Giao của một họ các mặt và mặt của một mặt của một tập lồi S lại là các mặt của S.

b) Cho S là một đa diện, tức là tập hợp

$$S = \{x \in \mathbb{E};\ f_1(x) \geq 0, ..., f_m(x) \geq 0\},$$

trong đó $f_1, ..., f_n : \mathbb{E} \to 0$ là các hàm tuyến tính afin và $\mathbb{E}$ là không gian Ơclit hữu hạn chiều. Khi đó với mọi i, đa diện

$$S_i = S \cap \{x;\ f_i(x) = 0\}$$

hoặc bằng rỗng, hoặc là một mặt của S.

Bài 35.21 Chứng minh rằng một hàm tuyến tính afin f khác hằng trên đa diện $S = \{x \in \mathbb{A};\ f_1(x) \geq 0, ..., f_m(x) \geq 0\}$ không thể nhận giá trị cực đại tại điểm $a \in S$ mà tất cả $f_i(a) > 0$.

Bài 35.22* Cho S là một đa diện trong không gian Ơclit hữu hạn chiều $\mathbb{E}$. Giả sử f là một hàm tuyến tính afin bị chặn trên trên S. Chứng minh rằng f nhận giá trị cực đại tại tất cả các điểm trên một mặt nào đó của S. Hơn nữa, nếu tập hợp S bị chặn thì f cũng nhận giá trị tại một đỉnh nào đó của S (*đỉnh* của S là một mặt chỉ gồm một điểm).

Bài 35.23* Cho S là một đa diện trong không gian Ơclit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ xác định bởi các bất đẳng thức

$$f_1(x) \geq b_1, ..., f_m(x) \geq b_m,$$

trong đó f_i là các hàm tuyến tính. Với mỗi điểm $p \in S$ các điều kiện sau là tương đương

(i) p là đỉnh của S.

(ii) Tồn tại các chỉ số $i_1, ..., i_n$ sao cho $f_{i_1}, ..., f_{i_n}$ độc lập tuyến tính và

$$f_{i_1}(p) - b_{i_1} = \cdots = f_{i_n}(p) - b_{i_n} = 0.$$

36 Siêu mặt bậc hai trong không gian afin

36.1 Siêu mặt bậc hai trong không gian afin tổng quát

Trong mục này ta luôn giả thiết $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n$. Trong $\mathbb{A}$ ta chọn một hệ tọa độ afin và đồng nhất các điểm với các tọa độ của nó.

Định nghĩa 36.1 *Siêu mặt bậc hai* F trong không gian afin $\mathbb{A}$ là một tập con thực sự khác rỗng bao gồm các điểm thỏa mãn phương trình sau:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0,$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$, $b_i, c \in K$. Nếu kí hiệu $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $l(x) = \sum_{i=1}^{n} b_ix_i$ và

$$F(x) = Q(x) + l(x) + c,$$

thì F được cho bởi phương trình $F(x) = 0$. Ta gọi $F(x)$ là *hàm bậc hai*, còn $Q(x)$ và $l(x)$ tương ứng là *phần toàn phương* và *phần tuyến tính* của $F(x)$.

Ví dụ: Khi $n = 2$, tức là trong mặt phẳng afin, siêu mặt bậc hai chính là các đường (cong) bậc hai gồm các ellip, hyperbol, parabol. Khi $n = 3$ ta có các mặt (cong) bậc hai trong không gian.

Ta có định lí phân loại sau:

Định lí 36.2 *Cho F là một siêu mặt bậc hai. Khi đó tồn tại một hệ tọa độ afin để F xác định bởi một trong các dạng phương trình sau:*

(i) $\lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2 = \alpha$,

(ii) $\lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_rx_r^2 = \alpha$, $r < n$,

(iii) $\lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_rx_r^2 + 2x_{r+1} = 0$, $r < n$.

Ở trên tất cả các hệ số $\lambda_i \neq 0$. Các dạng này được gọi là dạng chính tắc của siêu mặt bậc hai F.

Định nghĩa 36.3 *Tâm (đối xứng)* của siêu mặt bậc hai F là điểm $c \in \mathbb{A}$ (không nhất thiết thuộc F) sao cho với mọi $x \in F$ thì $c - (x - c) \in F$.

Tập tất cả các tâm của F được gọi là *tập tâm*.

Điều kiện $c - (x - c) \in F$ nghĩa là điểm đối xứng với x qua tâm c cũng thuộc F.

Ví dụ 36.1 Theo phân loại của Định lí 36.2, trong trường hợp (i) gốc tọa độ $O = (0, ...0)$ là một tâm đối xứng; trong trường hợp (ii) không gian con gồm các điểm $(0, ..., 0, x_{r+1}, ..., x_n)$ thuộc tập tâm; còn trong trường hợp (iii) gốc tọa độ $O = (0, ...0)$ không phải là tâm. Parabol không có điểm tâm nào.

36.2 Siêu mặt bậc hai trong không gian afin trên trường số thực

Trong không gian afin trên trường số thực người ta thường phát biểu Định lí 36.2 dưới dạng

Định lí 36.4 *Cho F là một siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$. Khi đó tồn tại một hệ tọa độ afin để F được cho bởi một trong các dạng phương trình sau:*

(a) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0$, *trong đó* $1 \leq k \leq r \leq 2k$, $r \leq n$,

(b) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 1$, *trong đó* $1 \leq k \leq r \leq n$,

(c) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 + 2x_{r+1} = 0$, *trong đó* $1 \leq k \leq r \leq 2k$, $r < n$.

Chú ý rằng quan điểm phân loại trong trường hợp (a) và (b) ở định lí vừa nêu có sự khác biệt so với (i) và (ii) trong Định lí 36.2. Kết quả sau đây mô tả trọn vẹn tập tâm của siêu mặt bậc hai trong không gian afin trên $\mathbb{R}$.

Định lí 36.5 *Cho F là siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ được cho bởi hàm bậc hai $F(x)$. Khi đó*

(i) Nếu phần toàn phương $Q(x)$ không suy biến thì tâm của F chỉ gồm một điểm. Trong trường hợp này dạng chính tắc của F được cho bởi

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2 = \alpha;\ 1 \leq k \leq n,\ \alpha = 0, 1.$$

(ii) Nếu phần toàn phương $Q(x)$ suy biến thì tâm của F hoặc là tập rỗng, hoặc là một không gian con afin chiều bằng $n - \operatorname{rank} Q$. Trường hợp đầu, dạng chính tắc của F là

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 + 2x_{r+1} = 0;\ 1 \leq k \leq r \leq 2k,\ r < n,$$

còn trong trường hợp sau, dạng chính tắc của nó là

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = \alpha;\ 1 \leq k \leq r < n,\ \alpha = 0, 1.$$

Các bảng phân loại sau đây khi $n = 2, 3$ cho ta hình dung cụ thể.

Các đường bậc 2 trong mặt phẳng afin thực

Loại	Phương trình	Tập tâm	Tên gọi
(a)	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$\{(0,0)\}$	một điểm
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	$\{(0,0)\}$	hai đường thẳng cắt nhau
	$x_1^2 = 0$	$\{x_1 = 0\}$	đường thẳng kép
(a)	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	$\{(0,0)\}$	ellip
	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	$\{(0,0)\}$	hyperbol
	$x_1^2 = 1$	$\{x_1 = 0\}$	hai đường thẳng song song
(c)	$x_1^2 + 2x_2 = 0$	$\emptyset$	parabol

Các mặt bậc hai trong không gian afin thực

Loại	Phương trình	Tập tâm	Tên gọi
(a)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$\{(0,0,0)\}$	một điểm
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	$\{(0,0,0)\}$	mặt nón
	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$\{x_1 = x_2 = 0\}$	đường thẳng
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	$\{x_1 = x_2 = 0\}$	hai mặt phẳng cắt nhau
	$x_1^2 = 0$	$\{x_1 = 0\}$	mặt phẳng kép
(a)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	$\{(0,0,0)\}$	ellipsoid
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$	$\{(0,0,0)\}$	hyperboloid một tầng
	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$	$\{(0,0,0)\}$	hyperboloid hai tầng
	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	$\{x_1 = x_2 = 0\}$	mặt trụ elliptic
	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	$\{x_1 = x_2 = 0\}$	mặt trụ hyperbolic
	$x_1^2 = 1$	$\{x_1 = 0\}$	hai mặt phẳng song song
(c)	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$	$\emptyset$	paraboloid elliptic
	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$	$\emptyset$	paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa)
	$x_1^2 + 2x_3 = 0$	$\emptyset$	mặt trụ parabolic

36.3 Siêu mặt bậc hai trong không gian Ơclit afin

Định lí 36.6 *Cho F là một siêu mặt bậc hai trong không gian Ơclit $\mathbb{R}^n$. Khi đó tồn tại một hệ tọa độ Đề-các vuông góc để F được cho bởi một trong các dạng phương trình sau:*

(a) $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{\alpha_r^2} = 0$, *trong đó* $1 \le k \le r \le 2k$, $r \le n$,

(b) $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{\alpha_r^2} = 1$, *trong đó* $1 \le k \le r \le n$,

(c) $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{\alpha_r^2} + 2x_{r+1} = 0$, *trong đó* $1 \le k \le r \le 2k$, $r < n$.

Ở trên tất cả các hệ số $\alpha_i > 0$. *Các dạng này được gọi là dạng chính tắc trục chính của siêu mặt bậc hai* F.

Tương ứng với các trường hợp này, khi $n = 2, 3$, ta cũng được các bảng phân loại chi tiết hơn tương tự như trong phần mục trên. Điểm khác biệt ở đây là trong phương trình của các mặt phải có các hệ số.

Chú ý rằng mỗi siêu mặt bậc hai chỉ có duy nhất một dạng chính tắc trục chính.

Thuật toán tìm dạng chính tắc trục chính

Muốn tìm dạng chính tắc trục chính của một siêu mặt bậc 2 cho bởi hàm bậc hai $F(x) = Q(x) + l(x) + c$ ta thực hiện các bước sau:

1. Sử dụng Thuật toán tìm dạng chính tắc trục chính của dạng toàn phương (trang 190) để đưa $Q(x)$ về dạng:

$$Q(x) = \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{\alpha_r^2}.$$

2. Khi đó $l(x) = 2\beta_1 x_1 + \cdots + 2\beta_n x_n$. Với $i \le r$, ta dùng phép biến đổi

$$\frac{x_i^2}{\alpha_i^2} \pm 2\beta_i x_i = \frac{1}{\alpha_i^2}(x_i \pm \alpha_i^2\beta_i)^2 - \alpha_i^2\beta_i^2 =: \frac{y_i^2}{\alpha_i^2} - \gamma_i.$$

3. Bây giờ $F(y) = Q(y) + l(y) + c'$, trong đó $Q(y)$ vẫn có dạng như sau khi thực hiện bước 1, nhưng

$$l(y) = 2\beta_{r+1}y_{r+1} + \cdots + 2\beta_m y_m,$$

trong đó $r \le m \le n$ và tất cả các hệ số khác 0.

a) Nếu $r = m$ (tức là $l(y) = 0$) thì chia $F(y)$ cho hệ số tự do (khi nó khác 0) và dừng thuật toán.

b) Nếu $r + 1 = m$, tức $l(y) + c' = 2\beta_{r+1}y_{r+1} + c'$ thì thực hiện tiếp phép đổi biến

$$y_{r+1} + \frac{c'}{2\beta_{r+1}} \mapsto y_{r+1},$$

rồi chia $F(y)$ cho β_{r+1} và dừng thuật toán.

c) Nếu $m \geq r+2$, ta đặt

$$\beta = \sqrt{\beta_{r+1}^2 + \cdots + \beta_m^2} > 0.$$

Sử dụng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt đối với các véc tơ

$$\frac{1}{\beta}(\beta_{r+1}, ..., \beta_m), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{m-r}$$

ta tìm được hệ véc tơ trực chuẩn $b_i = (b_{i(r+1)}, ..., b_{im}); i = r+1, ..., m$. Thực hiện các phép biến đổi

$$\begin{aligned} z_i &= y_i;\ i \leq r \text{ hoặc } i > m, \\ z_{r+1} &= b_{(r+1)(r+1)}y_{r+1} + \cdots + b_{(r+1)m}y_m + \tfrac{c'}{2\beta}, \\ z_i &= b_{i(r+1)}y_{r+1} + \cdots + b_{im}y_m;\ i = r+2, ..., m. \end{aligned}$$

Kết quả của phép đổi biến này cho ta

$$F(z) = Q(z) + 2\beta z_{r+1}.$$

Chia $F(z)$ cho β và dừng thuật toán.

Ví dụ 36.2 Tìm dạng chính tắc trục chính của mặt bậc hai:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + x_3 = 1.$$

Trước hết ta xét ma trận của dạng toàn phương

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận này có các giá trị riêng là 0, 2. Tương ứng ta có các véc tơ riêng là $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Do đó ta cần thực hiện phép biến đổi sau:

$$\begin{cases} x_1 &= y_1/\sqrt{2} + y_2/\sqrt{2}, \\ x_2 &= -y_1/\sqrt{2} + y_2/\sqrt{2}, \\ x_3 &= y_3. \end{cases}$$

Bây giờ ta có phương trình

$$2y_2^2 + \sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + y_3 = 1.$$

Suy ra

$$8(y_2 + \sqrt{2}/4)^2 + 4[\sqrt{2}y_1 + y_3] = 5.$$

Ta có $\beta = 2\sqrt{3}$. Thực hiện các phép đổi biến

$$z_1 = y_2 - \frac{\sqrt{2}}{4},\ z_2 = \frac{\sqrt{2}y_1 + y_3 - 5/4}{\sqrt{3}},\ z_3 = \frac{-y_1 + \sqrt{2}y_3}{\sqrt{3}},$$

và chia cho $2\sqrt{3}$, ta được phương trình dạng chính tắc trục chính

$$\frac{4z_1^2}{\sqrt{3}} + 2z_2 = 0.$$

Đây là một mặt trụ parabolic.

Người ta cũng chia các mặt bậc hai trong không gian Óclit $\mathbb{R}^3$ theo các tính chất khác sau đây

- Mặt trụ: mặt tạo bởi các đường thẳng song song với một phương cố định và tựa theo một đường cong Γ nào đó. Ta có các mặt trụ hyperbolic, mặt trụ elliptic và mặt trụ parabolic.

- Mặt nón: mặt tạo bởi các đường thẳng đi qua một điểm cố định (gọi là đỉnh nón) và tựa vào một đường cong Γ cố định (gọi là đường chuẩn). Ta có các mặt nón tròn xoay cho bởi phương trình $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, hoặc mặt nón elliptic được cho bởi phương trình

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

- Mặt tròn xoay: tạo bởi một đường cong phẳng quay xung quanh một trục nằm trong mặt phẳng chứa đường cong. Đó là các mặt nón tròn xoay, mặt cầu, hay tổng quát hơn là các ellipsoid có phương trình

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1,$$

hoặc là các hyperboloid một tầng, hai tầng được cho bởi các phương trình:

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1,\ -\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1,$$

hoặc là paraboloid elliptic với phương trình

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{x_2^2}{\alpha^2} + 2x_3 = 0.$$

- Mặt kẻ: là mặt bậc hai mà qua một điểm bất kì đều có ít nhất một đường thẳng nằm hoàn toàn trên mặt ấy. Đó là các mặt: mặt nón (elliptic), các mặt trụ, các cặp mặt phẳng, hyperboloid một tầng và paraboloid hyperbolic.

Định nghĩa 36.7 Cho π là một m-phẳng thực sự của $\mathbb{E}$ và $A \in \mathbb{E}$ là một điểm. Điểm A' được gọi là điểm đối xứng của A qua π, nếu đoạn thẳng nối A và A' vuông góc với π và cắt π tại điểm giữa của nó.

Ta gọi π là *m-phẳng đối xứng* của siêu mặt bậc hai F nếu điểm đối xứng qua π của mọi điểm thuộc F cũng thuộc F.

Ví dụ 36.3 Theo dạng chính tắc trục chính nêu trong Định lí 36.6: Đối với các siêu mặt bậc hai loại (a) và (b) các siêu phẳng $x_i = 0$, $i \leq r$ và $x_i = \alpha$, $i > r$, $\alpha \in \mathbb{R}$, đều là các siêu phẳng đối xứng của các siêu mặt bậc hai. Giao của $n - m$ siêu phẳng tùy ý trong số đó sẽ cho ta một m-phẳng đối xứng.

Đối với siêu mặt bậc hai loại (c) các siêu phẳng $x_i = 0$, $i \leq r$ và $x_i = \alpha$, $i > r + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, đều là các siêu phẳng đối xứng. Giao của $n - m$ siêu phẳng tùy ý trong số đó sẽ cho ta một m-phẳng đối xứng, trong đó $m > 0$. Tuy nhiên $x_{r+1} = 0$ không là siêu phẳng đối xứng.

Bài tập

Bài 36.1* (Tính duy nhất của phương trình biểu diễn) Cho F là một siêu mặt bậc hai trong không gian afin trên $\mathbb{R}$ không phải là các không gian con afin. Giả sử F được cho bởi hai cách khác nhau: $F_1(x) = 0$ và $F_2(x) = 0$, trong đó $F_1(x)$ và $F_2(x)$ là các hàm bậc hai. Chứng minh rằng tồn tại $\lambda \neq 0$ để $F_1(x) = \lambda F_2(x)$.

Bài 36.2 Tiếp tuyến của một đường cong $\mathcal{C}$ tại một điểm $A \in \mathcal{C}$ là giới hạn (nếu tồn tại) của đường cát tuyến AB ($B \in \mathcal{C}$) khi B dần tới A. Chứng minh rằng tiếp tuyến của ellip, hyperbol, parabol với các phương trình tương ứng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + 2y = 0,$$

tại tiếp điểm (x_0, y_0) lần lượt có phương trình là

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_0}{a^2} + (y + y_0) = 0.$$

Bài 36.3 Chứng minh rằng quĩ tích các điểm trên mặt phẳng (Ơclit) có tổng các khoảng cách đến hai điểm F, F' cho trước không đổi là một ellip. (F, F' được gọi là các *tiêu điểm* của ellip). Từ tính chất này ta suy ra cách vẽ một ellip như sau: ta có thể lấy một sợi dây buộc chặt hai đầu mút vào 2 điểm rồi tựa đầu bút kéo căng sợi chỉ để vẽ.

Bài 36.4* Chứng minh rằng các tiêu điểm của một ellip có tính chất sau: một tia sáng tùy ý qua một tiêu điểm gặp đường ellip sẽ phản xạ thành tia đi qua điểm tiêu điểm còn lại (tia phản xạ đối với ellip là tia phản xạ đối với đường tiếp tuyến tại giao điểm của tia và đường ellip).

Bài 36.5 Tìm quĩ tích các điểm trên mặt phẳng (Ơclit) có tỉ số giữa khoảng cách từ nó tới một điểm F cho trước và khoảng cách từ nó tới một đường thẳng L cho trước không qua F là một số không đổi. (Điểm F cũng chính là tiêu điểm của quĩ tích).

Bài 36.6 Trong mặt phẳng (Ơclit) kí hiệu C là đường tròn bán kính a và S là ellip được cho bởi phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Khi đó có thể xem S là ảnh của C qua ánh xạ afin sau

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y).$$

Hai đường kính D và D' (các dây cung đi qua tâm) của S được gọi là *liên hợp với nhau*, nếu nghịch ảnh của chúng $f^{-1}(D)$ và $f^{-1}(D')$ là hai đường kính vuông góc của đường tròn S. Chứng minh rằng:

a) Đường kính D đi qua trung điểm của dây cung T song song với đường kính liên hợp D'.

Nếu P, P' lần lượt là hai đầu mút của 2 đường kính liên hợp D và D' và O là tâm ellip, thì

b) $d(O, P)^2 + d(O, P')^2 = a^2 + b^2$.

c) Diện tích tam giác OPP' bằng $\frac{1}{2}ab$.

Bài 36.7 Chứng minh rằng quĩ tích các điểm trên mặt phẳng (Ơclit) sao cho khoảng cách từ nó tới một điểm F cho trước bằng khoảng cách từ nó tới một đường thẳng L cho trước không chứa F là một parabol (F được gọi là *tiêu điểm* của parabol).

Bài 36.8 Chứng minh rằng các tia đi qua tiêu điểm khi gặp parabol được phản xạ thành các tia song song với nhau.

Bài 36.9 Chứng minh rằng quĩ tích các điểm trên mặt phẳng (Ơclit) có hiệu các khoảng cách đến hai điểm F, F' cho trước không đổi là một hyperbol. (F, F' được gọi là các *tiêu điểm* của hyperbol). Từ đó ta cũng có cách vẽ một nhánh hyperbol như sau: Gắn một đầu thước kẻ vào một điểm F' trên giấy sao cho thước có thể quay được. Buộc chặt một đầu của một sợi chỉ với đầu còn lại của thước và và đầu kia của sợi chỉ với một điểm F' khác trên giấy. Quay thước xung quanh F' và giữ đầu bút sát mép thước sao cho sợi chỉ căng. Khi đó đầu bút sẽ vạch nên một nhánh hyperbol.

Bài 36.10 Chứng minh rằng các tiêu điểm của một hyperbol có tính chất sau: một tia sáng tùy ý qua một tiêu điểm gặp đường hyperrbol sẽ phản xạ thành tia mà phần kéo dài của nó sẽ đi qua điểm tiêu điểm còn lại.

Bài 36.11 Đường thẳng L được gọi là *đường tiệm cận* của đường cong C nếu $d(P, L) \to 0$ khi $P \in C$ và tọa độ của P dần tới ∞. Chứng minh rằng trong các đường ellip, parabol, hyperbol chỉ có hyperbol có đường tiệm cận. Viết phương trình của các đường tiệm cận.

Bài 36.12 Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của ellip hay hyperbol đến tiếp tuyến tùy ý là không đổi.

Bài 36.13 Tìm quĩ tích hình chiếu vuông góc của tiêu điểm của parabol xuống các tiếp tuyến của nó.

Bài 36.14 Chứng minh rằng diện tích tam giác tạo bởi hai đường tiệm cận và một tiếp tuyến tùy ý của hyperbol là không đổi.

Bài 36.15 Cho AB là dây cung tùy ý của ellip (t.ư. hyperbol hay một parabol) trong mặt phẳng Ơclit đi qua một tiêu điểm F của nó. Chứng minh rằng $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB}$ không đổi.

Bài 36.16 Chứng minh rằng giao điểm của một mặt nón tròn xoay với một mặt phẳng cho ta một đường bậc hai, và mọi đường bậc hai có thể nhận được bằng cách này.

Bài 36.17 Vẽ các đường cong bậc hai sau trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc tự nhiên:

a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 4\sqrt{5}x + 8 = 0$.

b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$.

c) $5x^2 + 4xy + 5y^2 + \sqrt{2}(x + y) = \frac{62}{7}$.

Bài 36.18 Viết dạng chính tắc trục chính và các phép chuyển tọa độ tương ứng của các mặt bậc hai sau đây

a) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = 0$.

b) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$.

c) $2xy - 6x + 10y + z = 31$.

Bài 36.19 Cho ellipsoid trong không gian Ơclit ba chiều

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a \geq b \geq c > 0).$$

Tìm những mặt phẳng cắt nó theo một đường tròn.

Bài 36.20 Chứng minh rằng trong không gian Ơclit ba chiều không có đoạn thẳng thực sự (tức là độ dài dương) nào nằm trên mặt ellipsoid, hyperboloid 2 tầng hoặc trên paraboliod elliptic.

Bài 36.21 Ta nói mặt cong S' là tiệm cận của mặt cong S nếu khoảng cách $d(P, S')$ từ điểm $P \in S$ tới S' dần tới 0 khi $P \to \infty$. Chứng minh rằng mặt nón

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

là tiệm cận của hyperbolid (1 hoặc 2 tầng):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

Bài 36.22 Chứng minh rằng qua mỗi điểm trên hyperboloid một tầng hoặc paraboloid hyperbolic có đúng hai đường thẳng nằm hoàn toàn trên mặt bậc hai đó.

Chương 11

Đôi điều tản mạn

37 Một vài ứng dụng

Mục này sẽ giới thiệu hai trong số vô vàn ứng dụng của đại số tuyến tính. Một ứng dụng liên quan đến một trong những vấn đề cơ bản của Toán học, và ứng dụng khác liên quan đến nhiều vấn đề thực tiễn.

37.1 Định lí cơ bản của Đại số

Định lí 37.1 *Mọi đa thức khác hằng trên trường số phức đều có nghiệm.*

Định lí này lần đầu tiên do nhà toán học Đức K. Gauss chứng minh năm 1799 trong luận án tiến sĩ của mình. Cho đến nay có hơn 70 cách chứng minh nó. Sau đây là một chứng minh hầu như chỉ sử dụng đại số tuyến tính (ngoại trừ một khẳng định trong giải tích là mọi đa thức với hệ số thực bậc lẻ đều có nghiệm thực). Nó được trình bày trong [2].

Để chứng minh Định lí cơ bản của đại số, với mỗi trường K, số nguyên dương d và r, ta xét khẳng định sau đây:

$\mathcal{P}(K, d, r)$: *Cho r toán tử tuyến tính $A_1, ..., A_r$ bất kì đôi một giao hoán với nhau của không gian véc tơ V chiều n trên K sao cho d không chia hết n. Khi đó r toán tử tuyến tính này có chung véc tơ riêng.*

Những điều sau đây có thể chứng minh được:

(a) Nếu $\mathcal{P}(K, d, 1)$ đúng thì $\mathcal{P}(K, d, r)$ đúng với mọi $r \geq 1$ (xem Bài 19.19).

(b) $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, r)$ đúng: điều này được suy ra trực tiếp từ Bài 18.11 và khẳng định (a) nêu trên.

Bổ đề 37.2 *$\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$ đúng với mọi số nguyên dương k và r.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo k.

Trước hết với $k = 1$, từ (a) nêu trên, ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2, 1)$. Ta sẽ đồng nhất một toán tử tuyến tính của $\mathbb{C}^n$ với ma trận biểu diễn của nó theo cơ sở tự nhiên. Cho $A \in M(n, \mathbb{C})$ với n lẻ. Khẳng định $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2, 1)$ có nghĩa là A có véc tơ riêng. Ta kí hiệu $\mathcal{H}$ là tập các ma trận Hermite cấp n. Ta xét 2 toán tử tuyến tính sau của $\mathcal{H}$

$$L_1 : \mathcal{H} \ni B \longmapsto (AB + BA^*)/2,$$
$$L_2 : \mathcal{H} \ni B \longmapsto (AB - BA^*)/(2i).$$

Khi đó theo Bài 13.18, L_1 và L_2 là hai toán tử tuyến tính giao hoán với nhau của $\mathcal{H}$ và $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = n^2$ lẻ. Vì $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, 2)$ đúng (xem (b) ở trên) ta suy ra L_1 và L_2 có chung một véc tơ riêng, chẳng hạn ma trận $B \neq 0$, tức là $L_1(B) = \alpha B$ và $L_2(B) = \beta B$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nhưng khi đó

$$(L_1 + iL_2)(B) = AB = (\alpha + \beta i)B,$$

và mọi cột khác 0 của B sẽ là véc tơ riêng của A.

Bây giờ giả sử $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^i, r)$ đúng với mọi $i < k$. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$, hay theo (a) ở trên ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, 1)$. Giả sử $A \in M(n, \mathbb{C})$, trong đó n không chia hết cho 2^k. Ta chỉ cần xét trường hợp $n \vdots 2^{k-1}$. Kí hiệu $\mathcal{S}$ là tập các ma trận phức đối xứng lệch cấp n. Ta xét các toán tử tuyến tính sau của $\mathcal{S}$:

$$N_1 : \mathcal{S} \ni B \longmapsto AB + BA^T,$$
$$N_2 : \mathcal{S} \ni B \longmapsto ABA^T.$$

Theo Bài 13.19, hai toán tử tuyến tính này giao hoán với nhau, và $\dim V = n(n-1)/2$. Số này không chia hết cho 2^{k-1}. Theo giả thiết qui nạp $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^{k-1}$ đúng. Do đó N_1 và N_2 có chung véc tơ riêng, chẳng hạn ma trận $B \neq 0$, và $N_1(B) = \lambda B$, $N_2(B) = \mu B$, trong đó $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Từ điều kiện $\lambda B = N_1(B) = AB + BA^T$, ta suy ra $BA^T = \lambda B - AB$. Do đó

$$\mu B = ABA^T = A(\lambda B - AB),$$

hay

$$(A^2 - \lambda A + \mu I)B = 0.$$

Nếu v là một véc tơ cột khác 0 của B thì từ trên ta có

$$(A^2 - \lambda A + \mu I)v = 0.$$

Chú ý rằng $t^2 - \lambda t + \mu = (t - c_1)(t - c_2)$, trongđó $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Do đó

$$(A^2 - \lambda A + \mu I)v = (A - c_1 I)((A - c_2 I)v) = 0.$$

Nếu $u := (A - c_2 I)v = 0$ thì v là véc tơ riêng của A (ứng với giá trị riêng c_2). Nếu $u \neq 0$, thì từ trên ta có $(A - c_1 I)u = 0$, và u là véc tơ riêng. Trong mọi trường hợp Bổ đề được chứng minh. □

Từ đó ta có thể mở rộng Bài 19.13 mà không cần sử dụng Định lí cơ bản của Đại số.

Định lí 37.3 *Nếu $A_1, ..., A_r$ là các toán tử tuyến tính đôi một giao hoán với nhau của không gian véc tơ phức hữu hạn chiều thì chúng có chung véc tơ riêng.*

Chứng minh. Giả sử $n = \dim V$. Ta luôn tìm được k sao cho 2^k không chia hết cho n. Sử dụng khẳng định $\mathcal{P}(n, 2^k, r)$ của Bổ đề trên, ta có ngay điều cần chứng minh. □

Bây giờ ta có thể chứng minh Định lí cơ bản của Đại số như sau:
Chứng minh. Ta có thể giả sử hệ số đầu của đa thức f cần xét là 1, tức là

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Lấy A là ma trận đồng hành của $f(x)$ (xem Bài 21.2). Khi đó đa thức đặc trưng của A là $f(x)$. Theo Định lí 37.3, A có véc tơ riêng, nghĩa là A có giá trị riêng và nó là nghiệm của $f(x)$!

37.2 Qui hoạch tuyến tính

Bài toán qui hoạch tuyến tính có thể phát biểu như sau:
Tìm cực tiểu của $\psi(X) := b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n$,
trong đó $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} \varphi_1(X) + b_1 := a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0, \\ \cdots \\ \varphi_m(X) + b_m := a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Các bất đẳng thức trên được gọi là các *ràng buộc*. Véc tơ $X = (x_1, ..., x_n)$ thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là *phương án chấp nhận được*. Nếu p là một phương án chấp nhận được mà $\psi(p) \leq \psi(X)$, trong đó X là một

phương án chấp nhận được tùy ý, thì p được gọi là *phương án tối ưu*, hay *lời giải tối ưu*.

Chú ý: Thông thường trong bài toán qui hoạch tuyến tính, người ta hay yêu cầu có các ràng buộc $x_1, ..., x_n \geq 0$. Tuy nhiên ta luôn có thể đạt được điều này bằng cách đưa thêm biến mới và các ràng buộc mới:

$$x_i = y_i - z_i,\ y_i, z_i \geq 0.$$

Đây là một bài toán rất hay gặp trên thực tế. Bài toán này đã được G. B. Danzig nghiên cứu một cách hệ thống năm 1947 cho quân lực Hoa Kì. Trên cơ sở đó Ông đã tìm ra thuật toán giải nổi tiếng, gọi là *Thuật toán đơn hình*. Sau đây là ý tưởng chính của phương pháp này.

Để cho tiện trình bày, ta giả sử tập phương án chấp nhận được S là khác rỗng và bị chặn. Khi đó theo Bài 35.22, $\psi(X)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một đỉnh của đa diện S. Nói cách khác ta có thể giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng cách duyệt toàn bộ giá trị của ψ tại các đỉnh của S. Mặt khác theo Bài 35.23, mỗi đỉnh của S là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình. Như vậy ta có thể giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng một số hữu hạn bước như sau (một điều không hoàn toàn hiển nhiên):

(i) Xác định tất cả các tập con gồm n dạng tuyến tính độc lập tuyến tính:

$$\{\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_n}\} \subseteq \{\varphi_1, ..., \varphi_m\}.$$

Ứng với mỗi tập con như vậy, ta giải hệ phương trình tuyến tính

$$\varphi_{i_1} + b_{i_1} = 0, ..., \varphi_{i_n} + b_{i_n} = 0.$$

Cuối bước này ta sẽ tìm được k điểm $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}^n$, trong đó $k \leq \binom{m}{n}$.

(ii) Lần lượt thử xem $p_i \in S$ hay không, tức là có thỏa mãn các bất phương trình còn lại hay không. Từ đó ta sẽ được các đỉnh $p_1, ..., p_r$ của S.

(iii) Tính $\psi(p_1), ..., \psi(p_r)$ và ta sẽ được phương án tối ưu.

Tuy nhiên, nếu duyệt toàn bộ các đỉnh như thế này thì độ phức tạp tính toán rất lớn (cỡ $O(2^m)$ phép toán) . Ý tưởng tiếp theo của Danzig là tìm cách chuyển từ một đỉnh p đang xét tới một đỉnh mới. Ông đã chứng minh được rằng nếu dọc theo mọi cạnh - mặt một chiều - của S xuất phát

từ p mà giá trị của ψ không đổi, thì $\psi(p)$ là giá trị bé nhất, và thuật toán dừng. Như vậy ta chỉ cần di chuyển tới đỉnh mới dọc theo một cạnh của S xuất phát từ p mà giá trị của ψ nhỏ đi. Việc thực hiện này cũng khá đơn giản, vì hai hệ phương trình xác định hai đỉnh kề nhau này chỉ khác nhau bởi một phương trình! Độc giả có thể dễ dàng tìm thấy thuật toán này ở bất kì quyển sách nào về qui hoạch tuyến tính.

38 Sử dụng MAPLE

Với hàng loạt phần mềm tính toán hiện nay như Maple, Mathematica, ..., việc giải các bài tập tính toán cụ thể của đại số tuyến tính là một điều hết sức dễ dàng. Không những thế, còn có thể sử dụng những phần mềm này để tạo ra các bộ đề tính toán phong phú một cách tùy thích! Mục đích của phần này là giới thiệu qua với độc giả một phần mềm như vậy: Maple.

A. Khai báo

MAPLE là một phần mềm thương mại. Nó cung cấp một môi trường tính toán phong phú, và có nhiều phiên bản. Độc giả có thể tham khảo quyển sách [3] để biết cách sử dụng MAPLE 5 trong một số tính toán phổ dụng. Đối với từng chuyên ngành, MAPLE cung cấp một gói lệnh riêng, mà đương nhiên quyển sách vừa nêu không thể bao quát được. Mục này trình bày một số lệnh về đại số tuyến tính của MAPLE 6. Có nhiều gói lệnh về đại số tuyến tính - và nhiều khi lệnh trong gói này khác với lệnh trong gói khác. Trong quyển [3] đã giới thiệu qua về gói lệnh "linalg". Dưới đây ta sẽ giới thiệu đôi chút về gói lệnh "LinearAlgebra". Ưu điểm của nó so với gói "linalg" là nó có cú pháp gần với cách viết thông thường vẫn được sử dụng ở các giáo trình đại học. Nhìn chung, các gói lệnh này ngày càng được hoàn thiện và mở rộng ở những phiên bản sau của MAPLE. Do vậy độc giả chỉ cần biết nguyên tắc sử dụng một số lệnh, rồi có thể tự khai thác những công dụng khác bằng cách xem chỉ dẫn ở "help" đi kèm theo phần mềm. Để sử dụng gói "LinearAlgebra" ta phải gọi nó ra bằng cách đánh:

```
> with(LinearAlgebra);
```

Trong Maple lệnh bắt đầu bằng > và kết thúc bằng dấu chấm phẩy ";". Để thực hiện lệnh, ta cần nhấn "Enter". Khi đó kết quả sẽ được in ra. Nếu chưa muốn thực hiện ngay lệnh đó, thì dùng dấu hai chấm ":", máy sẽ xuống dòng và đòi lệnh tiếp theo... Khi nào gặp lệnh kết thúc bằng dấu chấm phẩy, nó sẽ thực hiện tất cả các lệnh trước đó và in kết quả dòng lệnh cuối cùng.

Trong Maple phép toán nhân được thay bằng dấu *, dấu chia là /, còn nâng lên lũy thừa dùng kí hiệu ^. Danh sách các phần tử được để trong ngoặc vuông [ ], và cách nhau dấu phẩy. Để gán trị dùng dấu := . Ví dụ:

```
> F:=[s^2/(2*s+1)*x^2*y-(s+1)*y,(3*s-1)/3*x*y^2-1/(s-1)*x]:
```

cho ta danh sách hai đa thức

$$F := [\frac{s^2}{2s+1}x^2y - (s+1)y, \frac{3s-1}{3}xy^2 - \frac{1}{s-1}x].$$

Biến: Dạng đơn giản là dãy các chữ cái viết liền nhau: `x,y,abc,...` Cũng có thể dùng biến có chỉ số, được viết dưới dạng `x_1,x_2,ab_3,xyz_[1,2],...` hoặc dạng `x1,x2,ab21,...` Chữ cái viết hoa và viết thường có nghĩa khác nhau. Ngay từ đầu, Maple không phân biệt tham số và biến (dùng để chỉ các đối tượng tính toán như đa thức, ma trận,...), trừ trường hợp hiển nhiên khi chữ cái nằm trong mẫu số thì được xem là tham số. Sau này khi cần, ta có thể liệt kê rõ danh sách biến thì các chữ cái còn lại sẽ là tham số. Trong ví dụ danh sách hai đa thức F ở trên thì s là tham số, còn x, y có thể coi là biến hoặc tham số, tùy ngữ cảnh sử dụng sau này.

Chú ý rằng một số biến đã được mặc định trong MAPLE, như `I, Pi, Alpha,...` có nghĩa là số ảo i, số π, biến α, ...

Trường: Mặc định của Maple là làm việc với trường số (hữu tỉ, thực, phức). Nếu muốn làm việc với một trường hàm, hoặc trường có đặc số dương, thì phải khai báo nó. Để làm được điều đó phải mở gói lệnh `with(Ore_algebra)` mà khai báo. Ví dụ:

```
> with(Ore_algebra):
> A:=poly_algebra(s,x,y,characteristic=3):
```

có nghĩa là A là trường hàm $K(s, x, y)$ với đặc số 3.

Chú ý: Maple cho phép ta sửa lỗi cú pháp. Điều đó có nghĩa là nếu sau khi tính toán mà máy báo sai, hay ta phát hiện ra sai sót, thì ta không cần đánh máy lại, mà có thể sửa lại các dòng lệnh đã đánh, rồi nhấn "Enter" khi kết thúc để máy thực hiện lại dòng lệnh đó. Lợi dụng tính năng này, khi tính nhiều ví dụ cùng lúc, ta có thể thay đổi dữ liệu ban đầu mà không cần đánh lại một số dòng lệnh. Maple cũng cho phép sao chép các dòng lệnh, và đặc biệt cho phép lập trình.

B. Khai báo véc tơ và ma trận

Hai đối tượng cơ bản nhất trong đại số tuyến tính là véc tơ và ma trận. Có thể khai báo chúng một cách khá đơn giản dựa theo nguyên lí sau:

(•) `<a, b, c>` xây dựng một đối tượng mới từ các đối tượng đã biết theo cột.

(••) `<a|b|c>` xây dựng một đối tượng mới từ các đối tượng đã biết theo dòng.

Như vậy, nếu tất cả các thành phần a, b, c là các phần tử vô hướng thì ta sẽ được các véc tơ cột (theo (•)) hay các véc tơ dòng (theo (••)). Trong các trường hợp khác, ta sẽ được một ma trận (hoặc máy sẽ báo lỗi, nếu chúng không tương thích).

Ví dụ 38.1 Các lệnh

```
>u_1:=<1,2,3>;
>u_2:=<x,y,z>;
>u_3:=<4|5|6|7>;
>u_4:=<p|q|r|s>;
```

tương ứng sẽ cho ta các véc tơ:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} p & q & r & s \end{pmatrix}.$$

Các lệnh tiếp theo

```
>A_1:=<u_1|u_2>; (hoặc >A_1:=<<1,2,3>|<x,y,z>>;)
>A_2:=<u_3,u_4>; (hoặc >A_2:=<<4|5|6|7>,<p|q|r|s>>;)
```

Cho ta các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ p & q & r & s \end{pmatrix}.$$

Như vậy ngoài việc khai báo ma trận một cách trực tiếp, ta có thể khai báo nó thông qua các véc tơ cột hoặc dòng của nó.

Các lệnh

```
>A_3:=<A_2,A_2>;
>A_4:=<A_1|A_1>;
```

sẽ cho ta các ma trận sau:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ p & q & r & s \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ p & q & r & s \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & x \\ 2 & y & 2 & y \\ 3 & z & 3 & z \end{pmatrix}.$$

Như vậy ta cũng có thể xây dựng các ma trận khối từ các ma trận con.

Một số ma trận đặc biệt: Ma trận đơn vị r dòng và s cột là ma trận gồm các phần tử 1 tại các vị trí đường chéo (i, i), còn lại là 0 và được cho bởi lệnh sau:

```
>IdentityMatrix(r,c); và (khi r=c)  >IdentityMatrix(r);
```

Ma trận 0:

```
>ZeroMatrix(r,c); và (khi r=c)  >ZeroMatrix(r);
```

Ma trận đường chéo

```
>DiagonalMatrix([b_1,b_2,b_3]);
```

Nếu b_i là các ma trận thì ta được ma trận đường chéo khối.

C. Một số lệnh

1. **Phép cộng**: Để tính $cA + dB$, trong đó A, B đồng thời là hai véc tơ hay hai ma trận cùng kích thước, còn c, d là các phần tử vô hướng, ta dùng lệnh:

   ```
   >Add(A,B,c,d);
   ```

   Nếu $c = d = 1$, tức là để tính $A + B$, ta có thể viết đơn giản là

   ```
   >Add(A,B);
   ```

   Chú ý rằng lệnh

   ```
   >Add(A,c);
   ```

   cho ta kết quả là ma trận $A + cI'$, trong đó I là ma trận đơn vị (theo nghĩa rộng ở trên) cùng kích thước như A. Nói riêng nếu A là ma trận vuông, thì

```
>Add(A,-t);
```

cho ta ma trận đặc trưng $A - tI$.

2. **Phép nhân**: Để tính tích hai ma trận (véc tơ), ta dùng lệnh:

```
>Multiply(A,B);
```

Tuy nhiên để tính tích vô hướng của ma trận A và phần tử s, ta dùng lệnh

```
>ScalarMultiply(A, s);
```

3. **Ma trận chuyển vị** của A được tính bằng lệnh:

```
>Transpose(A);
```

4. **Tích vô hướng**: Tích vô hướng $\langle v1, v2\rangle$ của hai véc tơ cùng kích thước được tính bằng lệnh

```
>DotProduct(v1,v2);
```

5. **Độc lập tuyến tính - Cơ sở - Hạng** Cho hệ véc tơ $v_1, ..., v_n$, ta có thể tìm một hệ con là cơ sở của không gian con sinh bởi các véc tơ này thông qua lệnh (chẳng hạn $n = 4$):

```
>Basis([v_1,v_2,v_3,v_4]);
```

Từ đó ta sẽ biết được hạng r của hệ này, và biết được hệ có độc lập tuyến tính hay không (tức $r = n$ hay không).

Nếu chỉ cần tính hạng của hệ véc tơ, ta lập ma trận A từ các véc tơ đó (xem phần B), rồi dùng lệnh tính hạng:

```
>Rank(A);
```

Chú ý rằng nếu ta có một số hệ véc tơ, chẳng hạn v_1, v_2 và u_1, u_2, u_3 thì ta có thể tìm cơ sở của không gian tổng và giao của các không gian con sinh bởi các hệ này thông qua các lệnh tương ứng sau

```
>SumBasis([[v_1,v_2],[u_1,u_2,u_3]]);
>IntersectionBasis([[v_1,v_2],[u_1,u_2,u_3]]);
```

6. **Định thức** của ma trận vuông A được tính bằng lệnh:

```
>Determinant(A);
```

Đa thức đặc trưng (biến là λ) có thể tính được trực tiếp bằng lệnh

```
>CharacteristicPolynomial(A,lambda);
```

7. **Ma trận nghịch đảo** của ma trận vuông A được tính bởi lệnh:

```
>MatrixInverse(A);
```

Nếu A khả nghịch máy sẽ cho kết quả là A^{-1}. Nếu không máy sẽ báo lỗi, thậm chí cho biết hạng của A.

8. **Giải hệ phương trình tuyến tính**: Để giải hệ phương trình $AX = b$ và biểu diễn biến tự do bởi s_i (nếu có), ta dùng lệnh:

```
>LinearSolve(A,b,free='s');
```

9. **Véc tơ riêng, giá trị riêng**: Ta có thể tìm giá trị riêng của ma trận vuông A bằng cách tìm đa thức đặc trưng như nêu ở trên rồi giải phương trình đa thức, nhưng cũng có thể tìm trực tiếp bằng lệnh:

```
>Eigenvalues(A);
```

Ta cũng có thể tìm các véc tơ riêng và qua đó biết luôn giá trị riêng qua lệnh sau:

```
>(lambda,V):=Eigenvectors(A);
```

Khi đó máy sẽ cho ta kết quả là một véc tơ cột λ gồm n giá trị riêng (kể cả phức) của A (n là cấp của A), còn V là ma trận mà cột thứ i của nó là véc tơ riêng ứng với λ_i. Nếu không gian con riêng ứng với một giá trị riêng λ_i nào đó có chiều lớn hơn một thì máy sẽ cho một cơ sở của không gian con riêng đó.

Ví dụ 38.2 Để tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ta dùng các lệnh

```
>A:=<<4|-5|2>,<5|-7|3>,< 6|-9|4>>:
>B:=DiagonalMatrix([1,0,0]):
>(lambda,V):=Eigenvectors(A);
> (mu,W):=Eigenvectors(B);
```

Kết quả sẽ là

$$\lambda, V := \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 0 & 1\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mu, W := \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Điều đó có nghĩa là tuy đa thức đặc trưng của cả hai ma trận A và B đều nhận 0 làm nghiệm bội (hai), nhưng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ không gian con riêng của A có chiều là 1, còn của B có chiều là 2.

10. **Dạng chuẩn tắc Jordan**: Để tìm dạng chuẩn tắc Jordan J của ma trận vuông A trên trường phức cũng như ma trận chuyển cơ sở P để $P^{-1}AP = J$, ta dùng các lệnh sau

```
>J:=JordanForm(A);
>P:=JordanForm(A,output='Q');
```

Chú ý: Khối Jordan ở đây định nghĩa hơi khác so với trang 137.

11. **Cơ sở trực giao** Để trực giao hóa một hệ véc tơ (theo Thuật toán Gram-Schmidt - trang 149) của hệ véc tơ $v_1, ..., v_n$ ta thực hiện theo lệnh sau (chẳng hạn với $n = 4$)

```
> S:=GramSchmidt([v_1,v_2,v_3,v_4]);
```

Để tìm cơ sở trực chuẩn, ta dùng

```
>S:=GramSchmidt([v_1,v_2,v_3,v_4],normalized);
```

Bài tập

Mục đích của các bài tập dưới đây nhằm minh họa khả năng sử dụng MAPLE6 để xây dựng một (bộ) đề kiểm tra cho nhiều người cùng một lúc với độ khó như nhau. Dưới đây mỗi họ đều hiểu là họ không tầm thường, tức là phải mất công tính toán (đôi khi phức tạp) mới kiểm chứng được tính chất cần thiết của nó.

Bài 38.1 Hãy xây dựng một họ 3 véc tơ trong $\mathbb{R}^4$ độc lập tuyến tính.

Bài 38.2 Hãy xây dựng một họ ma trận vuông cùng cấp có định thức bằng nhau mà các ma trận này chứa ít phần tử 0.

Bài 38.3 Hãy xây dựng một họ hệ phương trình tuyến tính không suy biến 3 ẩn 3 phương trình sao cho tất cả các hệ đều có nghiệm giống nhau.

Bài 38.4 Hãy xây dựng một họ ma trận vuông cấp 3 với các phần tử nguyên và có các giá trị riêng như nhau.

Bài 38.5 Hãy xây dựng một họ ma trận vuông cấp 3 với các phần tử nguyên và chéo hóa được (hoặc cùng không chéo hóa được).

Bài 38.6 Hãy xây dựng một họ mặt bậc hai sao cho dạng chuẩn tắc trục chính của chúng cùng dạng.

Bài 38.7 Hãy xây dựng một họ dạng toàn phương phụ thuộc λ sao cho mỗi dạng toàn phương là xác định dương khi và chỉ khi $\lambda > 0$.

PHẦN II: Lời giải, chỉ dẫn hoặc đáp số

Lời giải, chỉ dẫn chương 1

1.1 Ta xét tập các nghiệm của hệ phương trình như một tập con của tích Đề-các K^n. Khi đó hãy chứng tỏ rằng tổng của hai nghiệm, và tích của một nghiệm với một phần tử của trường lại là nghiệm của hệ. Bây giờ hãy áp dụng Bổ đề 1.2.

1.2 Kí hiệu tập nghiệm là $S \subseteq K^n$. Vì hệ không thuần nhất, nên nó chứa một phương trình dạng $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$, mà $\beta \neq 0$. Khi đó $(0, ..., 0)$ không là nghiệm của phương trình này, nên nó không thuộc S. Theo Hệ quả 1.3, S không là không gian con, và vì vậy không là không gian véc tơ.

1.3 Ta xét các tập hợp này như tập con của tập tất cả các hàm số thực. Theo ví dụ 1.2(ii) tập tất cả các hàm số thực lập thành không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$. Do đó ta có thể áp dụng Bổ đề 1.2. Các tập ở a) - d) và f) là các không gian véc tơ. Các tập ở e), g) và h) không thỏa mãn Hệ quả 1.3 nên không là không gian véc tơ.

1.4 Trước hết hãy chứng tỏ rằng tập các dãy thực $(a_1, a_2, ...)$ lập thành không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ với véc tơ không là $(0, 0, ...)$. Sau đó áp dụng Bổ đề 1.2 để chứng tỏ các tập ở a) và c) là các không gian con. Tập ở d) với $p > 0$ cũng là không gian con do bất đẳng thức sau:

$$|(a+b)^p| \leq (|a| + |b|)^p \leq 2^p(\max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

Tập ở b) và d) với $p < 0$ không là không gian con vì không chứa $(0, 0, ...)$.

1.5 a) Trước hết ta thấy rằng phép cộng ma trận và phép nhân một số với ma trận là các phép toán với véc tơ 0 là ma trận 0, còn véc tơ đối là ma trận đối. Việc kiểm tra các tiên đề khi đó được đưa về việc thử các tiên

đề trên từng phần tử nằm ở cột thứ i và hàng thứ j. Nhưng các phần tử trên từng vị trí đó thuộc trường K, và bản thân K là một không gian véc tơ trên K, nên cả 8 tiên đề đều thỏa mãn. Vậy $M(m,n;K)$ là không gian véc tơ trên K.

b)-e): áp dụng Bổ đề 1.2 hãy chứng tỏ các tập này là không gian con của $M(n;K)$.

f) Tập này không là không gian con của $M(n;K)$ nếu $n > 1$, bởi vì mỗi ma trận A có thể viết thành tổng của ma trận tam giác trên B với $b_{ii} = a_{ii}$, $i < n$ và $b_{nn} = 0$ và ma trận tam giác dưới C với $c_{ii} = 0$, $i < n$ và $c_{nn} = a_{nn}$. Rõ ràng $|B| = |C| = 0$, nhưng có thể chọn A có $|A| \neq 0$ (chẳng hạn $A = I$ là ma trận đơn vị).

1.6 Kiểm tra trực tiếp cả 8 tiên đề.

1.7 Do V là không gian véc tơ nên $f(s) + g(s) \in V$ và $\alpha f(s) \in V$, tức là $f + g$, $\alpha f \in M(S,V)$, hay các phép toán được định nghĩa là hợp lí. Ta có thể thấy ngay ánh xạ luôn nhận giá trị 0 là véc tơ 0, còn ánh xạ $s \mapsto -f(s)$ là véc tơ đối của ánh xạ f. Việc kiểm tra các tiên đề khi đó được đưa về việc thử các tiên đề trên tập phần tử $\{f(s);\ f \in M(S,V)\}$, trong đó s cố định. Nhưng vì V là không gian véc tơ, nên chúng thỏa mãn.

1.8 Tất cả các tiên đề đều thỏa mãn, trừ tiên đề $1.(a,b) = (a,0) \neq (a,b)$.

1.9 Tập $V \setminus U$ không chứa véc tơ 0.

1.10 Cho $u, v \in \sum_{i\in I} V_i$. Bằng cách thêm các hạng tử 0, ta có thể viết $u = u_1 + \cdots + u_n$ và $v = v_1 + \cdots + v_n$, trong đó $u_1, v_1 \in V_{i_1}, ..., u_n, v_n \in V_{i_n}$. Khi đó, với mọi $\alpha \in K$ cũng có $\alpha u = \alpha u_1 + \cdots + \alpha u_n$ và $u + v = (u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n)$, với $\alpha u_j \in V_{n_j}$ và $u_j + v_j \in V_{n_j}$. Vậy $\sum_{i\in I} V_i$ đóng với cả hai phép toán, và do đó là không gian con.

1.11 Cho K là trường vô hạn. Giả sử không có V_i nào chứa tất cả các không gian còn lại. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $V_i \not\subseteq \cup_{j\neq i} V_j$ với mọi $i = 1, ..., n$. Chọn $v_1 \in V_1 \setminus \cup_{i\neq 1} V_i$ và $v_2 \in V_2 \setminus \cup_{i\neq 2} V_i$. Xét các phần tử $v_1 + \alpha v_2$, trong đó $\alpha \in K^* := K \setminus \{0\}$. Ta khẳng định phải có một phần tử không thuộc $V_3 \cup ... \cup V_n$. Giả sử ngược lại. Do K^* chứa nhiều hơn $n-1$ phần tử, nên có ít nhất $n-1$ phần tử dạng vừa nêu. Vì vậy ta tìm được $j \geq 2$ sao cho có ít nhất hai phần tử khác nhau $v_1 + \alpha_1 v_2$, $v_1 + \alpha_2 v_2 \in V_j$. Khi đó $(\alpha_1 - \alpha_2)v_2 \in V_j$. Suy ra $v_2 \in V_j$, vô lí. Vậy ta tìm được $v_1 + \alpha v_2 \notin V_3 \cup ... \cup V_n$. Bây giờ ta dễ dàng kiểm tra phần tử này cũng không thuộc $V_1 \cup V_2$. Do đó $\cup V_i$ không là không gian con.

Nếu K là trường hữu hạn thì điều khẳng định không còn đúng nữa.

Chẳng hạn lấy $V = K^2$ và với mỗi $(a, b) \in K^2$, lấy $V_{a,b} = K \cdot (a, b)$ là không gian con thực sự của V. Khi đó $V = \cup_{a,b \in K} V_{a,b}$.

1.12 Đặt $W = \cup_{E \in \mathcal{X}} E \subseteq V$. Rõ ràng W đóng với phép nhân. Giả sử $u, v \in W$. Khi đó tồn tại $E_1, E_2 \in \mathcal{X}$ để $u \in E_1$ và $v \in E_2$. Chọn $E_3 \in \mathcal{X}$ chứa E_1 và E_2. Khi đó $u, v \in E_3$ và $u + v \in E_3 \subseteq W$. Vậy W cũng đóng với phép cộng.

1.13 Bài tập này muốn chứng tỏ rằng đôi khi kiểm tra một tập có là không gian con hay không là một việc chẳng dễ dàng tí nào. Lời giải dưới đây vượt ra khỏi kiến thức của mục này (xem Mục 3).

Cho α là nghiệm của đa thức $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ bậc $n \geq 1$ và β là nghiệm của đa thức $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ bậc $m \geq 1$. Kí hiệu E là tập con của tập $\mathbb{C}$ gồm các phần tử là các đa thức $\sum q_{ij} \alpha^i \beta^j$ với hệ số hữu tỉ q_{ij}. Ta có thể thấy ngay E là không gian con của $\mathbb{C}$ (trên $\mathbb{Q}$).

Bằng qui nạp, ta có thể kiểm tra rằng mọi phần tử α^p với $p \geq n$ đều là tổ hợp tuyến tính (trên $\mathbb{Q}$) của $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$. Thật vậy, nếu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, với $a_n \neq 0$ thì $\alpha^n = -(a_{n-1}/a_n).\alpha^{n-1} - \cdots - (a_0/a_n).1$. Nếu $\alpha^p = p_{n-1}.\alpha^{n-1} + \cdots + p_0.1$, thì $\alpha^{p+1} = \alpha[p_{n-1}.\alpha^{n-1} + \cdots + p_0.1] = -p_{n-1}[(a_{n-1}/a_n).\alpha^{n-1} + \cdots + (a_0/a_n).1] + [p_{n-2}.\alpha^{n-1} + \cdots + p_0.\alpha]$ lại có dạng $p'_{n-1}.\alpha^{n-1} + \cdots + p'_0.1$. Tương tự, mọi phần tử β^p với $p \geq m$ đều là tổ hợp tuyến tính của $1, \beta, ..., \beta^{m-1}$. Do đó mọi phần tử của E là tổ hợp tuyến tính của mn phần tử $\alpha^i \beta^j$; $i = 0, ..., n-1$, $j = 0, ..., m-1$. Nói cách khác $\dim E \leq nm$.

Các phần tử $(\alpha + \beta)^0 = 1, ..., (\alpha + \beta)^{nm}$ của E phải phụ thuộc tuyến tính, tức là phải tồn tại quan hệ $h_{nm}(\alpha+\beta)^{nm} + \cdots + h_0.1 = 0$ với hệ số hữu tỉ. Từ đó ta có $\alpha + \beta$ là nghiệm của đa thức $h(x) = h_{nm}x^{nm} + \cdots + h_0.1$, hay $\alpha + \beta$ là số đại số. Tương tự $r\alpha$ cũng là số đại số với mọi r hữu tỉ. Như vậy tập các số đại số đóng với cả hai phép toán cộng và nhân (vô hướng).

1.14 Cho v là một véc tơ bất kì khác 0 của V. Khi đó tập các phần tử αv, $\alpha \in K$, của V đôi một khác nhau. Vì K vô hạn, nên nó cũng vô hạn. Không những thế lực lượng của V không bé hơn lực lượng của K.

1.15 Cho $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ là một song ánh tập hợp. Trên $\mathbb{Q}$ ta có thể xác định một cấu trúc không gian véc tơ cho bởi $x +_\varphi y := \varphi(x) + \varphi(y)$ và $\alpha *_\varphi x := \alpha\varphi(x)$ với mọi $x, y, \alpha \in \mathbb{Q}$. Rõ ràng ứng với mỗi φ khác nhau phép nhân vô hướng là khác nhau. Do đó các cấu trúc không gian véc tơ ứng với các φ khác nhau là khác nhau. Có vô số (không đếm được) song ánh φ, nên cũng có vô số cấu trúc không gian véc tơ trên $\mathbb{Q}$ (trên trường $\mathbb{Q}$). Trên $\mathbb{Q}$ không thể có cấu trúc không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ vì đây là tập có

nhiều hơn một phần tử, nhưng lại có lực lượng bé hơn $\mathbb{R}$ (xem Bài 1.14)

1.16 Phần tử tùy ý bên vế trái có dạng $v_1 + v_2$, trong đó $v_1 \in U \cap V_1$ và $v_2 \in U \cap V_2$. Khi đó $v_1 + v_2 \in U$ và $v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$, nên $v_1 + v_2 \in U \cap (V_1 + V_2)$.

Cho $V = K^2$, $V_1 = \{(a, 0);\ a \in K\}$ và $V_2 = \{(0, a);\ a \in K\}$. Chọn $U = K(c, d);\ c, d \neq 0$. Khi đó $(U \cap V_1) + (U \cap V_2) = 0$, còn $U \cap (V_1 + V_2) = U$.

1.17 Kí hiệu $\mathcal{X}$ là tập tất cả các không gian con của V và có giao với U bằng 0. Tập này khác rỗng vì chứa không gian 0. Trên tập này ta xét thứ tự bộ phận theo quan hệ bao hàm thức. Theo Bài 1.12, mọi dây chuyền khác rỗng của $\mathcal{X}$ bị chặn trên. Do đó, theo Bổ đề Zorn, $\mathcal{X}$ chứa một phần tử cực đại kí hiệu là W. Khi đó $W \cap U = 0$. Nếu $U + W \neq V$ thì tồn tại $v \in V \setminus (U + W)$. Lấy $W' = W + Kv$. Cho $w + \alpha v \in U$, trong đó $w \in W$ và $\alpha \in K$. Khi đó $w + \alpha v = u \in U$, hay $\alpha v = u - w \in U + W$. Nếu $\alpha \neq 0$, thì $v = (1/\alpha)(u - w) \in U + W$, trái với cách chọn v. Vậy $\alpha = 0$. Nhưng khi đó $w = u \in U \cap V = 0$. Vậy ta cũng có $w = 0$. Suy ra $w + \alpha v = 0$ hay $W' \cap U = 0$. Điều đó chứng tỏ $W' \in \mathcal{X}$. Nhưng $v \notin W$ nên W' thực sự chứa W, trái với tính cực đại của W. Vậy ta phải có $V = U + W$.

Cách khác: Nếu dùng khái niệm cơ sở, bài này có thể giải dễ hơn rất nhiều: Lấy S là một cơ sở của U. Khi đó S độc lập tuyến tính trong V. Mở rộng S thành cơ sở T của V và kí hiệu W là không gian con sinh bởi $T \setminus S$. Khi đó W là không gian con phải tìm.

1.18 Kí hiệu $R = K[x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức với phân bậc chuẩn, và $V_i = R_1 \cap I_i$. Khi đó $V_1, ..., V_r$ là các không gian con thực sự của không gian véc tơ R_1. Theo Bài 1.11, tập $R_1 \setminus (\cup V_i) \neq \emptyset$. Một phần tử tùy ý của tập này thỏa tính chất của bài ra.

2.1 a) Véc tơ 0, b) Véctơ này bằng bội của véc tơ kia.

2.2 a) Xét một quan hệ tuyến tính $xA + yB + zC = 0$, ta được phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} x+y+z & x+z \\ 2x & 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó $x = y = z = 0$ và hệ độc lập tuyến tính.

b) Trong trường hợp này, ta được

$$\begin{pmatrix} 2x+3y+z & 4x-y-5z \\ 6x+2y-4z & 2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta được hệ 4 phương trình tuyến tính với 3 ẩn. Hệ có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$. Do đó nó phụ thuộc tuyến tính.

2.3 a) Hệ độc lập tuyến tính.

b) Hệ phụ thuộc tuyến tính vì chứa nhiều số véc tơ hơn số chiều ($\dim \mathbb{Q}^3 = 3$.)

c) Hệ phụ thuộc tuyến tính vì chứa một véc tơ 0.

2.4 a): độc lập tuyến tính, còn b) và c): phụ thuộc tuyến tính.

2.5 a) Xét quan hệ $xe^t + y(t^2 + 1) + z|t| = 0$. Như vậy vế trái phải là hàm đồng nhất bằng 0. Cho $t = 0, 1, -1$, ta sẽ được hệ

$$\begin{cases} x + y & = 0, \\ ex + 2y + z & = 0, \\ (1/e)x + 2y + z & = 0. \end{cases}$$

Từ đó $x = y = z = 0$.

b) Xét quan hệ $x\sin(t) + y\cos(t) + z\sin(2t) + u\cos(2t) = 0$. Cho $t = 0,\ \pi$, ta được $y + u = 0$ và $-y + u = 0$. Từ đó $y = u = 0$. Cho $t = \pi/2$ ta sẽ được $x = 0$. Từ đó cũng có $z = 0$.

2.6 a) suy ra từ b). Để chứng minh b), nhận xét rằng $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \in K^m$ sẽ dẫn đến $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \in K^p$.

2.7 Nếu có từ hai biểu diễn trở lên thì hiệu của hai biểu diễn sẽ cho ta một quan hệ tuyến tính không tầm thường trên $v_1, ..., v_n$, và do đó hệ này là phụ thuộc tuyến tính. Vô lí.

2.8 Điều kiện cần hiển nhiên. Điều kiện đủ: chứng minh qui nạp theo n.

2.9 Giả sử $C[a, b]$ có một hệ sinh hữu hạn $f_1, ..., f_n$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết nó là hệ sinh tối tiểu. Trước hết ta chứng tỏ rằng có thể chọn được n điểm $x_1, ..., x_n$ khác nhau trong $[a, b]$ sao cho n véc tơ $(f_1(x_1), ..., f_1(x_n)), ..., (f_n(x_1), ..., f_n(x_n))$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Chú ý rằng việc hoán vị chỉ số của các hàm $f_1, ..., f_n$ không làm thay đổi tính độc lập tuyến tính của hệ vừa nói, nên nếu cần ta có thể thực hiện đổi chỉ số. Đặt $x_1 = a$. Vì hàm hằng số bằng 1 biểu diễn tuyến tính được qua $f_1, ..., f_n$, nên ta có thể giả thiết $f_1(a) \neq 0$. Như vậy véc tơ $f_1(x_1) \in \mathbb{R}$ độc lập tuyến tính. Giả sử ta đã xây dựng được p điểm $x_1, ..., x_p$ sao cho các véc tơ $u_1 = (f_1(x_1), ..., f_1(x_p)), ..., u_p = (f_p(x_1), ..., f_p(x_p))$ độc lập tuyến tính trong

$\mathbb{R}^p$. $p < n$. Xét $p+1$ véc tơ $v_1(x) = (f_1(x_1), ..., f_1(x_p), f_1(x)), ..., v_p(x) = (f_p(x_1), ..., f_p(x_p), f_1(x)), v_{p+1}(x) = (f_{p+1}(x_1), ..., f_{p+1}(x_p), f_{p+1}(x))$, trong đó $x \in [a,b]$ và không trùng với $x_1, ..., x_p$. Giả sử với mọi x như vậy, ta luôn có quan hệ tuyến tính $\alpha_1(x)v_1(x) + \cdots + \alpha_{p+1}(x)v_{p+1}(x) = 0$. Nếu $\alpha_{p+1}(x) = 0$ tại một điểm x thì suy ra $u_1, ..., u_p$ phụ thuộc tuyến tính (xem Bài 2.6). Vô lí. Do đó ta có thể giả thiết $\alpha_{p+1}(x) \equiv -1$. Nhưng khi đó ta có $\alpha_1(x)u_1 + \cdots + \alpha_p(x)u_p(x) = (f_{p+1}(x_1), ..., f_{p+1}(x_p))$. Do $u_1, ..., u_p$ độc lập tuyến tính, nên theo Bài 2.7, $\alpha_1(x), ..., \alpha_p(x)$ phải là các hàm hằng số. Suy ra $f_{p+1}(x)$ biểu diễn tuyến tính được qua $f_1, ..., f_p$, và hệ sinh $f_1, ..., f_n$ không tối tiểu. Trái với giả thiết ban đầu. Vậy ta luôn chọn được x_{p+1} sao cho hệ $v_1(x_{p+1}), ..., v_{p+1}(x_{p+1})$ độc lập tuyến tính. Như vậy theo qui nạp, ta nhận được n véc tơ $w_1 = (f_1(x_1), ..., f_1(x_n)), ..., w_n = (f_n(x_1), ..., f_n(x_n))$ độc lập tuyến tính.

Cho $f(x) \in C[a,b]$ là một hàm tùy ý không đồng nhất bằng 0 thỏa mãn $f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$ (dễ xây dựng hàm như vậy). Khi đó $f(x) = \beta_1 f_1(x) + \cdots + \beta_n f_n(x)$. Cho $x = x_1, ..., x_n$, từ tính độc lập tuyến tính của hệ $w_1, ..., w_n$ ta suy ra $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. Do đó $f(x) \equiv 0$, vô lí. Vậy $f_1, ..., f_n$ không thể là hệ sinh.

Chú ý: Cách chứng minh này đúng cho nhiều không gian hàm (kể cả hàm đa thức)!

2.10 Có thể dùng lời giải bài trên. Tuy nhiên đối với bài này có thể giải đơn giản như sau: với mọi hệ hữu hạn đa thức $f_1, ..., f_p$, tổ hợp tuyến tính của chúng có bậc tối đa là bậc cực đại của các đa thức này. Do đó chúng không thể là hệ sinh.

2.11 Cho $a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0$. Nếu $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$, thì ta thay $v_1, ..., v_n$ qua $u_1, ..., u_n$, rồi nhóm hệ số theo các véc tơ $u_1, ..., u_n$. Xét hệ số của u_n, ta suy ra $c_n = 0$. Tương tự, cứ xét ngược trở lại, ta có $c_{n-1} = 0, ..., c_1 = 0$.

Nếu $a_{11} \cdots a_{nn} = 0$, thì chọn i bé nhất để $a_{ii} = 0$. Khi đó u_1 biểu diễn tuyến tính được qua v_1, ... Cứ thế ta có u_{i-1} biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, ..., v_{i-1}$. Sử dụng hệ thức thứ i, ta suy ra v_i biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, ..., v_{i-1}$. Do đó hệ $v_1, ..., v_n$ phụ thuộc tuyến tính.

2.12 Cho $a_1 + \cdots + a_n \neq 1$. Nếu $0 = \alpha_1(u - u_1) + \cdots + \alpha_n(u - u_n) = (\alpha a_1 - \alpha_1)u_1 + \cdots + (\alpha a_n - \alpha_n)u_n$, trong đó $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, thì $\alpha a_1 = \alpha_1, ..., \alpha a_n = \alpha_n$. Cộng hai vế lại với nhau ta suy ra $\alpha = 0$. Do đó $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ngược lại, nếu $a_1 + \cdots + a_n = 1$, thì từ trên suy ra $a_1(u - u_1) + \cdots + a_n(u - u_n) = 0$, tức hệ $u - u_1, ..., u - u_n$ phụ thuộc tuyến tính.

2.13 a) Dễ dàng suy ra từ định nghĩa với lưu ý rằng khi xét như tập hợp

thì $V = V'$. Phản ví dụ: cho v là véc tơ khác 0 tùy ý của V. Khi đó v, iv là hai véc tơ độc lập tuyến tính của V', nhưng phụ thuộc tuyến tính trong V. Khi $V = \mathbb{C}$ thì véc tơ 1 là hệ sinh của V, nhưng không là hệ sinh của V' (vì i không biểu diễn tuyến tính qua 1).

b) Suy ra từ $v = (a_1 + ib_1)v_1 + \cdots + (a_n + ib_n)v_n = a_1v_1 + b_1(iv_1) + \cdots + a_nv_n + b_n(iv_n)$.

2.14 Theo Hệ quả 2.2(i), bằng cách bổ sung các véc tơ đơn vị thứ $p+1, ..., n$, ta có thể giả thiết $p = n$. Xét ma trận vuông A cấp n với các cột là các véc tơ đã cho. Ma trận này có các véc tơ dòng độc lập tuyến tính. Thật vậy gọi các véc tơ dòng là $u_1, ..., u_n$. Giả sử $c_1u_1 + \cdots + c_nu_n = 0$. Giả sử c_i có trị tuyệt đối lớn nhất trong số $c_1, ..., c_n$. Khi đó

$$|c_iv_{ii}| = |\sum_{j\neq i} c_jv_{ij}| \leq \max_{j\neq i}|c_j| \sum_{j\neq i}|v_{ij}| < |c_iv_{ii}|.$$

Vô lí. Vậy $|A| \neq 0$ (Định lí 2.5). Sử dụng định lí này đối với các véc tơ cột ta được hệ đã cho độc lập tuyến tính.

2.15 Đối với câu a) (t.ư câu b)) ta chỉ cần chứng tỏ bất kì $2n$ (t.ư n) hàm đầu tiên nào cũng độc lập tuyến tính. Để làm điều đó, chú ý rằng khi lấy đạo hàm của một quan hệ tuyến tính giữa các hàm này, ta lại được một quan hệ tuyến tính mới. Do đó ta có thể tạo ra một số đủ lớn quan hệ tuyến tính mới. Từ đó chọn giá trị đặc biệt của biến số ta sẽ suy ra các hệ số bằng không. Một cách khác là từ những quan hệ tuyến tính đó, sử dụng định thức Vandermonde ta sẽ được ngay các hệ số phải bằng 0.

2.16 Chứng minh bằng qui nạp theo n. Để chuyển từ n về $n-1$ hãy nhận xét $a_1x^{\alpha_1} + \cdots + a_nx^{\alpha_n} = 0$ dẫn đến $a_1\alpha_1x^{\alpha_1-1} + \cdots + a_n\alpha_nx^{\alpha_n-1} = 0$ (lấy đạo hàm).

2.17 a) không là hệ sinh, còn b) và c) là hệ sinh.

2.18 Véc tơ cần tìm phải thỏa mãn hệ thức

$$(a, b, c) = x(2, 1, 0) + y(1, -3, 2) + z(0, 7, -4),$$

với $x, y, x \in \mathbb{R}$. Khử dần biến x, y, z ta suy ra $2a - 4b - 7c = 0$.

2.19 Nếu $S \subseteq U$ và U là không gian con thì với mọi $v_1, ..., v_m \in S$ suy ra $v_1, ..., v_m \in U$. Do đó $\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_mv_m \in U$ với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$, tức là $E(S) \subseteq U$. Như vậy $E(S)$ chứa trong giao. Nhưng bản thân $E(S)$ là không gian con chứa S nên giao này chứa trong $E(S)$.

Do $E(S)$ cũng là không gian con bé nhất chứa $E(S)$, nên $E(E(S)) = E(S)$.

2.20 Câu a) dễ thấy. b) Từ câu a) suy ra $V_1+V_2 = E(S)+E(T) \subseteq E(S \cup T)$. Mỗi phần tử v của $V_1 + V_2$ có dạng $v_1 + v_2$, trong đó v_1, v_2 tương ứng là tổ hợp tuyến tính của S và T. Từ đó suy ra bao hàm thức còn lại.

2.21 Giả sử S là hệ sinh. Chọn trong S một tập độc lập tuyến tính cực đại T. Khi đó T là hệ sinh. Thật vậy, nếu $E(T) \neq V$, thì tồn tại $v \notin E(T)$. Giả sử $s_1, ..., s_n \in S$ và $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ để $v = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n$. Khi đó có ít nhất một $s_i \notin E(T)$, và vì vậy $s_i \notin T$. Nhưng từ $s_i \notin E(T)$ và T độc lập tuyến tính, ta suy ra $T \cup \{s_i\}$ độc lập tuyến tính. Trái với tính cực đại của T. Vậy T là hệ sinh. Vì T độc lập tuyến tính, nên nó là hệ sinh tối tiểu.

2.22 Giả sử $f_1, ...f_n$ là một hệ sinh hữu hạn của V và S là một hệ sinh tùy ý. Khi đó với mọi $i = 1, ..., n$, f_i là tổ hợp tuyến tính của các phần tử $s_{ij} \in S$; $j = 1, ..., m_i$ (có thể trùng nhau). Khi đó tập các phần tử

$$\{s_{ij};\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m_i\} \subseteq S$$

là tập sinh hữu hạn của V.

2.23 Ta kí hiệu hệ đã cho là S. Khi đó

$$2(e_1 + \cdots + e_n) = (e_1 + e_2) + (e_2 + e_3) + \cdots + (e_n + e_1) \in E(S).$$

Do đó $e_1 + \cdots + e_n \in E(S)$. Tương tự

$$2(e_1 + \cdots + e_{n-1}) = (e_1 + e_2) + \cdots + (e_{n-2} + e_{n-1}) + (e_{n-1} + e_1) \in E(S).$$

Do đó $e_1 + \cdots + e_{n-1} \in E(S)$ và $e_n = e_1 + \cdots + e_n - (e_1 + \cdots + e_{n-1}) \in E(S)$. Do vai trò của các e_i như nhau, từ đó ta suy ra $e_i \in E(S)$ với mọi $i = 1, ..., n$. Vì $e_1, ..., e_n$ là hệ sinh, suy ra $E(S) = K^n$, tức là S là hệ sinh.

Nếu $\text{char}(K) = 2$ thì ta thấy $e_i + e_j$ có tổng các thành phần (tọa độ) bằng 0. Do đó mọi tổ hợp tuyến tính của chúng cũng có tính chất này. Tuy nhiên e_i không có tính chất đó, nên không thể thuộc $E(S)$. Vậy S không là hệ sinh.

2.24 Điều kiện cần là hiển nhiên. Để chứng minh điều kiện đủ ta cần sử dụng kiến thức của hệ phương trình tuyến tính: một hệ phương trình tuyến tính với hệ số trên L có nghiệm trên K thì cũng có nghiệm trên L. Điều này dễ dàng suy ra từ Qui tắc Cramer.

2.25 Giải như Bài 2.24.

2.26 Hệ hai véc tơ $(1,2)$, $(2,1)$ của K^2 là độc lập tuyến tính và do đó nó cũng là hệ sinh nếu $\mathrm{char}(K) \neq 3$. Chúng phụ thuộc tuyến tính: $(1,2)+(2,1)=(0,0)$ khi $\mathrm{char}(K)=3$, và do đó cũng không là hệ sinh.

2.27 a) Điều kiện cần: các véc tơ $(v_1,0)$, $v_1 \in V_1$, phải biểu diễn tuyến tính được qua $S_1 \times \{0\}$ và $(0,v_2)$, $v_2 \in V_2$, phải biểu diễn tuyến tính được qua $\{0\} \times S_2$. Điều kiện đủ dễ thấy.

b) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa là hệ đã cho phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi S_1, S_2 phụ thuộc tuyến tính.

3.1 Cho $A=(a_{ij})$. Khi đó $A=\sum a_{ij}O_{ij}$. Ngược lại, nếu $A=\sum b_{ij}O_{ij}$ thì có ngay $b_{ij}=a_{ij}$. Vậy $\{O_{ij};\ i \leq m,\ j \leq n\}$ lập thành cơ sở, và $\dim M(K;m,n)=mn$. Tọa độ của A là $(a_{11},...,a_{1n},...,a_{m1},...,a_{mn})$.

3.2 Vì $\dim \mathbb{R}^3=3$, nên các hệ (i) và (ii) không là cơ sở. Hệ (iii) có đúng 3 phần tử và độc lập tuyến tính nên nó là cơ sở, còn hệ (iv) phụ thuộc tuyến tính nên không là cơ sở.

3.3 Lập ma trận với các dòng là các véc tơ đã cho và thực hiện biến đổi dòng:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 12 & -17 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 7 \\ 0 & 14 & -22 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy $\dim V=2$ với cơ sở là các véc tơ $(1,-2,5,-3)$, $(0,7,-11,7)$. Các véc tơ này cùng với $e_3=(0,0,1,0)$ và $e_4=(0,0,0,1)$ lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

3.4 Lập các véc tơ tọa độ của các đa thức này theo cơ sở $1,t,t^2,t^3$ của tập $R_{\leq 3}$ các đa thức bậc không quá 3, ta được:

$$f_1=(1,-2,4,1),\ f_2=(2,-3,9,-1),\ f_3=(1,0,6,-5),\ f_4=(2,-5,7,5).$$

Bây giờ lập ma trận với các dòng là các véc tơ trên, rồi biến đổi theo dòng, ta sẽ thấy f_1,f_2 lập thành cơ sở của V. Vậy $\dim V=2$. $f_1,f_2,t,1$ sẽ là cơ sở của $R_{\leq 3}$.

3.5 Cơ sở là $(1,0,...,0,-1)$, $(0,1,0,...,0,-1)$, ..., $(0,...,0,1,-1)$ (kiểm tra nó là độc lập tuyến tính và là hệ sinh). Do vậy $\dim V=n-1$.

3.6 Cơ sở là $(1,0,...,0,-1/n)$, $(0,1,0,...,0,-2/n)$, ..., $(0,...,0,n-1,-(n-1)/n)$ (kiểm tra nó là độc lập tuyến tính và là hệ sinh). Do vậy $\dim V=n-1$.

3.7 a) Đó là $\{O_{11}, ..., O_{nn};\ O_{ij} + O_{ji},\ i < j\}$ (xem kí hiệu Bài 3.1). Do đó không gian này có chiều là $n(n+1)/2$.

b) Đó là tập $\{O_{ij} - O_{ji},\ i < j\}$. Do đó không gian này có chiều là $n(n-1)/2$.

3.8 Gọi x, y, z là các tọa độ của v. Từ hệ thức

$$v = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0),$$

so sánh các thành phần, ta sẽ nhận được hệ ba phương trình tuyến tính ba ẩn. Giải hệ này, ta sẽ được nghiệm duy nhất chính là các tọa độ (nếu nghiệm không tồn tại hoặc không duy nhất thì hệ đã cho không là cơ sở!). Hai véc tơ tọa độ tương ứng là: a) $(2, -5, 7)$ và b) $(c, b-c, a-b)$.

3.9 Tương tự Bài 3.8, ta được véc tơ tọa độ là $(-7, 11, -21, 30)$.

3.10 Sử dụng công thức

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

ta được véc tơ tọa độ là $(f(2), f'(2), ..., \frac{f^{(n)}(2)}{n!})$.

3.11 Kí hiệu hệ đã cho là S. Khi $n = 2k$ ta có

$$e_1 + e_{2k} = (e_1 + e_2) - (e_2 + e_3) + (e_3 + e_4) - \cdots + (e_{2k-1} + e_{2k}).$$

Như vậy $E(S)$ trùng với không gian con sinh bởi $n-1$ véc tơ đầu. Đây là không gian con thực sự của K^n (vì có chiều $\leq n-1$), nên hệ ban đầu không là cơ sở. Điều này không phụ thuộc vào đặc số của trường.

Khi $n = 2k+1$ thì

$$2(e_1 + \cdots + e_{2k+1}) = (e_1 + e_2) + \cdots + (e_{2k+1} + e_1) \in E(S).$$

Suy ra $e_1 + \cdots + e_{2k+1} \in E(S)$. Do đó

$$e_1 = e_1 + \cdots + e_{2k+1} - [(e_2 + e_3) + (e_4 + e_5) + \cdots + (e_{2k} + e_{2k+1})] \in E(S).$$

Từ đó và $e_1 + e_2 \in S$ suy ra $e_2 \in E(S)$, ... Cuối cùng ta thấy $e_1, ..., e_n \in E(S)$. Do đó $E(S) = K^n$. Vì S có đúng n véc tơ nên nó là cơ sở.

Khi $\mathrm{char}(K) = 2$ thì S không là hệ sinh (xem Bài 2.23), nên nó không là cơ sở.

3.12 Chứng minh bằng phản chứng. Nếu $\dim V = m$ thì mọi hệ độc lập tuyến tính có tối đa m phần tử.

3.13 Chọn trong V một hệ độc lập tuyến tính vô hạn $e_1, e_2, \ldots$ Đặt $V_n = Ke_1 + \cdots + Ke_n$ và $W_n = Ke_n + Ke_{n-1} + \cdots$. Khi đó $V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ và $W_1 \supset W_2 \supset \cdots$.

3.14 Cho $V_0 \subset \cdots \subset V_k$ là dãy các không gian con thực sự lồng nhau của V. Khi đó $0 \leq \dim V_0 < \dim V_2 < \cdots < \dim V_k$. Vậy $\dim V_k \geq k$. Do $\dim V_k \leq \dim V = n$, nên độ dài của dãy là $k \leq n$. Giả sử $\dim V_0 = n_0$. Chọn một cơ sở tuỳ ý $e_1, \ldots, e_{n_0}$ của nó (khi $n_0 = q$ ta lấy tập rỗng). Khi đó tập này độc lập tuyến tính trong V_1. Do đó ta có thể mở rộng nó thành cơ sở $e_1, \ldots, e_{n_1}$ của V_1. Tập này độc lập tuyến tính trong V_2. Do đó ta có thể mở rộng nó thành cơ sở $e_1, \ldots, e_{n_2}$ của V_2. Cứ tiếp tục như vậy cho tới khi ta được cơ sở $e_1, \ldots, e_{n_k}$ của V_k. Nếu $n_k = n$ thì dừng. Nếu $n_k < n$ thì mở rộng nó thành cơ sở $e_1, \ldots, e_n$ của V. Bây giờ chỉ việc đặt $W_0 = 0$ và $W_i = Ke_1 + \cdots + Ke_i$, ta sẽ được dãy $W_0 \subset \cdots \subset W_n = V$ có độ dài đúng bằng n và chứa dãy ban đầu.

3.15 a) Dễ dàng kiểm tra từ định nghĩa.

b) Giả sử $x_1, .., x_n \in L$ là cơ sở của L trên K, và $y_1, \ldots, y_m \in Q$ là cơ sở của Q trên L. Ta sẽ chứng tỏ rằng $x_i y_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ là cơ sở của Q trên K. Chú ý rằng tập này có mn phần tử.

Cho $a \in Q$ là một phần tử tùy ý. Khi đó ta có thể viết $a = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m$, trong đó $b_1, \ldots, b_m \in L$. Với mỗi $j = 1, \ldots, n$, ta có thể viết $b_j = c_{j1} x_1 + \cdots + c_{jn} x_n$, trong đó $c_{ji} \in K$. Do đó $a = \sum_{i,j} c_{ji} x_i y_j$, tức là $x_i y_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ là hệ sinh của Q trên K.

Giả sử có một quan hệ tuyến tính giữa các phần tử này, tức là tồn tại $c_{ji} \in K$ để

$$\sum_{i,j} c_{ji} x_i y_j = 0.$$

Khi đó

$$\sum_j (\sum_i c_{ji} x_i) y_j = 0.$$

Nhận xét rằng $\sum_i c_{ji} x_i \in L$. Do $y_1, \ldots, y_m$ là cơ sở của Q trên L, nên với mỗi j ta phải có $\sum_i c_{ji} x_i = 0$. Vì $c_{ji} \in K$ và $x_1, \ldots, x_n$ là cơ sở, nên khi cố định j, với mọi i ta cũng có $c_{ji} = 0$. Như vậy $x_i y_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ độc lập tuyến tính. Vậy nó lập thành cơ sở.

3.16 Trong lời giải Bài 1.13 ta đã chứng tỏ tổng hai số đại số là một số đại số. Đối với tích cũng chứng minh tương tự.

3.17 Giả sử ngược lại là $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n < \infty$. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ là một số tùy ý. Vì

$1, \alpha, ..., \alpha^n$ có nhiều hơn n phần tử, nên chúng phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbb{Q}$. Từ đó suy ra α phải là nghiệm của một đa thức với hệ số hữu tỉ và bậc nhỏ hơn hoặc bằng n. Do đó đa thức với hệ số hữu tỉ nhận α làm nghiệm và bậc nhỏ nhất phải có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n. Ta chọn $f(x)$ là một đa thức như vậy đối với $\alpha = \sqrt[n+1]{2}$. Thực hiện phép chia đa thức trên $\mathbb{Q}$, ta được $x^{n+1} - 2 = f(x)g(x) + r(x)$. Nếu $r(x) \neq 0$, thì $r(x)$ lại nhận $\sqrt[n+1]{2}$ làm nghiệm, trái với giả thiết bậc của $f(x)$ nhỏ nhất. Do đó $r(x) = 0$ và $x^{n+1} - 2 = f(x)g(x)$, trong đó cả hai đa thức $f(x), g(x)$ đều có hệ số hữu tỉ và khác hằng. Điều này vô lí, vì $x^{n+1} - 2$ bất khả qui trên $\mathbb{Q}$ (có thể chứng minh trực tiếp, hoặc sử dụng tiêu chuẩn Eisenstein).

3.18 Theo định lí về chiều giao, ta có

$$\dim V_1 \cap V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) \geq \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V > 0.$$

Vậy $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

3.19 Vì $V_1 \neq V_2$ và không thể chứa trong nhau nên $\dim V_1 + V_2 \geq 5$. Do đó $\dim(V_1 + V_2)$ chỉ có thể là 5 hoặc 6. Theo Định lí về chiều giao, ta có

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 8 - \dim(V_1 + V_2) = 2 \text{ hoặc } 3.$$

Dễ dàng xây dựng ví dụ chứng tỏ cả hai giá trị đó đều có thể đạt được.

3.20 Nếu $V_1 = V_2$ thì $V_1 + V_2 = V_1 \cap V_2$ và giả thiết đã cho không thỏa mãn. Vậy $V_1 \neq V_2$. Khi đó $V_1 \cap V_2$ là không gian con thực sự của một trong hai không gian đó, chẳng hạn $V_1 \cap V_2 \subset V_1$. Ta có $\dim(V_1 + V_2) \geq \dim V_1 \geq \dim(V_1 \cap V_2) + 1$. Từ giả thiết suy ra $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1$. Vì $V_1 \subseteq V_1 + V_2$, suy ra $V_1 + V_2 = V_1$. Từ đó ta cũng có $V_2 \subseteq V_1$. Cho nên $V_1 \cap V_2 = V_2$.

3.21 Sử dụng Định lí về chiều giao, ta có

$$\begin{aligned}\dim(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) &= \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_3 + V_4) \\ &\quad - \dim((V_1 + V_2) \cap (V_3 + V_4)) \\ &= \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 + \dim V_4 - \dim(V_1 \cap V_2) \\ &\quad - \dim(V_3 \cap V_4) - \dim((V_1 + V_2) \cap (V_3 + V_4)).\end{aligned}$$

3.22 Cho S là một tập con độc lập tuyến tính cực đại tùy ý của $\{v_1, ..., v_k\}$ và W là không gian con sinh bởi nó. Khi đó S là cơ sở của W và $W \subseteq U$. Thế nhưng do tính cực đại của S, mọi véc tơ của $\{v_1, ..., v_k\} \setminus S$ đều biểu diễn tuyến tính được qua S. Do đó $U \subseteq W$ hay $U = W$, tức là S là cơ sở của U.

Giả sử A được lập thành theo cơ sở $e_1, ..., e_n$ của V. Kí hiệu $\bar{v}_i$ là véc tơ cột toạ độ của v_i. Dễ dàng kiểm tra rằng với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_r \in K$ đều có $\alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_r v_{i_r} = 0$ khi và chỉ khi $\alpha_1 \bar{v}_{i_1} + \cdots + \alpha_r \bar{v}_{i_r} = 0$. Do đó tập con S của $\{v_1, ..., v_k\}$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi các véc tơ cột tương ứng của nó độc lập tuyến tính. Theo phần trên ta suy ra chiều của U bằng hạng của A.

3.23 Sử dụng phương pháp nêu trong Ví dụ 3.3 ta tính được $\dim U = \dim V = 2$ và $\dim(U + V) = 3$. Do đó theo định lí về chiều giao, ta có $\dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$.

3.24 Đối với $U + V$ ta có thể sử dụng phương pháp của Ví dụ 3.3 vì có thể xem nó như không gian con sinh bởi cả 6 véc tơ đã cho. Có thể thấy $\dim(U + V) = 3$. Đối với $U \cap V$ vấn đề trở nên phức tạp hơn nhiều. Cách thứ nhất là giải một hệ 5 phương trình 6 ẩn hình thành từ đẳng thức:

$$x_1(1, 3, -2, 2, 3) + x_2(1, 4, -3, 4, 2) + x_3(2, 3, -1, -2, 9)$$
$$= x_4(1, 3, 0, 2, 1) + x_5(1, 5, -6, 6, 3) + x_6(2, 5, 3, 2, 1).$$

Cách thứ 2 là tìm hệ phương trình nhận U làm không gian nghiệm và hệ phương trình nhận V làm không gian nghiệm. Sau đó giải hệ phương trình là hợp của hai hệ đã cho! Muốn tìm hệ phương trình nhận V làm nghiệm, ta có thể cải biên phương pháp trong Ví dụ 3.3 như sau: lập ma trận với các dòng là các véc tơ trong hệ sinh. Thêm một dòng cuối cùng là một véc tơ tổng quát $(x_1, ..., x_5)$. Sau đó thực hiện các phép biến đổi như trong Ví dụ 3.3 để đưa về dạng tam giác trên. Lúc đó sẽ nhận được một dòng chứa các biến $x_1, ..., x_5$. Cho tất cả các phần tử thuộc dòng này bằng 0 sẽ đảm bảo hạng của hệ véc tơ mới này bằng hạng của hệ sinh ban đầu đã cho, tức là $(x_1, ..., x_5)$ là một phần tử tổng quát của V. Các quan hệ đó cho ta một hệ phương trình cần tìm.

Bằng cả hai cách trên, ta có thể tìm ra cơ sở của $U \cap V$ gồm một véc tơ, chẳng hạn $(1, 4, -3, 4, 2)$.

3.25 Ta gọi trường hữu hạn này là F. Vì nó hữu hạn nên đặc số của nó là một số nguyên tố p. Tập các phần tử $0, 1, 2 := 1 + 1, ..., p - 1 := 1 + \cdots + 1$ ($p - 1$ lần) của F lập thành một trường con F_p có đúng p phần tử. Khi đó F là một không gian véc tơ trên F_p. Gọi chiều của không gian này là n và $e_1, ..., e_n$ là một cơ sở của nó. Khi đó có một tương ứng 1-1 giữa các phần tử của F và tập các bộ tọa độ $\{(\alpha_1, ..., \alpha_n);\ \alpha_i \in F_p\}$ của chúng theo $e_1, ..., e_n$. Vì vậy F có đúng p^n phần tử.

3.26 Xét các không gian con V và U sinh bởi các hệ đã cho. Khi đó $V \subseteq U$

và $\dim V = r \leq \dim U \leq s$.

3.27 Xét các không gian con V và U sinh bởi các hệ đã cho. Khi đó $V \subseteq U$ và $\dim V = \text{rank}\{v_1, ..., v_r\} \leq \dim U = \text{rank}\{u_1, ..., u_s\}$.

3.28 Chú ý rằng hạng của một hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_r\}$ bằng số phần tử của một tập con S độc lập tuyến tính cực đại bất kì chứa trong hệ đó. Cố định một S như vậy. Khi đó mọi v_i biểu diễn tuyến tính được qua S. Nếu v biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, ..., v_r$, thì v cũng biểu diễn tuyến tính được qua S. Do đó S cũng là tập độc lập tuyến tính cực đại của hệ $\{v_1, ..., v_r, v\}$. Vì vậy hạng của hệ này chính bằng $\sharp S$ và bằng hạng của $\{v_1, ..., v_r\}$. Ngược lại, nếu hạng của $\{v_1, ..., v_r, v\}$ bằng hạng của $\{v_1, ..., v_r\}$, thì $S \cup \{v\}$ phải phụ thuộc tuyến tính. Nhưng vì S là độc lập tuyến tính, nên v phải biểu diễn tuyến tính được qua S, và do đó biểu diễn tuyến tính được qua $\{v_1, ..., v_r\}$.

3.29 Xét các không gian con V_1 và V_2 sinh bởi các hệ đã cho. Chú ý rằng hệ 1 biểu diễn tuyến tính được qua hệ 2 khi và chỉ khi $V_1 \subseteq V_2$. Hai hệ tương đương khi và chỉ khi $V_1 = V_2$. Hạng của hệ chính bằng chiều của không gian con sinh bởi hệ đó. Bây giờ bài toán được suy ra từ Hệ quả 3.7.

4.1 Giả sử $S_1 = \{x_i\} \cup \{z_k\}$ và $S_2 = \{y_j\} \cup \{z_k\}$, sao cho $\{z_k\}$ là cơ sở của $V_1 \cap V_2$. Vì mỗi véc tơ của $V_1 + V_2$ có dạng $v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$, và v_i biểu diễn được qua S_i, nên dễ thấy $S_1 \cup S_2$ là hệ sinh. Ta cần chứng minh tập này độc lập tuyến tính. Giả sử

$$\sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j y_j + \sum_k \gamma_k z_k = 0.$$

Từ hệ thức

$$\sum_i \alpha_i x_i = -(\sum_j \beta_j y_j + \sum_k \gamma_k z_k),$$

ta suy ra véc tơ này thuộc $V_1 \cap V_2$ (vì vế trái thuộc V_1, còn vế phải thuộc V_2). Do đó $\sum_i \alpha_i x_i = \sum_k \delta_k z_k$. Suy ra $\sum_i \alpha_i x_i - \sum_k \delta_k z_k = 0$, và $\alpha_i = 0$. Bây giờ hệ thức trên cho $\sum_j \beta_j y_j + \sum_k \gamma_k z_k = 0$. Vì vậy $\beta_j = \gamma_k = 0$.

4.2 Cố định một cơ sở S_1 của không gian con V_1. Mở rộng S_1 thành cơ sở S của V. Khi đó V_2 sinh bởi $S \setminus S_1$ là không gian con bù của V_1.

4.3 Cho $u \in U$. Khi đó $u = v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$ là biểu diễn duy nhất. Vì $v_1 \in U$, nên $v_2 \in V_2 \cap U$.

4.4 Giả sử có $0 \neq v \in V_1 \cap V_2$. Nếu $v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2$, thì $v_1 + v_2 = (v_1 + v) + (v_2 - v)$.

4.5 Hãy chứng tỏ $V = V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2 = 0$. Khi $\text{char}(K) = p$, khẳng định sai nếu $n \vdots p$, vì $(1, ..., 1) \in V_1 \cap V_2$.

4.6 Theo điều kiện (ii') của Định lí 4.2, $V_i \cap V_j = 0$ khi $i \neq j$. Suy ra $S_i \cap S_j = \emptyset$.

4.7 Xét ví dụ $V = K^2$, $V_1 = \{(x, 0);\ x \in K\}$, $V_2 = \{(0, x);\ x \in K\}$, $U = \{(x, x);\ x \in K\}$. Khi đó $(U \cap V_1) + (U \cap V_2) = 0$.

4.8 Nếu $d \cap H = 0$, thì $d + H$ là tổng trực tiếp, $\dim(d \oplus H) = n$. Do đó $V = d \oplus H$. Trường hợp ngược lại $d \subseteq H$.

Lời giải, chỉ dẫn chương 2

5.2 Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Lần lượt cho B là các ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, từ đẳng thức $AB = BA$ ta sẽ suy ra $b = c = 0$ và $a = d$, tức là $A = aI$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 2. Khi đó với mọi B, ta có $AB = aIB = aBI = B(aI) = BA$ (hoặc kiểm tra trực tiếp).

5.3 Giải tương tự Bài 5.2, bằng cách cho B lần lượt là các ma trận đường chéo $\text{diag}(0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$. Để chứng minh điều kiện đủ, chỉ việc nhận xét

$$\text{diag}(a_1, ..., a_n)\text{diag}(b_1, ..., b_n) = \text{diag}(a_1b_1, ..., a_nb_n).$$

5.4 Dựa vào Bài 5.3, trước hết chứng tỏ nó là ma trận đường chéo. Sau đó lần lượt cho B chạy trên tập ma trận có tất cả các phần tử bằng 0 trừ một phần tử trên dòng (hoặc cột) thứ nhất.

5.5 Chú ý rằng nếu ta viết $A = aI + B$, thì $AX = XA$ tương đương với $BX = XB$. Do đó ta chỉ việc giải phương trình $BX = XB$ để tìm tất cả các ma trận như vậy, trong đó B là ma trận nhận được từ ma trận đã cho bằng cách cho các phần tử đường chéo bằng 0. Kết quả

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

5.6 Tích cũng thay đổi tương tự. Cụ thể

(i) Dòng i và j của tích đổi chỗ cho nhau.

(ii) Cộng vào dòng thứ i của tích AB cũ tích vô hướng của α với dòng thứ j của AB.

(iii) Đổi chỗ cột i và j của tích AB ban đầu cho nhau.

(ii) Cộng vào cột thứ i của tích AB ban đầu tích vô hướng của α với cột thứ j của AB.

5.7 Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Từ $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ta suy ra $a = -d$ và $a^2 + bc = 0$.

5.8 Tương tự như Bài 5.7, $A = \pm I$ hoặc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ sao cho $a^2+bc = 1$.

5.9 Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij}b_{ji}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij}) = \mathrm{tr}(BA). \end{aligned}$$

5.10 Sử dụng định luật phân phối của phép nhân ma trận đối với phép cộng và tính giao hoán của phép cộng để bỏ dấu ngoặc bên trái. Đối với câu b) còn cần sử dụng qui nạp theo n.

5.11 Để AB, BA và $AB - BA$ có nghĩa thì A, B phải là hai ma trận vuông cùng cấp. Khi đó theo Bài 5.9, $AB - BA$ có vết bằng 0, trong khi I có vết là n. Nếu trường có đặc số p thì có thể tồn tại. Chẳng hạn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & . & . & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & . & . & \cdots & . & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.12 Dễ dàng kiểm tra thấy các tập V_1 và V_2 các ma trận đối xứng và các ma trận đối xứng lệch lập thành các không gian con của các không gian véc tơ $V = M(n; K)$. Nếu A là ma trận đối xứng lệch, thì từ $2a_{ii} = 0$ và đặc số của K khác 2, ta luôn có $a_{ii} = 0$ với mọi $i \leq n$. Nếu A vừa đối xứng,

vừa đối xứng lệch, thì $a_{ij} = 0$ với mọi i, j. Do vậy $V_1 \cap V_2 = 0$. Hơn nữa mọi ma trận A có thể viết dưới dạng (lại do $\operatorname{char} K \neq 2$)

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

Dễ kiểm tra $(\frac{A+A^T}{2})^T = \frac{A+A^T}{2}$ và $(\frac{A-A^T}{2})^T = -\frac{A-A^T}{2}$. Chú ý rằng B là ma trận đối xứng (t.ư đối xứng lệch) khi và chỉ khi $B = B^T$ (t.ư $B = -B^T$). Do đó $A \in V_1 + V_2$ hay $V = V_1 + V_2$. Từ đó $V = V_1 \oplus V_2$.

Nếu $\operatorname{char} K = 2$ thì điều khẳng định không đúng vì chẳng hạn ma trận đơn vị $I \in V_1 \cap V_2$. Hơn nữa trên trường loại này hai khái niệm là trùng nhau, và tổng của hai ma trận đối xứng lại là đối xứng, nên không thể có chuyện mọi ma trận là tổng của một ma trận đối xứng và ma trận đối xứng lệch.

5.13 Do $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, nên AA^T là ma trận đối xứng. Tương tự đối với $A^T A$. Nếu ma trận A không vuông thì AA^T và $A^T A$ có cấp khác nhau, nên luôn khác nhau. Đối với ma trận vuông, ta có thể thấy ngay nếu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì hai tích vẫn khác nhau.

Trên $\mathbb{R}$ ta có $\operatorname{Tr}(AA^T) = \operatorname{Tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$. Do đó vết của một trong hai tích bằng 0 khi và chỉ khi A là ma trận 0.

5.14 Chứng tỏ rằng $C = C^T$ (t.ư $C = -C^T$).

5.15 Chứng minh trực tiếp theo định nghĩa. Chẳng hạn ta chứng minh cho trường hợp phức tạp nhất là tích hai ma trận. Cho

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ & \cdots & \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ & \cdots & \\ B_{qr} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix},$$

sao cho A_{ij} có m_i dòng và n_j cột, còn B_{jh} có n_j dòng và l_h cột. Đặt $C = AB$. Chia C thành ma trận khối $C = (C_{ih})$, trong đó C_{ih} có m_i dòng và l_h cột (tức C được chia thành $p \times r$ khối). Ta cần chứng tỏ

$$C_{ih} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij} B_{jh}.$$

Thật vậy, rõ ràng các tích $A_{ij}B_{jh}$ đều có nghĩa và có kích thước $m_i \times l_h$. Đặt $D = C_{ih} = (d_{uv})$. Với mọi $u \leq m_i$ và $v \leq l_h$, ta thấy $d_{uv} = c_{(m+u)(l+v)}$, trong đó

$$m = m_1 + \cdots + m_{i-1}, \quad l = l_1 + \cdots + l_{h-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} d_{uv} &= \sum_{t=1}^{n_1+\cdots+n_q} a_{(m+u)t} b_{t(l+v)} \\ &= \sum_{j=1}^{q} \{ \sum_{t=n_1+\cdots+n_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_j} a_{(m+u)t} b_{t(l+v)} \} \\ &= \sum_{j=1}^{q} \{ \sum_{t=1}^{n_j} a_{(m+u)(N_j+t)} b_{(N_j+t)(l+v)} \}, \end{aligned}$$

trong đó $n_0 := 0$ và $N_j = n_1 + \cdots + n_{j-1}$. Vì $a_{(m+u)(N_j+t)}$ là phần tử ở vị trí (u,t) của ma trận A_{ij} và $b_{(N_j+t)(l+v)}$ là phần tử ở vị trí (t,v) của ma trận B_{jh}, nên

$$\sum_{t=1}^{n_j} a_{(m+u)(N_j+t)} b_{(N_j+t)(l+v)}$$

là phần tử ở vị trí (u,v) của ma trận $A_{ij}B_{jh}$. Từ đó suy ra d_{uv} chính bằng phần tử ở vị trí (u,v) của ma trận $\sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jh}$, tức là $C_{ih} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jh}$.

5.16 Điều kiện cần: xét tích của dòng i với cột thứ j của các khối. Điều kiện đủ có thể kiểm tra trực tiếp từ kích thước các khối.

5.17 Nếu A, B là hai ma trận đối xứng lệch, thì $(AB)^T = BA$. Do đó điều kiện cần và đủ là hiển nhiên. Để xây dựng ví dụ có thể lấy $B = A^T$ trên trường có đặc số 2. Nếu trường có đặc số khác 2 thì việc xây dựng ví dụ phức tạp hơn nhiều. Chẳng hạn có thể chứng tỏ khi $n = 2$ không có ví dụ nào. Tuy nhiên khi $n = 2k$ có thể dùng tích các ma trận khối để xét. Lấy A, B là hai ma trận có dạng $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ -B' & 0 \end{pmatrix}$, trong đó A' là ma trận đối xứng lệch và B' là ma trận đối xứng cấp k. Rõ ràng $AB = \begin{pmatrix} 0 & A'B' \\ -A'B' & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng lệch nếu lấy B là ma trận đơn vị.

5.18 Giả sử $A^r = B^s = 0$. Khi đó $(AB)^r = A^r B^r = 0$. Đối với tổng, sử dụng nhị thức Niu-tơn, ta thấy $(A+B)^{r+s-1}$ là tổng của các ma trận tích dạng $A^i B^j$, trong đó $i + j = r + s - 1$, nên hoặc $i \geq r$ hoặc $j \geq s$. Do đó nó bằng 0.

5.19 Gọi các phần tử nằm trên đường song song với đường chéo chính là một đường chéo con. Có thể chứng tỏ rằng nếu B là ma trận thỏa mãn đề bài và có $r \geq 0$ đường chéo con ngay phía trên đường chéo chính bằng 0, tức là $a_{ij} = 0$ với mọi i, j thoả mãn $i - j \geq -r$, và A là một ma trận thỏa mãn đề bài, thì BA là ma trận thỏa mãn đề bài và có $r + 1$ đường chéo con ngay phía trên đường chéo chính bằng 0. Từ đó sử dụng qui nạp ta có ngay lời giải.

5.20 Điều kiện cần: lũy thừa của ma trận tam giác lại là ma trận tam giác với phần tử trên đường chéo là lũy thừa của các phần tử tương ứng ban đầu. Điều kiện đủ suy ra từ Bài 5.19.

5.21 Gọi 2 ma trận đó là A, B. Chẳng hạn ta xét trường hợp hai ma trận là phản đối xứng: $(AB)^T = (-B^T)(-A^T) = BA$. Vì vậy $AB = (AB)^T$ khi và chỉ khi $AB = BA$.

5.22 Sử dụng định nghĩa của ma trận liên hợp và các phép toán ma trận.

5.23 $(BB^*)^* = (B^*)^*B^* = BB^*$.

6.1 Giả sử $A^r = 0$. Chú ý rằng $AI = IA$. Do đó

$$(I + A)(I^{r-1} - I^{r-1}A + I^{r-2}A^2 + \cdots + (-1)^{r-1}A^{r-1}) = I^r - A^r = I.$$

Vậy $B = I - A + A^2 + \cdots + (-1)^{r-1}A^{r-1}$ là ma trận nghịch đảo của A và A khả nghịch.

6.2 Giả sử A là ma trận tam giác trên, tức là $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$. Cho B là ma trận vuông cấp n sao cho $AB = I$.

- So sánh dòng cuối cùng của hai ma trận này, ta suy ra $a_{nn}b_{nn} = 1$ và $a_{nn}b_{ni} = 0$. Từ đó suy ra $a_{nn} \neq 0$, $b_{ni} = 0$ với mọi $i < n$ và $b_{nn} = 1/a_{nn}$.
- So sánh dòng thứ hai từ dưới lên của AB và I, bây giờ ta suy ra $a_{(n-1)(n-1)} \neq 0$, $b_{(n-1)i} = 0$ với mọi $i < n-1$ và $b_{(n-1)(n-1)} = 1/a_{(n-1)(n-1)}$, $b_{(n-1)n} = -a_{(n-1)n}b_{nn}/a_{(n-1)(n-1)}$.
- Cứ tiếp tục như vậy từ dưới lên, ta sẽ được điều phải chứng minh và cách tìm ra ma trận nghịch đảo.

Đối với ma trận tam giác dưới lời giải tương tự, hoặc là dùng phép chuyển vị, ta có thể đưa về trường hợp ma trận tam giác trên.

6.3 Lập phương trình rồi giải theo cách 1.

a) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

6.4 Ta có $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I$.

6.5 Giải theo phương pháp Bài 6.2 hoặc ngắn gọn hơn là sử dụng Bài 6.1 ta thấy ma trận đã cho có dạng ma trận B trong bài đó (với lưu ý lũy thừa của ma trận có các phần tử trên một đường chéo con bằng nhau, còn tất cả

các phần tử còn lại bằng 0 cũng có tính chất tương tự). Câu a) là trường hợp đặc biệt của câu b). Ma trận của câu b) là

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6.6 Sử dụng Bài 6.1 với lưu ý nếu A có các phần tử thuộc đường chéo con thứ r bằng a, còn các phần tử còn lại bằng 0, thì A^i sẽ có các phần tử thuộc đường chéo con thứ $r+i-1$ bằng a^i, còn các phần tử còn lại bằng 0.

6.7 Sử dụng phương pháp Bài 6.2. Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6.8 a,b) Rõ ràng phép đổi chỗ dòng i và j của ma trận A cho nhau tương đương với nhân bên trái với ma trận $I_{ij} := (c_{uv})$ xác định như sau: $c_{uu} = 1$ nếu $u \neq i, j$ và $c_{ij} = c_{ji} = 1$. Các phần tử còn lại bằng 0. Rõ ràng thực hiện hai lần cùng phép biến đổi này ta được ánh xạ đồng nhất. Điều đó cũng thể hiện ở chỗ $I_{ij}^2 = I$.

Nhân dòng thứ i với một hằng số $\alpha \neq 0$ tương đương với nhân bên trái với ma trận $F_i(\alpha) = \text{diag}(1, ..., 1, \alpha, 1, ..., 1)$, trong đó α ở vị trí thứ i (nói cách khác $F_i = I + (\alpha - 1)O_{ii}$, trong đó O_{ij} là ma trận chỉ có phần tử tại (i, j) bằng 1, còn các vị trí khác là 0). Phép biến đổi ngược của nó là nhân dòng thứ i với $1/\alpha$. Điều đó tương ứng với $F_i(1/\alpha)$ là ma trận nghịch đảo của $F_i(\alpha)$.

Cộng vào dòng thứ i của A tích vô hướng của α với dòng thứ $j \neq i$ của A tương đương với nhân bên trái với ma trận $I + \alpha O_{ij}$, tức là ma trận có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, tại vị trí (i, j) bằng α, còn các vị trí còn lại bằng 0. Phép biến đổi ngược của nó là cộng vào dòng thứ i tích vô hướng của $-\alpha$ với dòng thứ j. Tương ứng $I - \alpha O_{ij}$ là ma trận nghịch đảo của $I + \alpha O_{ij}$.

Đối với cột cũng tương tự như trên, nhưng là nhân bên trái.

c) Theo câu a), việc (A, I) được biến đổi thành (I, B) có nghĩa là tồn tại các ma trận $I_1, ..., I_r$ có dạng như trên sao cho $I_r ... I_1(A, I) = (I, B)$.

Theo qui tắc nhân ma trận khối ta có $I_r...I_1(A,I) = I_r...I_1A, I_r...I_1)$. Suy ra $B = I_r...I_1$ và $I_r...I_1A = I$, hay $BA = I$. Như vậy $B = A^{-1}$.

6.9 Lập ma trận (A,I). Lần lượt trừ đi dòng thứ 1, sau đó cộng dòng 1 với tất cả các dòng còn lại, rồi đổi dấu tất cả các dòng từ thứ 2 trở đi, ta sẽ được ma trận dạng (I,B). Từ đó

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

6.10 Lập ma trận (A,I). Cộng dòng 1 với tất cả các dòng còn lại, ta thấy điều kiện cần để A khả nghịch là $a+n \neq 0$. Chia dòng 1 cho $1+a$ ta đưa về dòng toàn 1. Sau đó lần lượt trừ đi dòng thứ 1, ta thấy điều kiện cần nữa là $a \neq 0$. Bây giờ chia các dòng thứ 2 trở đi cho $1/a$, rồi bớt đi từ dòng 1 tổng tất cả các dòng còn lại, ta sẽ được ma trận nghịch đảo là

$$-\frac{1}{a(n+a)} \begin{pmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & \cdots & 1 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n-a \end{pmatrix}.$$

6.11 Lập ma trận (A,I). Ta trừ từ dòng 1 đi dòng thứ 2, từ dòng thứ 2 đi dòng thứ 3, ... cho đến dòng thứ $n-1$. Sau đó áp dụng phương pháp Bài 6.10 đối với $n-1$ dòng đầu ta đưa về ma trận khối dạng $\begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$, trong đó I_{n-1} là ma trận đơn vị cấp $n-1$. Bây giờ ta dễ dàng đưa ma trận khối này về dạng (I,B). Ma trận nghịch đảo là

$$\frac{1}{ns} \begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix},$$

trong đó $s = n(n+1)/2$.

6.12 Lập ma trận (A, I). Trừ từ $n-1$ dòng đầu tiên đi dòng thứ n, ta nhận được ma trận khối (A_1, B_1), trong đó

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & -a_n \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

Nếu $a_1, ..., a_{n-1}$ đều khác 0 thì dễ dàng biến đổi (A_1, B_1) về dạng (I, B). Khi đó

$$A^{-1} = -\frac{1}{s}\begin{bmatrix} \frac{1-a_1 s}{a_1^2} & \frac{1}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_1 a_3} & \cdots & \frac{1}{a_1 a_n} \\ \frac{1}{a_2 a_1} & \frac{1-a_2 s}{a_2^2} & \frac{1}{a_2 a_3} & \cdots & \frac{1}{a_2 a_n} \\ \frac{1}{a_3 a_1} & \frac{1}{a_3 a_2} & \frac{1-a_3 s}{a_3^2} & \cdots & \frac{1}{a_3 a_n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ \frac{1}{a_n a_1} & \frac{1}{a_n a_2} & \frac{1}{a_n a_3} & \cdots & \frac{1-a_n s}{a_n^2} \end{bmatrix},$$

trong đó $s = 1 + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$.

Nếu $a_i = 0$ với một $i \leq n$ nào đó, từ dòng thứ i ta suy ra $a_n \neq 0$ là điều kiện cần để A khả nghịch. Từ đó (sử dụng định thức) ta suy ra $a_j \neq 0$ với mọi $j \neq i$. Đổi dòng i với dòng cuối, ta cũng dễ dàng đưa về dạng (I, B). Kết quả tương tự như trường hợp trên.

6.13 Bài này tổng quát Bài 6.11 và phương pháp giải cũng tương tự như vậy. Kết quả nhận được là

$$\frac{1}{nsh}\begin{pmatrix} h-s & h+s & h & \cdots & h & h \\ h & h-s & h+s & \cdots & h & h \\ h & h & h-s & \cdots & h & h \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ h+s & h & h & \cdots & h & h-s \end{pmatrix},$$

trong đó $s = na + hn(n-1)/2$.

6.14 Lập hệ phương trình với ma trận hệ số là ma trận đã cho và các biến $x_1, ..., x_n$, còn cột tự do của hệ thứ i là véc tơ cột đơn vị thứ i: $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$ (1 ở vị trí thứ i). Cố định một hệ phương trình thứ i này. Cố định một chỉ số j. Nhân dòng thứ $k+1$ của phương trình với ϵ^{-kj} thì tại dòng này hệ số của x_j sẽ thành 1, còn của x_s là $\epsilon^{k(s-j)}$. Cộng tất cả các phương trình lại thì hệ số của biến x_j bằng n, còn của các biến

khác bằng 0, hệ số tự do chính bằng $\epsilon^{-(i-1)j}$. Từ đó ta nhận được ma trận nghịch đảo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon^{-1} & \epsilon^{-2} & \epsilon^{-3} & \cdots & \epsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \epsilon^{-2} & \epsilon^{-4} & \epsilon^{-6} & \cdots & \epsilon^{-2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \epsilon^{-(n-1)} & \epsilon^{-2(n-1)} & \epsilon^{-3(n-1)} & \cdots & \epsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

6.15 Gọi ma trận nhận được sau khi biến đổi là B. Chú ý rằng cột thứ i của A^{-1}, B^{-1} tương ứng là nghiệm của các phương trình $AX = e_i$ và $BX = e_i$ (e_i như Bài 6.14).

a) Nếu B nhận được từ A bằng cách đổi chỗ dòng i và j cho nhau, thì khi đổi chỗ hai dòng i và j cho nhau của phương trình $BX = e_i$, vế trái sẽ trở thành AX, còn vế phải thành e_j. Như vậy cột thứ i của B^{-1} chính là cột thứ j của A^{-1}. Tương tự cột thứ j của B^{-1} chính là cột thứ i của A^{-1}, còn các cột khác giữ nguyên.

b) Tương tự, khi nhân dòng i với $\alpha \neq 0$ thì ma trận nghịch đảo mới nhận dược từ ma trận nghịch đảo cũ bằng cách nhân cột thứ i với $1/\alpha$.

c) Ma trận nghịch đảo mới nhận được từ ma trận nghịch đảo cũ bằng cách trừ đi từ cột thứ j tích của cột thứ i với α.

d) Khi thực hiện phép biến đổi cơ bản theo cột thì trong ma trận nghịch đảo ta cần thực hiện các phép biến đổi tương tự như trên, nhưng là trên các dòng. Điều này cũng có thể lí giải từ công thức $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

6.16 Dùng định thức ta có $1 = \mid A \mid\mid A^{-1} \mid$. Vì đây là các số nguyên, nên $\mid A \mid = \pm 1$.

6.17 Suy ra ngay từ sự không phụ thuộc của định thức khi mở rộng trường.

6.18 Bằng phép nhân ma trận khối dễ kiểm tra $A^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & -B \\ 0 & I_l \end{pmatrix}$.

6.19 Vì $\mid A \mid = \mid B \mid\mid C \mid$, nên A khả nghịch khi và chỉ khi B, C khả nghịch. Tìm A^{-1} dưới dạng $\begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, ta sẽ thấy $X = -B^{-1}DC^{-1}$.

6.20 Theo Bài 6.8 ta thấy các phép biến đổi tương đương với việc nhân bên trái ma trận vuông cấp $n+p$ dạng $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ hoặc $\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Như vậy ta sẽ tìm được ma trận vuông P_1 cấp n và ma trận P_2 kích thước $p \times n$ sao

cho

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Suy ra $X = P_2B$ và $P_2A = C$. Vì A khả nghịch nên $X = CA^{-1}B$.

6.21 Sử dụng Bài 6.20 đối với $B = C = I$.

6.22 Thực ra đây là bài tập về nhóm. Đẳng thức thứ 1 và thứ 4 tương đương với nhau và được suy ra từ công thức $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$. Tương tự, ta có sự tương đương của hai công thức giữa. Nhân hai vế của công thức 1 bên trái và bên phải với B^{-1} ta nhận được 2. Còn nhân cả bên trái và phải của công thức 2 với B ta nhận được 1.

7.1 Các phép biến đổi sơ cấp đều có phép biến đổi ngược (xem Bài 6.8), nên không làm thay đổi số véc tơ dòng (t.ư cột) độc lập tuyến tính cực đại.

7.2 Vì rank(A) đồng thời là số dòng cực đại độc lập tuyến tính và số cột cực đại độc lập tuyến tính, mà không gian véc tơ dòng có chiều n, còn không gian véc tơ cột có chiều là m.

7.3 rank$(A) = 2$ (dùng biến đổi sơ cấp dòng), còn rank$(B) = 3$ (có thể dùng biến đổi dòng, hoặc nhận xét định thức con lập từ hai dòng đầu và dòng cuối là khác 0).

7.4 rank$(A) = 3$, rank$(B) = 2$ (dùng biến đổi sơ cấp dòng).

7.5 Dùng biến đổi sơ cấp dòng, đưa A về dạng

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ dòng thứ 1 và 3 ta thấy rank$(A) \geq 2$. Sử dụng thêm dòng 2, ta thấy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = 0$.

7.6 Phản chứng: nếu có ít hơn thì một tập con cực đại các dòng độc lập tuyến tính của A sẽ chứa tối đa $r + s - m - 1$ dòng trong s dòng đã chọn, và $m - s$ dòng còn lại.

7.7 Xét một tập con cực đại các dòng độc lập tuyến tính của ma trận A. Sau khi thêm nó vẫn còn độc lập tuyến tính và mở rộng được tối đa thêm 1

dòng (để vẫn độc lập tuyến tính), còn sau khi bớt nó vẫn là độc lập tuyến tính và mất tối đa 1 phần tử.

7.8 Cách 1: Chú ý rằng mỗi dòng (t.ư cột) của ma trận AB biểu diễn tuyến tính qua các dòng của ma trận B (t.ư. các cột của A).

Cách 2: Theo Ví dụ 7.1.

7.9 Gọi V_A, V_B và V tương ứng là không gian con sinh bởi các véc tơ dòng của các ma trận A, B, $A + B$. Khi đó $V \subseteq V_A + V_B$. Sử dụng công thức chiều của tổng hai không gian con và $\operatorname{rank}(A) = \dim V_A$, ... , ta có ngay bất đẳng thức.

Để tìm ví dụ, ta chỉ cần lấy các ma trận vuông cấp 2: chẳng hạn cho bất đẳng thức đầu lấy $A = -B \neq 0$.

7.10 Bất đẳng thức thứ 2 đã được chứng minh trong Bài 7.8. Đối với bất đẳng thức thứ nhất ta sử dụng phương pháp Ví dụ 7.1. Gọi φ, ψ là các toán tử tuyến tính của $V = K^n$ nhận A, B làm ma trận biểu diễn (theo cơ sở tự nhiên). Khi đó theo công thức chiều của ánh xạ tuyến tính, ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB) &= \dim(\varphi\psi(V)) = \dim(\psi(V)) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi|_V)) \\ &\geq \dim(\psi(V)) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) \\ &= \dim(\psi(V)) - n + \dim(\varphi(V)) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n.\end{aligned}$$

7.11 Theo Bài 7.9, ta không thể viết thành tổng của ít hơn r ma trận như vậy. Để biểu diễn thành tổng, không mất tính tổng quát, giả sử r dòng đầu độc lập tuyến tính, còn véc tơ dòng v_j thứ $j > r$ được biểu diễn dưới dạng

$$v_j = \alpha_{j1}v_1 + \cdots + \alpha_{jr}v_r.$$

Khi đó ma trận đầu được viết thành

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{(r+1)1}v_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{(r+1)2}v_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n2}v_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_r \\ \alpha_{(r+1)r}v_r \\ \vdots \\ \alpha_{nr}v_r \end{pmatrix}.$$

7.12 Bất đẳng thức được suy ra từ Bài 7.10. Để xây dựng ma trận B, bằng phép biến đổi sơ cấp cột, ta có thể đưa A về ma trận $A' = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}$,

trong đó $C \in M(n, r; K)$ ($r = \operatorname{rank} A$). Theo Bài 6.8 điều đó có nghĩa là tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $AP = A'$. Chọn $B' = \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}$, trong đó $D \in M(r, n; K)$, thì $A'B' = 0$. Bây giờ chọn D sao cho $\operatorname{rank}(D) = k - r$ và $B = PB'$. Rõ ràng $AB = 0$. Theo Ví dụ 7.1 ta sẽ được $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(D)$.

7.13 Theo Bài 7.9, $n = \operatorname{rank}(2I) = \operatorname{rank}(I + A + I - A) \leq \operatorname{rank}(I + A) + \operatorname{rank}(A - I)$. Mặt khác, theo Bài 7.10, ta có

$$\operatorname{rank}(I + A) + \operatorname{rank}(A - I) - n \leq \operatorname{rank}(A^2 - I^2) = 0.$$

7.14 Vì đổi dòng hay cột cho nhau không thay đổi hạng cũng như giá trị của định thức (với sai khác tới dấu), ta có thể giả thiết r dòng đầu độc lập tuyến tính và r cột đầu độc lập tuyến tính. Nếu định thức con chính cấp r đầu tiên bằng 0 thì r dòng đó phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại $c_1, ..., c_r$ sao cho

$$c_1(a_{11}, ..., a_{1r}) + \cdots + c_r(a_{r1}, ..., a_{rr}) = (0, ..., 0).$$

Cố định $i > r$. Do r cột đầu độc lập tuyến tính cực đại, nên có $b_1, ..., b_r$ sao cho

$$(a_{1i}, ..., a_{ri}) = b_1(a_{11}, ..., a_{r1}) + \cdots + b_r(a_{1r}, ..., a_{rr}).$$

Từ đó

$$c_1a_{1i} + \cdots + c_ra_{ri} = b_1(c_1a_{11} + \cdots + c_ra_{r1}) + \cdots + b_r(c_1a_{1r} + \cdots + c_ra_{rr}) = 0.$$

Cùng với hệ thức ban đầu và cho i chạy trên mọi giá trị $i > r$ suy ra r dòng đầu của A phụ thuộc tuyến tính. Vô lí.

7.15 Giả sử hạng là r và các dòng $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ độc lập tuyến tính. Do tính đối xứng lệch, các cột có cùng chỉ số đó cũng độc lập tuyến tính. Theo Bài 7.14 ma trận con D có các phần tử nằm trên giao của các cột và dòng này có định thức khác 0. Chú ý rằng D cũng đối xứng lệch, nghĩa là $D^T = -D$. Nếu r lẻ thì từ đó suy ra $| D | = | D^T | = - | D |$, hay $| D | = 0$, vô lí. Chú ý rằng nếu đặc số bằng 2 thì sai, vì ma trận đơn vị lúc đó cũng là đối xứng lệch!

7.16 Cho các dòng với chỉ số $n_1 < \cdots < n_r$ là độc lập tuyến tính cực đại. Theo Bài 7.14, định thức con chính nằm trên các dòng và cột có chỉ số $n_1 < \cdots < n_r$ khác 0.

7.17 Giải tương tự Bài 7.16

7.18 Bằng các phép biến đổi sơ cấp chỉ thực hiện trên n dòng đầu, ta có thể đưa ma trận R ban đầu về dạng $R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$, trong đó A_1 là ma trận tam giác trên với các phần tử đường chéo khác 0. Bây giờ thực hiện các phép cộng với dòng thứ $j > n$ tích của một trong n dòng đầu với một số $\alpha \in K$, ta có thể đưa R_1 về dạng $R_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rank}(R) = n$ khi và chỉ khi $D_2 = 0$. Việc thực hiện các phép biến đổi trên tương đương với nhân bên trái A với ma trận vuông $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & I \end{pmatrix}$, trong đó P_1 là ma trận vuông cấp n, còn I là ma trận đơn vị có cấp bằng số dòng của C (xem Bài 6.8, hoặc Bài 6.20). Ta có $P_2A + C = 0$ và $P_2B + D = D_2$. Do đó $D_2 = 0$ khi và chỉ khi $D = CA^{-1}B$.

7.19 Điều kiện cần: Bằng các phép biến đổi sơ cấp cột, ta có thể đưa A về dạng $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}$, trong đó $B \in M(m, r; K)$ có tất cả các cột độc lập tuyến tính. Theo Bài 6.8, điều đó tương đương với nhân bên phải của A với ma trận không suy biến P cấp n. Ta viết $P^{-1} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$, trong đó $C \in M(r, n; K)$ và $D \in M(n - r, n; K)$. Khi đó $A = A'P^{-1} = BC$. Theo bất đẳng thức Sylvester (Bài 7.8), ta có $\operatorname{rank}(C) \geq \operatorname{rank}(BC) = r$, tức $\operatorname{rank}(C) = r$ hay các dòng của nó độc lập tuyến tính.

Điều kiện đủ: Sử dụng phương pháp Ví dụ 7.1: Cho $\varphi : K^r \to K^m$ là ánh xạ tuyến tính nhận B làm ma trận biểu diễn, còn $\psi : V = K^n \to K^r$ là ánh xạ tuyến tính nhận C làm ma trận biểu diễn (theo các cơ sở tự nhiên). Khi đó điều kiện về B, C tương đương với φ là đơn ánh, còn ψ là toàn ánh. Ta có

$$\operatorname{rank}(BC) = \dim(\varphi(\psi(V))) = \dim(\psi(V)) = r.$$

7.20 Định thức con của A không thay đổi khi mở rộng trường, mà hạng bằng cấp cao nhất của định thức con khác không.

8.3 Cho cấp của A là n. Khi đó các ma trận I, A, $A^2, \cdots, A^{n^2}$ phụ thuộc tuyến tính trong không gian các ma trận vuông chiều là n^2. Từ đó ta sẽ có đa thức $f(x)$ khác 0 nhận A làm nghiệm.

8.4 Ta có thể giả thiết $\deg(f) \geq \deg(g)$ và chứng minh qui nạp theo $n = \deg(f)$. $n = 1$ thì $f(A) = a_0I + a_1A$ và $g(B) = b_0I + b_1B$, nên dễ kiểm

tra chúng giao hoán với nhau. Với $n > 0$, viết $f = ax^n + f_1$ và $g = bx^n + g_1$, trong đó bậc của f_1 và g_1 nhỏ hơn n. Khi đó theo giả thiết qui nạp:

$$A^nB^n = A(A^{n-1}B^{n-1})B = (AB^{n-1})(A^{n-1}B) = B^{n-1}(AB)A^{n-1} = B^nA^n,$$

nghĩa là A^n và B^n giao hoán với nhau. Tương tự, A^n giao hoán với $g_1(B)$, $f_1(A)$ giao hoán với B^n và $g_1(B)$. Từ đó $f(A)g(B) = g(B)f(A)$.

8.5 Nếu $A^k = 0$ thì $|A| = 0$, tức là nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $ad - bc = 0$. Do đó theo Định lí Hamilton-Cayley (xem Bài 8.2), $A^2 = (a+d)A$. Suy ra $A^k = (a+d)^{k-1}A$. Nếu $a + d = 0$ thì rõ ràng $A^k = 0$ với mọi $k \geq 2$. Nếu $a + d \neq 0$ thì $A^k = 0$ với $k \geq 2$ nào đó khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

8.6 Gọi $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ nhất nhận A làm nghiệm. Nếu $f(x) = xf_1(x)$ thì từ điều kiện A khả nghịch suy ra $f_1(A) = 0$, trái với cách chọn $f(x)$. Vì vậy $f(x) = a + xf_1(x)$ với $a \neq 0$. Từ đó $A^{-1} = f_1(A)/a$.

8.7 Qui nạp theo bậc của $f(x)$ đưa về trường hợp tìm tích và tổng của hai ma trận đường chéo khối với kích thước các khối tương ứng như nhau.

8.8 Dễ dàng suy ra từ $P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n$ và $P^{-1}(C+D)P = P^{-1}CP + P^{-1}DP$.

8.9 Sử dụng công thức khai triển Taylor

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(s)}(\alpha)}{s!}(x-\alpha)^s,$$

trong đó $s = \deg(f)$, đối với $A = \alpha I + B$. Chú ý rằng B^k là ma trận có đường chéo con thứ $k-1$ (tính từ đường chéo chính) chứa toàn phần tử 1, còn các phần tử khác bằng 0.

8.10 Để tính lũy thừa của một ma trận, hãy cố gắng đưa về ma trận đồng dạng dạng đơn giản (chẳng hạn dạng đường chéo). Trong bài này:

$$A := \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng hai ma trận hai bên ở vế phải là nghịch đảo của nhau. Để tìm dạng biểu diễn này, ta có thể tìm các giá trị riêng của ma trận ban đầu, rồi tìm các véc tơ riêng tương ứng. Nếu các véc tơ riêng lập thành một cơ sở, thì khi đó ma trận chuyển cơ sở sẽ cho ta ma trận bên phải ở vế phải,

còn ma trận đường chéo gồm các giá trị riêng sẽ là ma trận ở giữa của vế phải. Từ đó $A^5 = \begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{pmatrix}$.

8.11 Tương tự phương pháp Bài 8.10. Từ

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

ta sẽ được

$$A^6 = \begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}.$$

8.12 Vì

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

nên

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 3.2^{100} - 2.3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}.$$

8.13 Gọi ma trận đó là A. Theo Định lí Hamilton-Cayley (xem Bài 8.2), ta có $(A - 2I)^2 = 0$. Dùng khai triển Taylor của x^{50} theo $x - 2$, ta được

$$A^{50} = 2^{50}I + 25.2^{50}(A - 2I) = 2^{50} \begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}.$$

8.14 Theo Định lí Hamilton-Cayley (xem Bài 8.2), đa thức đặc trưng của A là

$$g(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$$

nhận A làm nghiệm, tức là $g(A) = 0$. Gọi α, β là nghiệm phức của tam thức bậc hai này: $g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$. Ta tìm đa thức dư $r(x)$ trong phép chia $f(x)$ cho $g(x)$.

Nếu $\alpha = \beta$, thì theo khai triển Taylor, $r(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$.

Nếu $\alpha \neq \beta$ thì từ $r(\alpha) = f(\alpha)$ và $r(\beta) = f(\beta)$ suy ra

$$r(x) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}x + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}.$$

Bây giờ vận dụng $f(A) = r(A)$, ta sẽ có được công thức tính.

8.15 Cho $f(x)$ là một đa thức tùy ý. Theo Bài 8.7, $f(A) = 0$ khi và chỉ khi $f(B) = f(C) = 0$. Mặt khác, $f(A) = 0$ (t.ư $f(B) = 0$ hay $f(C) = 0$) khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $g_A(x)$ (t.ư $g_B(x)$ hay $g_C(x)$).

8.16 Nếu $g_A(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0$ là đa thức cực tiểu của A, thì $A(A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \cdots + a_1 I) = a_0$. Do đó nếu $a_0 \neq 0$ thì $|A| \neq 0$ và A khả nghịch. Ngược lại, nếu A khả nghịch và $a_0 = 0$ thì $A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \cdots + a_1 I = 0$ và $g_A(x)$ không thể là đa thức cực tiểu.

8.17 Sử dụng qui nạp theo bậc của đa thức.

8.18 Sử dụng qui nạp theo bậc của đa thức với lưu ý rằng tích và tổng của hai ma trận tam giác trên (t.ư. dưới) lại là ma trận tam giác trên (t.ư. dưới).

Lời giải, chỉ dẫn chương 3

9.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n-2 & n & n-1 \end{pmatrix}$.

9.3 a) 5; b) 13; c) $n(n-1)/2$.
d) $n(n-1)/2$. Đây là hoán vị có số nghịch thế lớn nhất!

9.4 Nhận xét rằng $\operatorname{sign}(\pi)\operatorname{sign}(\pi^{-1}) = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1$.

9.5 Ta có thể xem việc đưa cách sắp xếp thứ nhất về cách sắp xếp thứ 2 như một hoán vị:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Mỗi lần đổi chỗ hai phần tử cho nhau là một chuyển vị. Như vậy, ta cần chứng tỏ rằng mỗi hoán vị là tích của tối đa $n-1$ chuyển vị. Qui nạp theo n. Cho $n \geq 3$. Cho $\pi \in S_n$. Ta có $\sigma := \pi \circ (n, \pi^{-1}(n))$ là một hoán vị

với $\sigma(n) = n$. Như vậy có thể xem $\sigma \in S_{n-1}$. Theo giả thiết qui nạp $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_k$, $k \leq n-2$, và π_i là các chuyển vị. Do đó $\pi = \pi_1 \cdots \pi_k(n, \pi^{-1}(n))$.

9.6 Xét tập $A = \{a, b, c\}$ và hoán vị $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$. Nếu đánh số theo thứ tự a, b, c thì ta được một chuyển vị có số nghịch thế là 1. Nếu đánh số theo thứ tự b, a, c (a ứng với 2) thì ta được chuyển vị có số nghịch thế là 3.

Giả sử $A = (a_1, ..., a_n)$ và

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Hoán vị tương ứng của $\{1, ..., n\}$ là

$$j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

Việc thay cách đánh dấu của A nghĩa là viết $A = (a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$, trong đó $\sigma \in S_n$. Khi đó

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & \cdots & a_{\sigma(n)} \\ \pi(a_{\sigma(1)}) & \cdots & \pi(a_{\sigma(n)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & \cdots & a_{\sigma(n)}) \\ a_{j(\sigma(1))} & \cdots & a_{j(\sigma(n))} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & \cdots & a_{\sigma(n)}) \\ a_{\sigma(\sigma^{-1}j\sigma(1))} & \cdots & a_{\sigma(\sigma^{-1}j\sigma(n))} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Do đó hoán vị tương ứng là

$$j' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}j\sigma(1) & \sigma^{-1}j\sigma(2) & \cdots & \sigma^{-1}j\sigma(n) \end{pmatrix} = \sigma^{-1}j\sigma.$$

Ta có

$$\operatorname{sign}(j') = \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \operatorname{sign}(j) \operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) \operatorname{sign}(j) = \operatorname{sign}(j).$$

9.7 Xét hoán vị

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Trong hoán vị này có $n-1$ chỉ số i có tính chất $\sigma(i) > i$. Giả sử $\sigma = \pi_k \cdots \pi_1$ là tích các chuyển vị. Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp theo l là trong hoán vị $\sigma_l = \pi_l \cdots \pi_1$ có tối đa l chỉ số q có tính chất $\sigma_l(q) > q$. Điều này dễ thấy khi $l = 1$. Giả sử đã đúng với l. Khi đó σ_{l+1} nhận được từ σ_l bằng cách đổi

chỗ hai vị trí nào đó, chẳng hạn $\sigma_l(i)$ và $\sigma_l(j)$ $(i < j)$ cho nhau. Như vậy tại các vị trí khác i, j tính chất đang xét tại σ_l và σ_{l+1} như nhau. Nếu hoặc $\sigma_l(i) > i$ hoặc $\sigma_l(j) > j$ hoặc cả hai bất đẳng thức xảy ra, thì số chỉ số q có tính chất $\sigma_{l+1}(q) > q$ tăng hơn so với số chỉ số đó của σ_l tối đa là 1. Giả sử $\sigma_l(i) < i$ và $\sigma_l(j) < j$. Khi đó đương nhiên $\sigma_{l+1}(j) = \sigma_l(i) < i < j$, và vì vậy cũng có số chỉ số q có tính chất $\sigma_{l+1}(q) > q$ tăng hơn so với số chỉ số đó của σ_l tối đa là 1. Như vậy trong mọi trường hợp số chỉ số q không vượt quá $l + 1$. Bây giờ vì số chỉ số như vậy ở σ là $n - 1$ nên để $\sigma = \sigma_l$, ta phải có $l \geq n - 1$.

9.8 Qui nạp theo n. Giả sử $n = \pi(i)$. Khi đó ta thực hiện các phép đổi chỗ như sau:

$$(\pi(1), ..., n = \pi(i), \pi(i+1), ..., \pi(n)) \to (\pi(1), ..., \pi(i+1), n = \pi(i),$$
$$\pi(i+2)..., \pi(n)) \to (\pi(1), ..., \pi(i+2), n = \pi(i), \pi(i+3)..., \pi(n))$$
$$\to \cdots \to (\pi(1), ..., \pi(n-1), n).$$

Mỗi phép đổi chỗ ứng với một phép chuyển vị dạng đã cho. Sau khi thực hiện tối đa $n - 1$ phép chuyển vị này ta được một hoán vị giữ nguyên n. Bây giờ ta có thể sử dụng giả thiết qui nạp.

9.9 Ta gọi cặp $\{i, j\}$ là thuận thế của π, nếu $i - j$ cùng dấu với $\pi(i) - \pi(j)$. Vì $\sigma(n - i) - \sigma(n - j) = \pi(i) - \pi(j)$, cặp $\{i, j\}$ là thuận thế của π khi và chỉ khi $\{n - i, n - j\}$ là nghịch thế của σ. Vì có $C_n^2 - k$ thuận thế của π, nên số nghịch thế của σ là $C_n^2 - k$.

9.10 Sử dụng Bài 9.9 và ghép đôi các hoán vị như vậy với nhau ta thấy hai lần tổng số các nghịch thế bằng $n!C_n^2$.

9.11 Qui nạp theo k và n. Nếu $k = 0$ hoặc $n = 1$ thì không có gì để chứng minh. Giả sử $k > 0$ và π là một hoán vị có k nghịch thế. Nếu $\pi(1) = 1$ thì hạn chế của π trên $\{2, ..., n\}$ là một hoán vị có k nghịch thế, và ta có thể sử dụng qui nạp theo n.

Giả sử $\pi(i) = 1$ với $i > 1$. Khi đó $\{1, i\}, ..., \{i - 1, i\}$ là $i - 1$ nghịch thế của π. Xét

$$\pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(i-1) & \pi(i+1) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng số nghịch thế của π' là $k - i + 1$. Theo giả thiết qui nạp

$$\pi' = \omega_1 \cdots \omega_{k-i+1},$$

trong đó ω_j là các chuyển vị dạng $(l, l+1)$. Ta có $\pi' = \pi(i-1, i)\cdots(2,3)(1,2)$. Do đó

$$\pi = \omega_1 \cdots \omega_{k-i+1}(1,2)(2,3)\cdots(i-1,i).$$

Bây giờ giả sử σ là một hoán vị tùy ý với số nghịch thế là l. Giả sử $\sigma(p) = j$ và $\sigma(q) = j+1$. Nếu $p < q$ thì

$$(j, j+1)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & j+1 & \cdots & j & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ta thấy $\{p, q\}$ là một nghịch thế mới xuất hiện ở hoán vị này so với σ, còn các nghịch thế khác của σ vẫn là nghịch thế của $(j, j+1)\sigma$. Như vậy số nghịch thế tăng lên 1.

Nếu $p > q$ thì

$$(j, j+1)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & q & \cdots & p & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & j & \cdots & j+1 & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Số nghịch thế bây giờ còn giảm đi!

Như vậy, theo qui nạp ta có tích của l nghịch thế đang xét có tối đa l nghịch thế. Vậy π với k nghịch thế không thể viết được thành tích của ít hơn k nhân tử.

9.12 Chọn $m \geq 1$ là số sao cho $k = C_m^2 + l$, trong đó $0 \leq l < m$ (qui ước $C_1^2 = 0$). Khi đó hoán vị

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m-l & m-l+1 & m-l+2 & \cdots & m+1 & m+2 & \cdots & n \\ m & \cdots & l+1 & m+1 & l & \cdots & 1 & m+2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

có đúng k nghịch thế.

10.1 a) 1 b) $\sin(\alpha - \beta)$ c) $\cos(\alpha + \beta)$.

10.2 a) -3 b) 100 c) 1.

10.3 a) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$.
b) $\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)$.
c) 0 (dòng đầu và cuối phụ thuộc tuyến tính).

10.4 Cả hai bằng 0 vì một cột bằng (bội của) tổng hai cột còn lại.

10.5 Cộng hai dòng sau vào dòng đầu, ta được một dòng gồm các phần tử là $a+b+c$. Theo Định lí Vi-ét, phần tử này bằng 0, nên định thức bằng 0.

10.6 $(-1)^{n(n-1)/2}a_{n1}a_{(n-1)2}\cdots a_{1n}$ (dùng định nghĩa hoặc khai triển Laplac

10.7 Dùng khai triển Laplace theo cột thứ nhất và cột cuối cùng ta sẽ được

$$D_n = (a_{11}a_{2n,2n} - a_{1,2n}a_{2n,1})D_{n-1}.$$

Từ đó bằng qui nạp ta có ngay

$$D_n = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}a_{2n-i+1,2n-i+1} - a_{i,2n-i+1}a_{2n-i+1,i}).$$

10.8 a) $abcd$, b) $abcd$ (cả hai bài khai triển Laplace theo thứ tự: dòng 4, dòng 2, dòng 1).

c) $xyzuv$ (khai triển Laplace theo thứ tự: dòng 5, dòng 2, dòng 2, dòng 1).

10.9 a) 150, b) $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

10.10 a) $\frac{9}{40}$, b) $\frac{1}{35}$ (qui đồng mẫu số rồi đưa ra ngoài dấu định thức ở cả hai bài để đưa về dạng tam giác cho dễ).

10.11 a) $n!$ (lần lượt cộng dòng thứ 1 vào các dòng 2,3,...).

b) $x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\cdots(x_n-a_{n-1,n})$ (trừ dòng n đi dòng thứ $n-1$, rồi trừ dòng $n-1$ đi dòng thứ $n-2$, ... để đưa về ma trận tam giác).

10.12 $(-1)^{n(n-1)/2}n$ (lần lượt trừ đi dòng thứ nhất rồi khai triển Laplace từ cột cuối cùng).

10.13 $(-1)^{n(n+1)/2}b_1b_2\cdots b_n$ (lần lượt trừ đi cột cuối cùng, rồi khai triển Laplace theo cột đầu).

10.14 Trước hết ta giả thiết tất cả $x_i \neq 0$. Khi đó chuyển dòng đầu tiên xuống cuối cùng, rồi lần lượt thêm vào dòng cuối cùng dòng thứ nhất nhân với a_1/x_1, dòng thứ hai nhân với a_2/x_2, ..., ta đưa về ma trận tam giác. Giá trị định thức sẽ là

$$a_1x_2x_3\cdots x_n + x_1a_2x_3\cdots x_n + \cdots + x_1\cdots x_{n-1}a_n.$$

Đây là đa thức của các biến $x_1,...,x_n$. Do đó nó cũng có giá trị đó khi một số x_i nhận giá trị 0. Một cách khác không sử dụng tính chất đó là khi một số x_i bằng 0 thì ta dùng khai triển Laplace theo các cột chứa các x_i đó để đưa về định thức cùng kiểu nhưng có cấp thấp hơn.

10.15 Bắt đầu từ dưới lên lần lượt trừ đi dòng trước đó, ta sẽ nhận được ma trận mà dưới đường chéo chính là 1, còn từ đường chéo chính trở lên là toàn -1, trừ dòng đầu là $(0, 1, 2, ..., n-1)$. Lần lượt cộng từng cột với cột cuối, ta sẽ được ma trận tam giác có các phần tử trên đường chéo chính là $(n-1, -2, -2, ..., -2, -1)$. Vậy định thức là $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

10.16 a) Đổi chỗ hai cột đầu cho nhau, rồi trừ từ dòng 2 đi tích dòng 1 với $1-x$, trừ dòng 3, 4 đi dòng thứ nhất. Sau đó đưa x ở dòng 2 ra ngoài và tiếp tục tam giác hóa, ta sẽ được giá trị định thức là x^2z^2.

b) Viết $x_i = (x_i - a_i) + a_i$, rồi áp dụng phương pháp Ví dụ 10.7, ta sẽ được kết quả

$(x_1 - a_1)\cdots(x_n - a_n) + a_1(x_2 - a_2)\cdots(x_n - a_n) + (x_1 - a_1)a_2(x_3 - a_3)\cdots(x_n - a_n) + \cdots + (x_1 - a_1)\cdots(x_{n-1} - a_{n-1})a_n.$

10.17 Viết dòng 1 thành $(1, ..., 1) - (1, 0, ..., 0)$, rồi viết định thức đã cho thành tổng của hai định thức. Với định thức dòng đầu là $(1, ..., 1)$ chỉ việc lần lượt trừ từng cột đi cột đầu sẽ được ma trận tam giác dưới. Kết quả:

$$(a_1 - x_1)\cdots(a_n - x_n) - a_1\cdots a_n.$$

10.18

$$D = a_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ . & . & . & \cdots & . \\ b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 & * & \cdots & * \\ b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & \cdots & * \\ b_3 & 0 & 0 & \cdots & * \\ . & . & . & \cdots & . \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}a_1\begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & * & \cdots & * & b_1 \\ 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & \cdots & * & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & * & b_3 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_n(a_2b_1 - a_1b_2)(a_3b_2 - a_2b_3)\cdots(a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n).$$

Trong dòng thứ 2 ở trên, lần lượt từ cột thứ 2 ta trừ đi một bội của cột thứ nhất, sau đó ở dòng thứ 3 thì chuyển cột đầu xuống cuối.

10.19 Khai triển Laplace theo cột cuối, ta được $D_{n+1} = a_n y_1 \cdots y_n + x_n D_n$. Từ đó

$$D_{n+1} = a_0 x_1 x_2 x_3 \cdots x_n + a_1 y_1 x_2 x_3 \cdots x_n + a_2 y_1 y_2 x_3 \cdots x_n + \cdots + a_n y_1 \cdots y_n.$$

10.20 Sử dụng phương pháp truy hồi, khai triển theo dòng thứ nhất ta được a) $D_n = 3D_{n-1} + 4D_{n-2}$. Từ đó $D_n = (4^{n+1} + (-1)^n)/5$.

b) $D_n = 6D_{n-1} - 5D_{n-2}$. Từ đó $D_n = (5^{n+1} - 1)/4$.

10.21 Viết $x_i = y_i + a_i b_i$, trong đó $y_i = x_i - a_i b_i$, rồi sử dụng tính đa tuyến tính như Ví dụ 10.7, ta được

$$D = y_1 y_2 \cdots y_n + a_1 b_1 y_2 \cdots y_n + y_1 a_2 b_2 y_3 \cdots y_n + \cdots + y_1 y_2 \cdots y_{n-1} a_n b_n.$$

10.22 a) Lần lượt cho x nhận các giá trị $a_1, ..., a_n$ thì định thức bằng 0. Đây là đa thức bậc n hệ số đầu bằng a_0, nên

$$D(x) = a_0(x - a_1) \cdots (x - a_n).$$

b) Cộng tất cả các dòng vào dòng đầu ta thấy khi $x = a+b+c$ thì định thức bằng 0. Tương tự cộng dòng 2 vào dòng 1, và dòng 4 vào dòng 3, ta thấy nếu $a - x = b + c$ thì định thức bằng 0. Tương tự với các cặp dòng $1 + 3, 2 + 4$ và $1 + 4, 2 + 3$ ta được

$$D = (x - a - b - c)(x - a + b + c)(x + a - b + c)(x + a + b - c).$$

10.23 Kể từ dòng thứ 3 từ dưới lên, trừ mỗi dòng đi dòng sát cuối. Sau đó khai triển Laplace theo cột đầu và dòng cuối với chú ý rằng trên đường chéo là toàn 1 trừ a_0, ta nhận được kết quả là

$$(-1)^{n(n+1)/2}[a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n].$$

10.24 Kể từ dòng thứ 2, lần lượt trừ đi dòng đứng trước nó, ta sẽ được định thức Vandermonde (xem Ví dụ 10.4) và do đó

$$D = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

10.25 Kể từ cột thứ 2, lần lượt trừ đi một tổ hợp các cột đứng trước nó, ta sẽ được định thức Vandermonde (xem Bài 10.24) và do đó

$$D = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

10.26 Nếu có x_i nào đó bằng 0 thì định thức bằng 0. Còn lại từ cột thứ i rút nhân tử $\frac{x_i}{x_i-1}$ ra, ta sẽ đưa về Bài 10.25. Kết quả là

$$D = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i - 1} \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

10.27 Nếu có đúng một y_i bằng 0, thì đưa về trường hợp định thức cấp $n-1$. Nếu có từ hai y_i trở lên bằng 0 thì định thức bằng 0. Khi tất cả y_i khác 0 thì từ dòng i rút nhân tử chung y_i^n ra, rồi đặt $z_i = x_i/y_i$ ta sẽ đưa về bài toán kiểu Bài 10.25. Kết quả

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i y_j - x_j y_i),$$

trong đó a_i là hệ số của x^i trong đa thức $f_i(x, y)$.

10.28 Viết mỗi cột thành tổng của các cột chứa các đơn thức cùng bậc, rồi khai triển định thức đã cho thành tổng của 2^n định thức theo các cột mới. Khi đó mỗi định thức mới có ít nhất hai cột chỉ sai khác nhau một nhân tử nên nó sẽ bằng 0. Định thức ban đầu là 0.

10.29 Lần lượt cho x nhận các giá trị $a_1, ..., a_n$, ta suy ra

$$D(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

10.30 Mỗi cột tách thành hai cột, trong đó có một cột toàn 1. Sau đó khai triển định thức đã cho thành tổng của 2^n định thức theo các cột mới. Nếu $n > 2$, mỗi định thức mới có ít nhất hai cột chỉ sai khác nhau một nhân tử nên sẽ bằng 0. Định thức ban đầu là 0.

Cách 2: Ma trận đã cho là tích của hai ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

10.31 Theo phương pháp Bài 10.30,

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \cdots & x_1 + y_m \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 & \cdots & x_2 + y_m \\ . & . & \cdots & . \\ x_m + y_1 & x_m + y_2 & \cdots & x_m + y_m \end{vmatrix} = 0,$$

khi $m > 2$. Bây giờ tách mỗi dòng đã cho thành tổng dạng

$$(0, ..., 1, ..., 0) + (x_i + y_1, ..., x_i + y_i, ..., x_i + y_n),$$

(1 ở vị trí thứ i), rồi khai triển định thức thành tổng của 2^n định thức với các dòng mới. Theo khai triển Laplace đối với các dòng chỉ chứa 0 và 1, ta thấy chỉ có một định thức con là khác 0: nó là định thức con chính và nhận giá trị bằng 1. Nếu định thức bù của nó có cấp từ 2 trở lên, thì theo trên nó sẽ bằng 0. Còn lại là các định thức con bù có cấp là 1 và 2, và cũng là các định thức con chính. Do đó

$$D = 1 + \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) + \sum_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)(y_j - y_i).$$

10.32 Khai triển Laplace theo dòng cuối, rồi lại khai triển theo cột đầu hoặc cuối, ta được

$$D(a_1, ..., a_{2n}; b_1, ..., b_{2n}) = (a_1 a_{2n} - b_1 b_{2n}) D(a_2, ..., a_{2n-1}; b_2, ..., b_{2n-1}).$$

Từ đó

$$D(a_1, ..., a_{2n}; b_1, ..., b_{2n}) = \prod_{i=1}^{n}(a_i a_{2n+1-i} - b_i b_{2n+1-i}).$$

10.33 Bắt đầu từ dòng cuối cùng trừ đi các dòng đứng trước nó (để tạo ra nhiều phần tử giống nhau ở trong định thức), sau đó lần lượt trừ đi cột thứ nhất. Bây giờ cộng vào dòng 1 các tích của dòng thứ i với $(n-i+1)/2$, $i \ge 2$. Khai triển theo dòng thứ nhất, ta được

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

10.34 Sử dụng công thức tổ hợp $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ trong các phép biến đổi sau: bắt đầu từ cột cuối cùng trừ đi các cột đứng trước nó, sau đó áp dụng khai triển Laplace đối với dòng đầu, rồi lại tiếp tục như vậy. Kết quả $D = 1$.

10.35 Sử dụng phương pháp Bài 10.34, ta được $D = 1$.

10.36 Khai triển cả hai định thức theo dòng đầu, ta thấy cả hai vế đều thỏa mãn cùng hệ thức dạng $D_n = a_1 D_{n-1} - b_1 c_1 D_{n-2}$. Do đó bằng qui nạp ta có ngay chúng bằng nhau.

11.1 Nếu cấp định thức là n, thì định thức mới bằng $(-1)^{n-1}$ định thức cũ, vì như vậy thực ra ta đã thực hiện $n-1$ phép biến đổi cột (t.ư. dòng): cột 1 và 2 đổi chỗ cho nhau, rồi cột 2 và 3 đổi chỗ cho nhau, ... cho đến cột cuối cùng.

11.2 Gọi cấp ma trận A là n. Khi đó

$$| A |=| A^T |=| -A |= (-1)^n | A |= - | A | .$$

Do đó $| A |= 0$. Khi đặc số bằng 2 thì không còn đúng nữa. Chẳng hạn ma trận đơn vị lúc đó cũng là đối xứng lệch!

11.3 Cả hai cách biến đổi ở a) và b) đều cho kết quả cùng một ma trận. Do vậy chỉ cần giải câu a). Gọi n là cấp. Có tất cả $[n/2]$ cặp như vậy cần đổi chỗ cho nhau. Vậy định thức mới bằng $(-1)^{[n/2]}$ nhân với định thức cũ.

11.4 Chú ý rằng phép biến đổi này tương đương với tích của các phép biến đổi sau: lấy đối xứng qua trục dọc, rồi lấy đối xứng qua đường chéo chính, rồi lại lấy đối xứng qua trục dọc. Phép lấy đối xứng qua đường chéo chính không làm thay đổi định thức. Còn theo Bài 11.3 thì phép lấy đối xứng qua trục dọc chỉ có thể làm thay đổi dấu định thức (tùy tính chẵn lẻ của $[n/2]$). Thực hiện lại một phép đối xứng nữa thì định thức đổi dấu lại. Do đó tổng hợp lại định thức ma trận mới bằng định thức cũ.

11.5 *Cách 1*: Chú ý rằng mỗi phép hoán vị π có thể viết thành tích của một số phép chuyển vị $\sigma_1 \cdots \sigma_m$. Ta có $\operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(\sigma_1) \cdots \operatorname{sign}(\sigma_m) = (-1)^m$. Mỗi lần đổi chỗ hai cột (dòng) cho nhau định thức lại đổi dấu, nên sau m lần thực hiện phép đổi chỗ $\sigma_1, ..., \sigma_m$ thì định thức mới có dấu là $(-1)^m$. Như vậy giá trị định thức mới bằng định thức cũ nhân với $\operatorname{sign}(\pi)$.

Cách 2: Gọi ma trận mới là B. Kí hiệu S là nhóm các phép hoán vị của n phần tử. Khi đó

$$\begin{aligned} | B | &= \textstyle\sum_{\sigma\in S} \operatorname{sign}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(\pi(1))} \cdots a_{n\sigma(\pi(n))} \\ &= \operatorname{sign}(\pi) \textstyle\sum_{\sigma\in S} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi) a_{1\sigma(\pi(1))} \cdots a_{n\sigma(\pi(n))} \\ &= \operatorname{sign}(\pi) \textstyle\sum_{\omega\pi^{-1}\in S} \operatorname{sign}(\omega) a_{1\omega(1)} \cdots a_{n\omega(n)}, \end{aligned}$$

trong đó $\omega = \sigma\pi$. $\omega\pi^{-1}$ chạy khắp tập hợp S cũng tương đương với ω chạy khắp tập S. Do đó từ công thức trên, ta suy ra

$$| B |= \operatorname{sign}(\pi) \sum_{\omega\in S} \operatorname{sign}(\omega) a_{1\omega(1)} \cdots a_{n\omega(n)} = \operatorname{sign}(\pi) | A | .$$

11.6 Xét phần tử tổng quát trong định nghĩa định thức, ta thấy tích không thay đổi do với mọi hoán vị π thì $\pi(1) + \cdots + \pi(n) = 1 + \cdots + n$. Vì vậy định thức giữ nguyên.

11.7 Đổi dấu tất cả các dòng có thứ tự lẻ, sau đó đổi dấu của tất cả các cột có thứ tự lẻ, ta thấy dấu tất cả các phần tử có vị trí chẵn giữ nguyên, còn các phần tử vị trí lẻ đổi dấu. Do đó định thức không thay đổi trong câu b). Đối với câu a): sau khi thực hiện như trên ta đổi dấu tất cả các dòng một lần nữa. Như vậy: định thức không thay đổi nếu cấp định thức là chẵn, và đổi dấu nếu cấp của nó là lẻ.

11.8 Không thay đổi.

Cách 1: Muốn lấy đối xứng qua tâm, ta lấy đối xứng qua đường chéo chính (sẽ nhận được ma trận chuyển vị), rồi lấy đối xứng qua đường chéo phụ. Theo Bài 11.4 cả hai phép biến đổi không làm thay đổi định thức.

Cách 2: Sau khi biến đổi a_{ij} trở thành $a_{n+1-i,n+1-j}$. Do đó số hạng tổng quát của định thức mới là:

$$\operatorname{sign}(\sigma) a_{1,n+1-\pi(n)} a_{2,n+1-\pi(n-1)} \cdots a_{n,n+1-\pi(1)},$$

trong đó σ là hoán vị $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1-\pi(n) & n+1-\pi(n-1) & \cdots & n+1-\pi(1) \end{pmatrix}$

Nếu gọi τ là hoán vị $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1-1 & n+1-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, ta thấy $\sigma = \tau\pi\tau$.

Do đó σ là hoán vị chẵn khi và chỉ khi π là hoán vị chẵn, hay các số hạng trên không thay đổi.

11.9 Trước hết xét phép quay ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó, quay quanh tâm góc 90^o cũng giống như lấy đối xứng qua "trục dọc" giữa ma trận, rồi lấy đối xứng qua đường chéo chính. Theo Bài 11.3, định thức chỉ sai khác một nhân tử là $(-1)^{[n/2]}$. Phép quay cùng chiều kim đồng hồ là phép nghịch đảo, nên định thức cũng chỉ sai khác một nhân tử là $(-1)^{[n/2]}$.

11.10 Ma trận đã cho bằng tích của hai ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

nên $D = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$.

11.11 Ma trận đã cho bằng tích của hai ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \cdots & C_n^n a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \cdots & C_n^n a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \cdots & C_n^n a_n^n \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Đưa thừa số chung của các cột ra ngoài định thức và theo công thức tích, ta được

$$D = C_n^1 \cdots C_n^n \prod_{n \geq i > j \geq 0} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

11.12 Ma trận đã cho bằng tích của hai ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nên $D = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$.

11.13 Nhân ma trận A của định thức đã cho với ma trận

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_n \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \cdots & \epsilon_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

ta được phần tử T_{ij} của ma trận tích bằng

$$\begin{aligned} T_{ij} &= a_{n+2-i} + a_{n+3-i}\epsilon_j + \cdots + a_n \epsilon_j^{i-2} + a_1 \epsilon_j^{i-1} + \cdots + a_{n+1-i}\epsilon_j^{n-1} \\ &= \epsilon_j^{i-1}(a_1 + a_2\epsilon_j + \cdots + a_{n+1-i}\epsilon_j^{n-i} + a_{n+2-i}\epsilon_j^{n+1-i} + \\ &\quad + a_{n+3-i}\epsilon_j^{n+2-i} + \cdots + a_n \epsilon_j^{n-1}) \\ &= \epsilon_j^{i-1} f(\epsilon_j). \end{aligned}$$

Rút các nhân tử chung của các cột của ma trận tích ra, ta được

$$| A || V | = | T | = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \cdots f(\epsilon_n) \, | V | .$$

Do $| V | \neq 0$, nên $| A | = f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)$.

11.14 Tương tự như Bài 11.13, nhưng thay vì căn của 1 ta lấy căn bậc n của -1. Khi đó, ta vẫn có công thức $D = f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)$.

11.15 Tương tự như Bài 11.13, nhưng thay vì căn của 1 ta lấy căn bậc n của z.

11.16 Kí hiệu các ma trận xuất hiện trong tích lần lượt là X và Y. Khi đó $| X^2 | = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Các ma trận Y và XY cũng có cấu tạo tương tự. Do đó từ đẳng thức $| X^2 || Y^2 | = | (XY)^2 |$ suy ra đồng nhất thức Ole sau đây

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ = \; & (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)^2 + \\ & + (x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2)^2 + (x_1y_4 - x_2y_4 + x_3y_2 - x_4y_1)^2. \end{aligned}$$

Từ đó ta có ngay kết luận khi các số hạng đều nguyên.

11.17 Ta kí hiệu $S(a_1, ..., a_m)$ là tập các hoán vị của $\{a_1, ..., a_m\}$. Nếu $\{a_1, ..., a_m\}$ là tập m số tự nhiên đầu thì ta viết $S(a_1, ..., a_m)$ đơn giản là S. Ta có

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\pi \in S} \operatorname{sign}(\pi) d_{1\pi(1)} \cdots d_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S} \operatorname{sign}(\pi) [(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} b_{j_1\pi(1)}) \cdots (\sum_{j_m=1}^{n} a_{mj_m} b_{j_m\pi(m)})] \\ &= \sum_{(j_1,...,j_m) \in \{1,...,n\}^m} [a_{1j_1} \cdots a_{mj_m} \sum_{\pi \in S} \operatorname{sign}(\pi) b_{j_1\pi(1)} \cdots b_{j_m\pi(m)}]. \end{aligned}$$

Gọi P là tập các bộ m số $(j_1, ..., j_m)$ thỏa mãn $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$, còn Q là tập các bộ m số $(j_1, ..., j_m)$ thỏa mãn $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_m \leq n$, trong đó có ít nhất hai số bằng nhau. Khi đó tập hợp $\{1, ..., n\}^m$ được viết thành

$$\cup_{(j_1,...,j_m) \in P} S(j_1, ..., j_m) \cup_{(j_1,...,j_m) \in Q} S(j_1, ..., j_m).$$

Do đó kết hợp cả bên trên, ta có

$$\begin{aligned} D = \sum_{(j_1,...,j_m) \in P \cup Q} [\sum_{\sigma \in S(j_1,...,j_m)} & a_{1\sigma(j_1)} \cdots a_{m\sigma(j_m)} \times \\ & \times [\sum_{\pi \in S} \operatorname{sign}(\pi) b_{\sigma(j_1)\pi(1)} \cdots b_{\sigma(j_m)\pi(m)}]]. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\sum_{\pi\in S} \text{sign}(\pi) b_{\sigma(j_1)\pi(1)} \cdots b_{\sigma(j_m)\pi(m)}$ chính là định thức cấp m của ma trận lập được từ các dòng của ma trận B có chỉ số là $\sigma(j_1), ..., \sigma(j_m)$. Khi $(j_1, ..., j_m) \in Q$ thì ma trận đó có hai dòng giống nhau, nên định thức tương ứng bằng 0. Còn khi $(j_1, ..., j_m) \in P$, thì theo Bài 11.5 định thức đó chính bằng $\text{sign}(\sigma) B_{j_1,...,j_m}$. Do đó

$$\begin{aligned} D &= \sum_{(j_1,...,j_m)\in P} [\sum_{\sigma\in S(j_1,...,j_m)} a_{1\sigma(j_1)} \cdots a_{m\sigma(j_m)} \text{sign}(\sigma) B_{j_1,...,j_m}] \\ &= \sum_{(j_1,...,j_m)\in P} B_{j_1,...,j_m} [\sum_{\sigma\in S(j_1,...,j_m)} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(j_1)} \cdots a_{m\sigma(j_m)}] \\ &= \sum_{(j_1,...,j_m)\in P} B_{j_1,...,j_m} A_{j_1,...,j_m}. \end{aligned}$$

Đó là điều phải chứng minh. Chú ý rằng khi $m > n$ thì tập P bằng $\emptyset$, nên $D = 0$.

11.18 Xét các ma trận

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Khi đó định thức vế trái trong bài là $|\, VV^T \,|$, còn định thức bên vế phải là $|\, WW^T \,|$. Mặt khác khai triển theo cột thứ nhất của V, rồi rút các nhân tử chung của các dòng ra, ta được $|\, V \,| = p\, |\, W \,|$. Do đó $|\, VV^T \,| = p^2\, |\, WW^T \,|$.

11.19 Ta có $f(x)f(-x) = |\, (A + xI)(A - xI) \,| = |\, A^2 - x^2 I \,|$.

11.20 Ta có $1 = |\, I \,| = |\, AA^T \,| = |\, A \,|^2$. Vậy $|\, A \,| = \pm 1$ và A khả nghịch. Từ $AA^T = I$ suy ra $A^T = A^{-1}$. Nhân phải hai vế với A, ta suy ra $A^T A = I$. Vì $(A^T)^T = A$, nên điều đó có nghĩa là A là ma trận trực giao.

11.21 Tọa độ của điểm mới so với điểm cũ qua phép dời hình là

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0.$$

Do đó

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

12.1 Định thức là tổng của 6 số hạng gồm các tích

$$\text{sign}(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}a_{3\pi(3)} = \pm 1.$$

Vì

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33})(a_{12}a_{23}a_{31})(a_{13}a_{21}a_{32})\\ &= -(-a_{11}a_{23}a_{32})(-a_{13}a_{22}a_{31})(-a_{12}a_{21}a_{33}),\end{aligned}$$

nên trong 6 số hạng của tổng phải có ít nhất hai số hạng ngược dấu nhau. Do đó định thức có trị tuyệt đối tối đa là 4. Giá trị đó đạt được vì

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

12.2 Khai triển định thức này theo định nghĩa, ta thấy chỉ có 3 số hạng không âm là $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$. Tuy nhiên chúng không thể bằng 1 cả, vì khi đó định thức bằng 0. Do đó định thức không quá 2. Dễ thấy

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

12.3 Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}$$

theo hai phương pháp: định thức Vandermonde và khai triển theo dòng cuối cùng, rồi so sánh hệ số của z^{n-1}, ta được

$$D = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

12.4 Sử dụng phương pháp Bài 12.3 và tính hệ số của z^s.

$$D = (\sum x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{n-s}}) \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j),$$

trong đó tổng lấy theo tất cả các bộ $n-s$ chỉ số từ n số tự nhiên đầu.

12.5

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+1 & x_2^2+1 & \cdots & x_n^2+1 \\ x_1^3+1 & x_2^3+1 & \cdots & x_n^3+1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^n+1 & x_2^n+1 & \cdots & x_n^n+1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ 0 & x_1^2+1 & x_2^2+1 & \cdots & x_n^2+1 \\ 0 & x_1^3+1 & x_2^3+1 & \cdots & x_n^3+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_1^n+1 & x_2^n+1 & \cdots & x_n^n+1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ 0 & x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1) \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

$$= [2x_1x_2\cdots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)] \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

Ở trên ta đã sử dụng định thức Vandermonde hai lần.

12.6 Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \cdots & z^{s-1} & z^s & z^{s+1} & \cdots & z^n \\ 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_{s-1}(x_1) & x_1^s & \varphi_{s+1}(x_1) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_{s-1}(x_2) & x_2^s & \varphi_{s+1}(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_{s-1}(x_n) & x_n^s & \varphi_{s+1}(x_n) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

bằng hai cách: khai triển theo dòng đầu và theo Bài 10.25, rồi so sánh hệ số của z^s sẽ cho kết quả như Bài 12.4.

12.7 Trước hết ta tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Khai triển theo dòng 1, ta có

$$D_n = 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Phương trình tương ứng $x^2 - 2\cos\alpha x + 1$ theo phương pháp truy hồi có hai nghiệm là $a = e^{i\alpha}$ và $b = e^{-i\alpha}$. Từ đó $D_n = \sin(n+1)\alpha/\sin\alpha$.

Bây giờ khai triển định thức trong đề bài theo dòng 1, ta được

$$D = \cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2} = \frac{\cos\alpha\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha} = \cos n\alpha.$$

12.8 Sử dụng kết quả Bài 12.7.

12.9 Kí hiệu định thức là $D_n(p,m)$. Nhận xét rằng $C_s^r = \frac{s}{r}C_{s-1}^{r-1}$. Sau kh thay vào định thức ban đầu và rút nhân tử chung các dòng và cột ra ngoài định thức, ta đưa về việc tính định thức $D_n(1, m-p)$. Bây giờ lại sử dụng hệ thức $C_s^r - C_{s-1}^r = C_{s-1}^{r-1}$, bắt đầu từ dòng cuối trừ đi dòng trước đó và khai triển Laplace đối với cột đầu, ta được $D_n(1,m-p) = D_{n-1}(1,m-p-1) = \cdots = 1$. Vậy

$$D_n(p,m) = \frac{C_{m+n}^{n+1}C_{m+n-1}^{n+1}\cdots C_{m+n-p+1}^{n+1}}{C_{p+n}^{n+1}C_{p+n-1}^{n+1}\cdots C_{n+1}^{n+1}}.$$

12.10 Sử dụng hệ thức $C_s^r - C_{s-1}^r = C_{s-1}^{r-1}$, bắt đầu từ dòng cuối trừ đi dòng trước đó và khai triển Laplace đối với cột đầu, ta được

$$D(x_0,...,x_n) = D(x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}).$$

Theo qui nạp, ta sẽ có

$$D(x_0,...,x_n) = x_n - C_n^1 x_{n-1} + C_n^2 x_{n-2} - \cdots + (-1)^n C_n^n x_0.$$

12.11 Bắt đầu từ dòng cuối, lần lượt trừ đi dòng trước đó, sau đó bắt đầu từ cột cuối, lần lươt trừ đi côt trước đó, rồi khai triển Laplace theo dòng

đầu và cột đầu, ta được $D = xyD^*$, trong đó D^* là định thức có đường chéo chính toàn chứa $-(x+y)$, đường chéo con ngay trên đường chéo chính toàn chứa x, đường chéo con ngay dưới đường chéo chính toàn chứa y, còn lại là 0. Sử dụng phương pháp truy hồi ta dễ dàng tính được D^*. Từ đó

$$D = (-1)^{n-1}xy[x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + y^{n-2}].$$

Cách 2: Sử dụng Bài 12.12 (xem Bài 12.13).

12.12 Ta viết mỗi cột của $D^*(x)$ thành tổng của hai cột, trong đó có một cột toàn x, rồi viết $D^*(x)$ thành tổng của các định thức của các cột mới. Định thức nào chứa hai cột toàn x trở lên sẽ bằng 0. Chỉ có một định thức mới không chứa x, chính là D. Ngoài ra có n định thức mới có đúng một cột toàn x. Khai triển theo cột đó, ta được

$$D^*(x) = D + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij},$$

trong đó A_{ij} là các phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

12.13 Gọi định thức cần tính là D. Lập ma trận $D^*(z)$ tương tự Bài 12.12, nhưng thay x bởi z. Đặt $B = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$. Khi đó

$$\begin{cases} D - xB = D^*(-x) = (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x), \\ D - yB = D^*(-y) = (a_1 - y)(a_2 - y)\cdots(a_n - y). \end{cases}$$

Giải hệ này đối với D ta được

$$D = \frac{y(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x) - x(a_1 - y)(a_2 - y)\cdots(a_n - y)}{y - x}$$

(công thức cũng đúng cả khi $x = y$, hiểu theo nghĩa sau khi thực hiện giản ước ở vế phải).

12.14 Bắt đầu từ dòng thứ nhất ta thêm vào nó tổng tất cả các dòng đứng sau nó. Sau đó bắt đầu từ cột cuối ta bớt đi cột đứng liền kề trước nó, rồi khai triển Laplace theo dòng đầu, ta được

$$D_n(x) = (x + n - 1)D_{n-1}(x - 1).$$

Từ đó $D_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + n - 2i + 1)$.

12.15

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_n \end{vmatrix} - b_1 D_{n-1}.$$

Đối với định thức đầu bên vế phải, bắt đầu từ dòng thứ 2 thêm vào dòng đứng trước nó, ta sẽ được ma trận tam giác trên với đường chéo chính toàn 1. Do đó $D_n = 1 - b_1 D_{n-1}$ và

$$D_n = 1 - b_1 + b_1 b_2 - \cdots + (-1)^n b_1 b_2 \cdots b_n.$$

12.16 Sử dụng phương pháp Bài 12.13, ta được kết quả

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{y(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x) - x(a_1-y)(a_2-y)\cdots(a_n-y)}{y-x}.$$

12.17 Kể từ dòng thứ hai, ta trừ mỗi dòng đi dòng thứ nhất. Khi đó dòng thứ i, $i \geq 2$, sẽ có thừa số chung là $a_i - a_1$. Sau khi rút thừa số chung này ra, thì cột thứ j, $j \geq 1$, có thừa số chung $(a_1 + b_i)^{-1}$. Rút thừa số chung này ra, ta được

$$D_n = \frac{\prod_{i>1}(a_i - a_1)}{\prod_{i=1}^n (a_1 + b_i)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

Bây giờ thức hiện điều tương tự với các cột, ta sẽ được

$$D_n = \frac{\prod_{i>1}(a_i - a_1)\prod_{i>1}(b_i - b_1)}{\prod_{i=1}^n (a_1+b_i)\prod_{i=1}^n (a_i+b_1)} D_{n-1}.$$

Do đó, theo qui nạp

$$D_n = \frac{\prod_{1\geq i>j\geq 1}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

12.18 Đổi cột đầu tiên xuống cuối cùng, rồi đổi cột thứ 2 xuống cuối cùng, rồi lại đổi cột thứ 3 xuống cuối cùng, ... cho đến khi các $a_{11}, ..., a_{1n}$ đứng liền nhau. Khi đó dấu định thức thay đổi là

$$(-1)^{2n-1+2n-2+\cdots+n} = (-1)^{n(3n-1)/2},$$

(xem Bài 11.1). Đối với dòng ta lần lượt đưa dòng thứ $2, 3, ..., n+1$ xuống cuối. Khi này dấu của định thức thay đổi so với lúc ban đầu là

$$(-1)^{n(3n-1)/2}(-1)^{2n-2+2n-3+\cdots+n-1} = (-1)^{n(3n-2)} = (-1)^n,$$

còn bản thân định thức cuối cùng có dạng ma trận khối $\begin{vmatrix} D & A \\ 0 & D \end{vmatrix}$, trong đó D là định thức Vandermonde trong Ví dụ 10.4. Do đó, theo khai triển Laplace, giá trị định thức ban đầu là

$$(-1)^n \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)^2.$$

12.19 Khai triển theo dòng đầu, ta được hệ thức

$$D_n = (a_0 + a_1)D_{n-1} - a_1^2 D_{n-2}.$$

Sau khi tính với một số giá trị $n = 1, 2, 3, 4$, ta rút ra qui luật và dễ dàng chứng minh theo qui nạp là

$$\begin{aligned} D_n &= a_0 a_1 \cdots a_n (\tfrac{1}{a_0} + \tfrac{1}{a_1} + \cdots + \tfrac{1}{a_n}) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n + a_0 a_2 \cdots a_n + \cdots + a_0 a_1 \cdots a_{n-1}. \end{aligned}$$

12.20 Kí hiệu

$$f(x) = a + ax + \cdots + ax^{p-1} + bx^p + \cdots + bx^{n-1}.$$

Theo Bài 11.13, $D = f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)$, trong đó $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2, ..., \epsilon_n$ là tất cả các căn bậc n của 1. Chú ý là với mọi $i > 1$, thì $1 + \epsilon_i + \cdots + \epsilon_i^{n-1} = 0$. Từ đó

$$f(\epsilon_i) = a(1 + \epsilon_i + \cdots + \epsilon_i^{p-1}) + b(\epsilon_i^p + \cdots + \epsilon_i^{n-1}) = (a-b)\frac{\epsilon_i^p - 1}{\epsilon_i - 1},$$

còn $f(1) = ap + b(n-p)$. Hơn nữa nếu p và n nguyên tố cùng nhau thì hai tập hợp $\epsilon_2, ..., \epsilon_n$ và $\epsilon_2^p, ..., \epsilon_n^p$ trùng nhau, nên

$$D = (ap + b(n-p))(a-b)^{n-1}\frac{\prod_{i=2}^n \epsilon_i^p - 1}{\prod_{i=2}^n \epsilon_i - 1} = (ap + b(n-p))(a-b)^{n-1}.$$

Nếu p và n có ước chung $q \geq 2$, thì $f(\epsilon_{\frac{n}{d}}) = 0$, và do đó $D = 0$.

12.21 *Cách 1*: Ta viết các cột của định thức bên trái thành tổng hai cột, trong đó có một cột toàn s. Viết định thức vế trái thành tổng của các định thức với các cột mới, ta thấy có đúng $n+1$ số hạng có thể khác 0 là: một số hạng là $(-1)^n D$ (D là định thức bên tay phải), còn n số hạng khác có dạng

$$\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & s & \cdots & -a_n \\ -a_n & -a_1 & \cdots & s & \cdots & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & s & \cdots & -a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & a_j & \cdots & -a_n \\ -a_n & -a_1 & \cdots & a_{j-1} & \cdots & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & a_{j+1} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} = (-)^{n-1} D,$$

trong đó s ở cột thứ j (để nhận được đẳng thức trên ta đã cộng tất cả các cột vào cột thứ j). Từ đó vế trái bằng $(-1)^{n-1}(n-1)D$.

Cách 2: Sử dụng Bài 11.13. Kí hiệu $F(x)$ là đa thức tương ứng vế trái và $f(x)$ là đa thức tương ứng vế phải, còn $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2, ..., \epsilon_n$ là tất cả các căn bậc n của 1. Khi đó với mọi $i > 1$ thì $1 + \epsilon_i + \cdots + \epsilon_i^{n-1} = 0$. Từ đó $F(\epsilon_i) = -f(\epsilon_i)$, còn $F(1) = (n-1)s = (n-1)f(1)$. Do đó ta có đẳng thức.

12.22 Sử dụng Bài 11.13 và Bài 11.14. Chú ý rằng tập hợp tất cả các căn bậc $2n$ của 1 chính bằng hợp của tập hợp tất cả các căn bậc n của 1 và tập hợp tất cả các căn bậc n của -1.

12.23 Kí hiệu A là ma trận của D còn A' là ma trận của D'.

Sử dụng khai triển Laplace theo các dòng ta thấy $AA'^T = DI$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp n. Do đó $DD' = D^n$. Nếu $D \neq 0$, thì từ đó ta suy ra $D' = D^{n-1}$.

Bây giờ cho $D = 0$. Nếu $A = 0$ thì $A' = 0$ và đương nhiên $D' = 0$. Nếu $A \neq 0$ thì có ít nhất một dòng, chẳng hạn dòng i khác 0. Khi đó dòng thứ i của ma trận $AA'^T = 0$ cho ta một tổ hợp tuyến tính các cột của A'. Vì vậy $D' = 0$. Nói tóm lại trong trường hợp này ta luôn có $D' = 0 = D^{n-1}$.

12.24 Nếu $\text{rank}(A) = n$ thì $|A| \neq 0$, và theo Bài 12.23, A' có định thức khác 0, nên $\text{rank}(A') = n$.

Nếu $\text{rank}(A) < n-1$ thì mọi định thức con cấp $n-1$ của A bằng 0. Do đó $A' = 0$ và $\text{rank}(A') = 0$. Nếu $\text{rank}\, A = n-1$ thì có ít nhất một định thức con cấp $n-1$ khác 0, nên $\text{rank}(A') > 0$. Mặt khác, lại theo Bài 12.23,

$AA'^T = 0$, nên các cột của A' chính là các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn, n phương trình: $AX = 0$. Do hạng của A bằng $n-1$, nên không gian nghiệm có chiều là 1. Do $\text{rank}(A')$ không vượt quá số chiều của không gian nghiệm này, nên $\text{rank}(A') \leq 1$. Suy ra $\text{rank}\, A' = 1$.

(Để chứng tỏ $\text{rank}(A') = \text{rank}(A'^T) \leq 1$ có thể sử dụng Bài 7.12.)

12.25 Kí hiệu A là ma trận của D, A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}, còn $\hat{A}_{ij}$ là định thức con bù của a_{ij}. Ta có $A_{ij} = (-1)^{i+j}\hat{A}_{ij}$. Trước hết ta chứng minh bổ đề phụ sau đây:

Bổ đề: Nếu ta hoán vị hai dòng p và $p+1$ cho nhau, thì tất cả các phần tử trong ma trận phụ hợp đổi dấu và hai dòng p và $p+1$ đổi chỗ cho nhau.

Thật vậy, ta tạm kí hiệu ma trận mới là B. Nếu $i \neq p, p+1$ thì trong định thức con bù $\hat{B}_{ij}$ có đúng hai dòng đổi chỗ cho nhau (so với trong $\hat{A}_{ij}$) và $i+j$ không thay đổi, nên $B_{ij} = -A_{ij}$. Khi $i = p, p+1$ thì $\hat{B}_{pj} = \hat{A}_{(p+1)j}$ và $\hat{B}_{(p+1)j} = \hat{A}_{pj}$. Do đó

$$B_{pj} = (-1)^{p+j}\hat{B}_{pj} = -(-1)^{p+1+j}\hat{A}_{(p+1)j} = -A_{(p+1)j},$$

và tương tự $B_{(p+1)j} = -A_{pj}$. Bổ đề được chứng minh.

Như vậy, áp dụng bổ đề ta thấy, khi đổi chỗ hai dòng liên tiếp cho nhau thì vị trí tương ứng của M và M' vẫn như nhau, còn giá trị của M' thay đổi một nhân tử là $(-1)^m$. Trong khi đó định thức D đổi dấu, cho nên $D^{m-1}M'$ vẫn giữ nguyên giá trị. Nói tóm lại đẳng thức $M = D^{m-1}M'$ vẫn được giữ nguyên khi đổi chỗ hai dòng liên tiếp cho nhau. Tương tự với cột cũng vậy. Bằng nhiều lần đổi chỗ các dòng liên tiếp cho nhau và các cột liên tiếp cho nhau, ta có thể giả thiết M nằm ở góc trái trên cùng.

Trước hết giả sử $D \neq 0$. Sử dụng khai triển Laplace theo dòng, ta có đẳng thức sau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{m1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{12} & \cdots & A_{m2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1m} & \cdots & A_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{1(m+1)} & \cdots & A_{m(m+1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & \cdots & A_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} DI_m & * \\ 0 & A(m+1,...,n;m+1,...,n) \end{pmatrix},$$

trong đó I_m là ma trận đơn vị cấp m. Từ đó ta có $DM' = D^m\bar{M}$. Vì $D \neq 0$ suy ra $M' = D^{m-1}\bar{M}$.

Bây giờ ta xét trường hợp $D = 0$. Khi $m = 1$ ta có $M' = A_{11} = \bar{M}$. Cho $m > 1$. Theo Bài 12.24, $\text{rank}(A') \leq 1$, tức là hai dòng bất kì của A' là phụ thuộc tuyến tính. Do đó hai dòng tùy ý của M' phụ thuộc tuyến tính, nên $M' = 0$, tức là công thức $M' = D^{m-1}\bar{M}$ vẫn đúng.

12.26 Xét ma trận Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \epsilon^3 & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \epsilon^6 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \epsilon^3 & \epsilon^6 & \epsilon^8 & \cdots & \epsilon^{3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \epsilon^{(n-1)} & \epsilon^{2(n-1)} & \epsilon^{3(n-1)} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

trong đó $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ (i là số phức). Gọi định thức của ma trận này là D. Vì $\epsilon^k = 1$ khi và chỉ khi k chia hết cho n, ta có

$$V^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó $\mid D^2 \mid = n^n$. Đặt $\alpha = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Tính theo công thức định thức

Vandermonde, ta được

$$\begin{aligned} D &= \prod_{0\le k<j\le n-1}(\epsilon^j-\epsilon^k) = \prod_{0\le k<j\le n-1}(\alpha^{2j}-\alpha^{2k}) \\ &= \prod_{0\le k<j\le n-1}\alpha^{k+j}(\alpha^{j-k}-\alpha^{-(j-k)}) \\ &= [\prod_{0\le k<j\le n-1}\alpha^{k+j}][\prod_{0\le k<j\le n-1}2i\sin\frac{(k-j)\pi}{n}]. \end{aligned}$$

Chú ý rằng nhân tử đầu tiên của D có môđun bằng 1, và $\sin\frac{(k-j)\pi}{n} > 0$ với mọi $0 \le k < j \le n-1$. Do đó

$$\prod_{0\le k<j\le n-1}2i\sin\frac{(k-j)\pi}{n} = \mid D \mid = \sqrt{\mid D^2 \mid} = n^{n/2}.$$

12.27 Theo Bài 12.12, $\mid (a_{ij}+1) \mid = \mid (a_{ij}) \mid + B$, trong đó B là tổng các phần bù đại số của các phần tử của A. Trừ tất cả $n-1$ dòng cuối của định thức $\mid (a_{ij}+1) \mid$ đi dòng đầu, rồi tách dòng đầu thành tổng của một dòng toàn 1 và dòng $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, ta được $\mid (a_{ij}+1) \mid = D + \mid A \mid$, trong đó D là định thức thứ hai cho trong bài. Từ đó $D = B$.

12.28 Kí hiệu S_A là tổng các phần bù đại số của các phần tử trong ma trận A, và $B = (a_{ij}+c) = (b_{ij})$. Sử dụng Bài 12.12 hai lần, ta được

$$\mid A \mid = \mid (b_{ij}-c) \mid = \mid B \mid - cS_B = \mid A \mid + cS_A - cS_B.$$

Suy ra $S_A = S_B$.

12.29 Sử dụng Bài 12.12 đối với ma trận $(a_{ij}-1)$.

12.30 Rõ ràng D có ba tính chất vừa nêu. Ngược lại, do tính chất đa tuyến tính và tính chất thay phiên, nếu kí hiệu e_i là véc tơ cột đơn vị thứ i và π là một hoán vị tùy ý của n số tự nhiên đầu, thì $D(e_{\pi(1)}, ..., e_{\pi(n)}) = \text{sign}(\pi)$. Do đó

$$\begin{aligned} D(A) &= D(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, ..., a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n) \\ &= \sum_{i_1,...,i_n} D(a_{i_1 1}e_{i_1}, ..., a_{i_n n}e_{i_n} \\ &= \sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}D(e_{i_1}, ..., e_{i_n}). \end{aligned}$$

Từ tính chất thay phiên, nếu có hai chỉ số $i_k = i_l$ và $k \neq l$, thì $D(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = 0$. Do đó trong tổng trên chỉ còn các chỉ số $i_1, ..., i_n$ sao cho chúng lập thành một hoán vị của $\{1, .., n\}$. Do vậy

$$D(A) = \sum_{i_1,...,i_n} \text{sign}(i_1, ..., i_n) a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} = \mid A \mid .$$

12.31 Kí hiệu I là ma trận vuông cấp n. Có thể kiểm tra trực tiếp là

$$A \times B = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Ib_{11} & Ib_{12} & \cdots & Ib_{1m} \\ Ib_{21} & Ib_{22} & \cdots & Ib_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ Ib_{m1} & Ib_{m2} & \cdots & Ib_{mm} \end{pmatrix}.$$

Đối với ma trận

$$C = \begin{pmatrix} Ib_{11} & Ib_{12} & \cdots & Ib_{1m} \\ Ib_{21} & Ib_{22} & \cdots & Ib_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ Ib_{m1} & Ib_{m2} & \cdots & Ib_{mm} \end{pmatrix},$$

ta thực hiện các phép đổi dòng và cột sao cho đầu tiên là các dòng $1, n+1, 2n+1, ..., (m-1)n+1$ đứng cạnh nhau, các cột $1, n+1, 2n+1, ..., (m-1)n+1$ đứng cạnh nhau, rồi đến các dòng $2, n+2, 2n+2, ..., (m-1)n+2$ đứng cạnh nhau, các cột $2, n+2, 2n+2, ..., (m-1)n+2$ đứng cạnh nhau, ..., cho đến hết. Khi đó ta sẽ nhận được ma trận đường chéo khối $D = \text{diag}(B, B, ..., B)$, mà trên đường chéo là n ma trận B. Chú ý rằng cứ thực hiện một phép biến đổi trên dòng thì ta lại thực hiện một phép biến đổi tương tự trên cột, nên để đưa về ma trận D thì ta phải thực hiện một số chẵn lần phép đổi dòng và cột. Do đó $\mid C \mid = \mid D \mid$. Từ đó

$$\mid A \times B \mid = \mid A \mid^m \mid D \mid = \mid A \mid^m \mid B \mid^n .$$

12.32 Ma trận P_n là ma trận tam giác trên có đường chéo bằng 1, nên định thức của nó bằng 1. Phần tử thứ (i, j) của ma trận $P_n^T P_n$ là $\sum_k p_{ki} p_{kj}$. Chú ý rằng với mỗi số k thì $p_{ki} p_{kj} = 1$ khi và chỉ khi k chia hết cả i lẫn j, còn nếu không thì $p_{ki} p_{kj} = 0$. Như vậy $\sum_k p_{ki} p_{kj} = q_{ij}$. Do đó $Q_n = P_n^T P_n$ và có định thức bằng 1.

12.33 Sử dụng kí hiệu Bài 12.32, ta sẽ chứng tỏ

$$d_{ij} = \sum_k p_{ki} p_{kj} \varphi(k).$$

Thật vậy theo lí luận của Bài 12.32 thì tổng bên phải chính bằng $\sum_k \varphi(k)$, trong đó k chạy trên tập các ước số chung của i và j. Nhưng tập đó chính là tập các ước số của d_{ij}, nên theo Định lí Gauss ta có đẳng thức trên. Bây giờ nếu ta kí hiệu P_φ là ma trận nhận được từ P_n bằng cách nhân mỗi dòng thứ k với $\varphi(k)$, thì từ đẳng thức trên suy ra: $D_n = P_n^T P_\varphi$. Do đó

$$\mid D_n \mid = \mid P_n \mid . \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n) \mid P_n \mid = \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n).$$

12.34 Từ đẳng thức

$$(x+1)^n = x^n + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^{n-2}x^{n-2} + \cdots + C_n^1 x + x^0,$$

lần lượt cho $x = k-1, ..., 1$, rồi cộng lại với nhau ta được đẳng thức

$$k^n = 1 + C_n^{n-1}s_{n-1}(k) + C_n^{n-2}s_{n-2}(k) + \cdots + C_n^1 s_1(k) + s_0(k).$$

Như vậy $(s_{n-1}(k),\ s_{n-2}(k),\ ...,\ s_0(k))$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} C_n^{n-1}s_{n-1}(k) + C_n^{n-2}s_{n-2}(k) + \cdots + s_0(k) = k^n - 1, \\ \qquad\qquad C_{n-1}^{n-2}s_{n-2}(k) + \cdots + s_0(k) = k^{n-1} - 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s_0(k) = k - 1. \end{cases}$$

Định thức chung của hệ phương trình này có dạng tam giác trên và bằng $n!$. Do đó theo công thức Cramer,

$$\begin{aligned} s_{n-1}(k) &= \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} k^n-1 & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \cdots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1}-1 & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \cdots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2}-1 & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \cdots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ k^2-1 & 0 & 0 & \cdots & C_2^1 & 1 \\ k-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \cdots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \cdots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \cdots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ k^2 & 0 & 0 & \cdots & C_2^1 & 1 \\ k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

12.35 Vì $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$, từ đẳng thức

$$(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots)(1 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \cdots) = x,$$

so sánh các bậc của x sau khi khai triển, ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & = h_1, \\ \frac{1}{3} & = \frac{1}{2}h_1 - h_2, \\ \frac{1}{4} & = \frac{1}{3}h_1 - \frac{1}{2}h_2 + h_3, \\ & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & = \frac{1}{n}h_1 - \frac{1}{n-1}h_2 + \frac{1}{n-3}h_3 + \cdots + (-1)^{n-1}h_n. \end{cases}$$

Xem $(h_1, ..., h_n)$ như nghiệm của hệ phương trình trên, theo công thức Cramer, ta được

$$\begin{aligned} h_n &= (-1)^{[n/2]} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & (-1)^{n-2}\frac{1}{2} & \frac{1}{n+1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{[n/2]+n-1+[(n-1)/2]} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

12.36 Đặt $e^{-x} = 1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots$. Từ đồng nhất thức e^xe^{-x}, ta được

$$(1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots)(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots) = 1.$$

So sánh hệ số của x hai bên sau khi khai triển ta được hệ phương trình tuyến tính đối với $a_1, a_2, ..., a_n$. Sau đó sử dụng phương pháp Bài 12.35 để tìm ra công thức của a_n theo định thức nêu trong bài. Cuối cùng hãy chú ý rằng $a_n = \frac{1}{n!}$.

Lời giải, chỉ dẫn chương 4

13.1 Đó là cách phát biểu đại số hai tính chất quen biết của đạo hàm và tích phân.

13.2 Các ánh xạ tuyến tính là a) (có hạch là $\{(x,0,0);\ x \in \mathbb{R}\}$) và c) (có hạch là 0).

13.3 $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

13.4 a) Hạch của nó là không gian con $\{(v,-v);\ v \in V\}$. Câu b) là tổng quát của câu a) (tại sao?)

13.5 $\mathrm{Ker}(f)$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn: $Ax = 0$, còn $\mathrm{Im}\, f$ là không gian con của K^m sinh bởi các véc tơ cột của A. Theo Định lí 13.7, $\dim \mathrm{Ker}(f) = n - \dim \mathrm{Im}(f) = n - \mathrm{rank}\, A$.

13.6 Hai ánh xạ bằng nhau khi và chỉ khi $A = \alpha I$ (Bem Bài 5.4).

13.7 $\mathrm{Ker}(f|_W) = \mathrm{Ker}(f) \cap W$, còn $\mathrm{Im}(f|_W) = f(W)$.

13.8 Viết $V = U \oplus W$. Sử dụng các phép chiếu lên U và lên W.

13.9 a) Kiểm tra trực tiếp theo định nghĩa đối với cả ba ánh xạ. Một cách làm khác đối với ánh xạ χ là xem nó như hợp của ánh xạ $\tau : U \to V \times V$, $\tau(u) = (\psi_\alpha(u), \psi_\beta(u))$ (xem Bài 13.3) và ánh xạ $\varsigma : V \times V \to V$, $\varsigma(u,v) = u + v$ (xem Bài 13.4). Cách làm này phức tạp hơn, nhưng cho ta cách sử dụng Mệnh đề 13.2, và rất có ích khi giải những bài toán phức tạp.

b) Chú ý rằng theo định nghĩa ta có thể viết $(\alpha f + \beta g)(u) = \alpha f(u) + \beta g(u)$, còn $(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$ và $(\beta g)(u) = \beta g(u)$. Hai ánh xạ bằng nhau khi và chỉ khi nó tác động như nhau trên mỗi phần tử của tập nguồn.

13.10 Thử trực tiếp từ định nghĩa.

13.11 $\mathrm{Ker}(D^n)$ là không gian con các đa thức bậc nhỏ hơn n.

13.12 Hạch của nó là nghiệm của phương trình vi phân $y' = y$. Từ đó ta được hạch là tập các hàm số có dạng αe^x.

13.13 Rõ ràng đây là các ánh xạ tuyến tính (xem các bài 13.3 và 13.4). Dễ kiểm tra $\mathrm{Ker}(\delta) = 0$, tức là δ là đơn ánh, $\mathrm{Im}(\rho) = V_1 + V_2$, tức ρ là toàn ánh, và $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \mathrm{Ker}(\rho)$. Ngược lại, nếu $(u,v) \in \mathrm{Ker}(\rho)$ thì $u = v$. Vì $u \in V_1$, $v \in V_2$, nên $u = v \in V_1 \cap V_2$ và $(u,v) \in \mathrm{Im}(\delta)$.

13.14 Chứng minh qui nạp theo n.

13.15 Cho $\mathrm{Ker}(\psi\varphi) = 0$. Nếu $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ thì $(\psi\varphi)(u) = \psi(\varphi(u)) = 0$,

nên $u \in \mathrm{Ker}(\psi\varphi)$. Suy ra $u = 0$. Cho $v \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Vì φ là toàn ánh, ta tìm được $u \in U$ sao cho $v = \varphi(u)$. Khi đó $(\psi\varphi)(u) = \psi(\varphi(u)) = \psi(v) = 0$, nên $u \in \mathrm{Ker}(\psi\varphi)$. Suy ra $u = 0$ và $v = \varphi(u) = 0$.

Ngược lại, nếu $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ và $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$ dễ suy ra $\mathrm{Ker}(\psi\varphi) = 0$. Trong trường hợp này không cần điều kiện φ là toàn ánh.

Không thể phát biểu hai điều kiện sau gộp lại thành $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) = 0$ vì tuy cùng kí hiệu là 0, nhưng chúng nằm trong hai không gian khác nhau!

Bỏ điều kiện φ là toàn ánh cũng không được. Ví dụ ánh xạ đồng nhất trên V là hợp của đơn ánh $V \to V \times V : \ v \mapsto (0, v)$ và phép chiếu $p_2 : V \times V \to V,\ p_2(u, v) = v$.

13.16 Cả hai đều không đúng. Ví dụ: a) $f, g : K^2 \to K^2,\ f(x, y) = (x, 0)$ và $g(x, y) = (0, y)$. b) $f, g : K^2 \to K^2,\ g(x, y) = (x, 0)$ và $f(x, y) = (y, y)$.

13.17 Đây là bài tập thuần túy về ánh xạ, không cần sử dụng tính tuyến tính.

13.18 a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = n^2$. b) Trước hết phải chứng tỏ $L_1(B), L_2(B) \in \mathcal{H}$. Sau đó chỉ cần sử dụng các đẳng thức $(A^*)^* = A$ và $(AB)^* = B^*A^*$ và các tính chất quen biết của ma trận.

13.19 a) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = n(n-1)/2$.

b) Trước hết phải chứng tỏ $L_1(B), L_2(B) \in \mathcal{S}$.

13.20 Giả sử $v \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Khi đó $f(v) = 0$ và tồn tại $u \in V$ để $v = f(u)$. Vì $f(u) = f^2(u) = f(f(u)) = f(v) = 0$, nên $v = 0$. Vậy $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = 0$. Với mọi $v \in V$ ta có $v = v - f(v) + f(v)$. Dễ thấy $v - f(v) \in \mathrm{Ker}(f)$. Đương nhiên $f(v) \in \mathrm{Im}(f)$. Vậy $V = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$, và do đó $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

13.21 Cho $v \in V$. Từ điều kiện a) suy ra $v = f_1(v) + f_2(v) \in \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$. Giả sử $v \in \mathrm{Im}(f_1) \cap \mathrm{Im}(f_2)$. Khi đó $v = f_1(v_1) = f_2(v_2)$. Từ điều kiện $f_1 f_2 = 0$ suy ra $v \in \mathrm{Ker}(f_1)$. Theo điều kiện $f_1^2 = f_1$ thì $v = f_1(v_1) = f_1(v) = 0$. Do đó $\mathrm{Im}(f_1) \cap \mathrm{Im}(f_2) = 0$.

Chú ý rằng từ lời giải ta thấy chỉ cần sử dụng một nửa điều kiện của (b) và (c). Hơn nữa nhận xét rằng khi có (a) thì $f_1 f_2 = 0$ tương đương với $f_1^2 = f_1$. Chú ý rằng ví dụ sau đây (thay đổi một ít so với Bài 13.16) chứng tỏ $f_1^2 = f_1$ không suy ra $f_2^2 = f_2$ cho dù (a) thỏa mãn $f_1, f_2 : K^2 \to K^2,\ f_2(x, y) = (x - y, 0)$ và $f_1(x, y) = (y, y)$.

13.22 Sử dụng định lí hạng ánh xạ (Định lí 13.7).

13.23 Sử dụng định lí chiều giao của hai không gian con (Định lí 3.6).

13.24 Sử dụng định lí hạng ánh xạ (Định lí 13.7) ta thấy bất đẳng thức tương đương với

$$\operatorname{rank}(g) \leq \operatorname{rank}(fg) + \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Lại theo định lí hạng ánh xạ $\operatorname{rank}(fg) = \dim f(g(U)) = \dim g(U) - \dim(\operatorname{Ker} f|_{g(U)}) = \operatorname{rank}(g) - \dim(\operatorname{Ker} f|_{g(U)})$, nên điều trên suy ra từ bất đẳng thức hiển nhiên: $\dim(\operatorname{Ker} f|_{g(U)}) \leq \dim(\operatorname{Ker} f)$.

13.25 Nhận xét rằng $\operatorname{Ker} \varphi|_{U'} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi = 0$, nên $\varphi|_{U'}$ là đẳng cấu từ U' lên $\varphi(U')$.

13.26 $\varphi^{-1}(v) = u + W$.

13.27 Vì $f(g(U)) \subseteq f(U)$, nên $\operatorname{rank}(fg) = \dim f(g(U)) \leq \dim f(U) = \operatorname{rank} f$. Mặt khác $\operatorname{rank}(fg) = \dim f(g(U)) \leq \dim g(U) = \operatorname{rank} g$.

13.28 Để chứng tỏ sự tương đương, sử dụng định lí hạng ánh xạ.

Khi chiều vô hạn thì không đúng. Ví dụ phép lấy đạo hàm (hình thức) là toàn cấu trong không gian véc tơ $K[x]$, nhưng không là đơn cấu, còn phép lấy tích phân

$$T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$$

là đơn cấu nhưng không là toàn cấu.

13.29 Ánh xạ $f : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \times V_2$, xác định bởi $f(v_1 + v_2) = (v_1, v_2)$, trong đó $v_i \in V_i$, là đẳng cấu.

14.1 Lấy V là các véc tơ tự do trên mặt phẳng tọa độ. Không gian con U tương ứng với một đường thẳng d đi qua gốc tọa độ, còn các lớp kề là các đường thẳng song song với d.

14.2 Chứng tỏ rằng nếu $v_1, \ldots, v_n$ phụ thuộc tuyến tính thì $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ phụ thuộc tuyến tính.

14.3 Điều kiện là không gian con W sinh bởi $v_1, \ldots, v_n$ có giao với U bằng 0.

14.4 Mỗi lớp kề của $V/0$ chỉ chứa đúng một véc tơ, còn V/V chỉ gồm một phần tử.

14.5 b) Cho $S \subset V$ là một cơ sở của V còn $\bar{T} \subset U/V$ là một cơ sở của U/V. Từ mỗi lớp kề của $\bar{T}$ chọn một phần tử đại diện tùy ý, và xét tập T gồm các đại diện đã chọn ra, tức là $\bar{T} = \{\bar{v};\ v \in T\}$. Khi đó $S \cup T$ là cơ sở của U. Điều tương tự cũng đúng khi thay cơ sở bằng hệ sinh.

14.6 Hạn chế của phép chiếu tự nhiên $\pi : U \to U/V$ trên W cho ta một đẳng cấu $W \to U/V$.

14.7 Nếu không gian con là một siêu phẳng đi qua gốc tọa độ, thì các lớp kề là các siêu phẳng (trong không gian Óclit afin n chiều) song song với siêu phẳng đã cho.

14.8 Trước hết chứng tỏ $(u + V) \cap (u + W) = u + (V \cap W)$. Ngược lại, nếu $u_0 \in (u + V) \cap (u' + W)$, thì $u + V = u_0 + V$ và $u' + W = u_0 + W$.

14.9 Theo Hệ quả 14.7, $(V/(V_1 \cap V_2))/(V_1/(V_1 \cap V_2) \cong V/V_1$ có chiều hữu hạn. Theo Hệ quả 14.6, $V_1/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1 + V_2)/V_2$ có thể được xem là không gian con của V/V_2 nên có chiều hữu hạn. Theo Bổ đề 14.4, $V/(V_1 \cap V_2)$ có chiều hữu hạn.

Cách 2: sử dụng Bài 14.11.

14.10 Gọi ánh xạ từ V lên $V"$ là f. Chú ý rằng $\operatorname{Ker} f \cong V'$ và $V/\operatorname{Ker} f \cong V"$. Bây giờ hãy sử dụng Bổ đề 14.4 với lưu ý hai không gian véc tơ đẳng cấu với nhau thì có chiều như nhau.

14.11 Trước hết phải kiểm tra f và g không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện. Sau đó tính $\operatorname{Ker} f$, ta sẽ thấy $\operatorname{Ker} f = V = \bar{0}$.

Nếu $(v_1 + V_1, v_2 + V_2) \in \operatorname{Ker} g$, thì $v_1 - v_2 = u_1 + u_2$, trong đó $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$. Ta có $v_1 + V_1 = u_2 + v_2 + V_1$ và $v_2 + V_2 = u_2 + v_2 + V_2$. Do đó

$$(v_1 + V_1, v_2 + V_2) = (u_2 + v_2 + V_1, u_2 + v_2 + V_2) \in \operatorname{Im} f.$$

Ngược lại, dễ thấy $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$ và $\operatorname{Im} g = V/(V_1 + V_2)$.

14.12 Phần khó nhất là kiểm tra định nghĩa ánh xạ không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện. Nhưng điều này cũng dễ.

14.13 Kí hiệu $W = V/U$. Tương ứng biến mỗi không gian con $W' \subseteq W$ với không gian con $V' = \pi^{-1}(W')$ của V là một tương ứng cần xây dựng.

14.14 Theo Hệ quả 14.6, ta có

$$\frac{V_2 + V_3}{V_1 + V_3} = \frac{V_1 + V_3 + V_2}{V_1 + V_3} \cong \frac{V_2}{V_2 \cap (V_1 + V_3)} = \frac{V_2}{V_1 + (V_2 \cap V_3)}.$$

14.15 Sử dụng Bài 14.14 hãy chứng tỏ cả hai vế đẳng cấu với $(C_2 \cap D_2)/(C_2 \cap D_1 + C_1 \cap D_2)$.

14.16 Với mỗi $i \geq 1$ ta có

$$V_i/\operatorname{Im}(f_{i-1}) = V_i/\operatorname{Ker} f_i \cong \operatorname{Im}(f_i).$$

Do đó $\dim V_i = \dim(\operatorname{Im} f_{i-1}) + \dim(\operatorname{Im} f_i)$. Sau đó lưu ý $\operatorname{Im}(f_0) \neq 0$ và $\operatorname{Im}(f_n) = 0$.

15.1 Cho S' là một cơ sở của V'. Chọn cơ sở S của V mở rộng S'. Xét ánh xạ $\psi_0 : S \to U$ tùy ý sao cho $\psi_0(v) = \varphi(v)$ với mọi $v \in S'$. Khi đó mọi ánh xạ tuyến tính ψ mở rộng ψ_0 thỏa mãn đề bài. Rõ ràng có vô số cách xác định ψ_0.

15.2 Cho S và T lần lượt là hai cơ sở của S và T. Khi đó định lí Bernstein trong lí thuyết tập hợp khẳng định hoặc tồn tại toàn ánh $\varphi_0 : S \to T$, hoặc tồn tại đơn ánh $\psi_0 : S \to T$. Mở rộng một trong hai ánh xạ đó, ta được toàn cấu φ hoặc đơn cấu ψ. Có thể xây dựng để chúng không là đẳng cấu khi và chỉ khi $U \cong V$ có chiều vô hạn.

15.3 a) Nếu tồn tại thì duy nhất. Điều kiện cần và đủ để tồn tại là từ bất kì một quan hệ tuyến tính nào giữa các phần tử của S cũng dẫn đến một quan hệ tuyến tính tương ứng giữa các phần tử ảnh qua φ_0, nghĩa là nếu có $\sum \alpha_i s_i = 0$, $s_i \in S$ thì cũng có $\sum \alpha_i \varphi_0(s_i) = 0$.

b) Luôn tồn tại và không duy nhất, trừ phi S là cơ sở. Hãy mở rộng S thành cơ sở của V.

15.4 Trước hết ta thấy v_2, v_3, v_4 độc lập tuyến tính, nên nó là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Theo Định lí 15.1, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính φ thỏa tính chất $\varphi(v_i) = u_i$, $i \geq 2$. Vì $v_1 = v_2 - v_3 - v_4$, nên $\varphi(v_1) = u_2 - u_3 - u_4 = u_1$, tức φ là ánh xạ cần tìm. Để tìm ma trận biểu diễn của φ theo $\{e_i\}$, ta cần tìm $\varphi(e_i)$, $i = 1, 2, 3$. Rõ ràng

$$e_1 = v_4, \; e_2 = 2v_2 - 5v_3 - 4v_4, \; e_3 = -v_2 + 3v_3 + 2v_4.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= (2, 1, 2) = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \\
\varphi(e_2) &= 2u_2 - 5u_3 - 4u_4 = (-11, -7, -1) = -11e_1 - 7e_2 - e_3, \\
\varphi(e_2) &= -u_2 + 3u_3 + 2u_4 = (6, 4, 0) = 6e_1 + 4e_2 + 0 \cdot e_3.
\end{aligned}$$

Vì vậy ma trận biểu diễn của φ là

$$\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15.5 Tương tự Bài 15.4. v_1, v_2, v_3 là cơ sở và $v_4 = (2v_1 + v_2 - v_3)/5$, $u_4 = (2u_1 + u_2 - u_3)/5$. φ có ma trận biểu diễn là

$$\begin{pmatrix} -2 & 11/3 & 5/3 \\ -4 & 13/3 & 10/3 \\ 2 & -5/3 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

15.6 Cho S là một cơ sở tùy ý của U. Vì r bằng số phần tử độc lập tuyến tính cực đại trong $\varphi(S)$, nên sắp xếp lại thứ tự các phần tử, có thể giả thiết $S = \{e_1, ..., e_n\}$ sao cho $\{\varphi(e_1), ..., \varphi(e_r)\}$ là tập độc lập tuyến tính cực đại. Mở rộng tập này ta được cơ sở $T = \{f_1, ..., f_m\}$, trong đó $f_i = \varphi(e_i)$, $i = 1, ..., r$. Khi đó ma trận biểu diễn của φ theo (S, T) có dạng chuẩn tắc.

15.7 Cho $S = \{e_1, ..., e_n\}$ và $T = \{f_1, ..., f_n\}$ là hai cơ sở của V. Xét ánh xạ tuyến tính φ thỏa điều kiện $\varphi(e_i) = f_i$, $i = 1, ..., n$. Khi đó ma trận biểu diễn của φ chính là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T. φ là đẳng cấu.

15.8 Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp dòng và cột, ta có thể đưa A về dạng chính tắc D như trong Bài 15.6. Theo Bài 6.8, điều này tương đương với việc tồn tại hai ma trận khả nghịch P cấp m và Q cấp n để $A = PDQ$. Theo Bài 15.6, tồn tại cơ sở $S = \{e_1, ..., e_n\}$ của U và $T = \{f_1, ..., f_m\}$ của V sao cho ma trận biểu diễn của φ là D. Gọi $S' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ là cơ sở của U sao cho ma trận chuyển cơ sở từ S sang S' chính là Q, tức là $(e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)Q$. Gọi $T' = \{f'_1, ..., f'_m\}$ là cơ sở của V sao cho ma trận chuyển cơ sở từ T sang T' chính là P^{-1}, tức là $(f'_1, ..., f'_m) = (f_1, ..., f_m)P^{-1}$. Khi đó theo Định lí 15.7, ma trận biểu diễn của φ theo (S', T') chính bằng

$$(P^{-1})^{-1}DQ = PDQ = A.$$

15.9 a) Nhân bên trái ta được

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

b) Nhân bên phải ta được

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}.$$

15.10 Gọi A là ma trận đầu và $\tilde{A}$ là ma trận sau. Xét ánh xạ tuyến tính $\varphi : M(2,K) \to M(2,K)$ xác định bởi $\varphi(X) = XA$. Khi đó $\tilde{A}$ là ma trận biểu diễn của φ (xem Bài 15.9). Nếu A khả nghịch thì ta dễ kiểm tra φ là đẳng cấu, nên $\tilde{A}$ khả nghịch. Ngược lại, $\tilde{A}$ khả nghịch dẫn tới φ là đẳng cấu. Nói riêng ta có X để $XA = I$ là ma trận đơn vị. Từ đó A là khả nghịch.

15.11 Các ma trận biểu diễn là

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

15.12 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

15.13 Nếu e_i và e_j đổi chỗ cho nhau thì hai cột thứ i và j cũng như hai dòng thứ i và j của ma trận biểu diễn đổi chỗ cho nhau.

15.14 Sử dụng kết quả Bài 15.13, nếu đổi chỗ các cột i và j và các dòng i và j cho nhau, thì ta nhận được ma trận mới đồng dạng với ma trận ban đầu. Bây giờ nếu ta thực hiện liên tiếp các phép đổi chỗ các cặp cột và dòng có chỉ số i và $n+1-i$ cho nhau, $i = 1, 2, ..., [n/2]$, thì ta sẽ được ma trận B. Quan hệ đồng dạng có tính chất bắc cầu.

15.15 Chú ý rằng quan hệ đồng dạng có tính chất bắc cầu và mỗi phép hoán vị là tích của các phép chuyển vị, nên ta chỉ cần xét trường hợp $(i_1, ..., i_n)$ có dạng $(1, 2, ..., i-1, j, i+1, ..., j-1, i, j+1, ..., n)$. Nhưng khi đó B nhận được từ A bằng cách đổi chỗ các dòng và cột có chỉ số i và j. Bây giờ sử dụng kết quả Bài 15.13.

15.16 Theo Hệ quả 15.8 các ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính (theo một cơ sở chứ không phải theo cặp cơ sở) phải đồng dạng với nhau. Do đó chúng có cùng vết.

15.17 Theo cơ sở tự nhiên φ có ma trận biểu diễn là ma trận đường chéo $\mathrm{diag}(2, 3, 1, -1)$. Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở này sang cơ sở mới là ma trận có các cột là các véc tơ mới viết theo cột. Sau đó tìm ma trận nghịch đảo (xem Bài 6.3) và sử dụng Hệ quả 15.8 để nhận được ma trận biểu diễn

mới

$$\begin{pmatrix} -35 & 8 & 122 & 268 \\ 29 & -3 & -93 & -204 \\ 1 & -2 & -6 & -16 \\ -6 & -2 & 22 & 49 \end{pmatrix}.$$

15.18 Ma trận với các cột là các véc tơ của cơ sở là ma trận chuyển từ cơ sở tự nhiên sang cơ sở đó. Như vậy ta có ngay ma trận chuyển từ cơ sở tự nhiên sang a_1, a_2, a_3 là P và ma trận chuyển từ cơ sở tự nhiên sang b_1, b_2, b_3 là Q. Khi đó $P^{-1}Q$ sẽ là ma trận chuyển từ cơ sở a_1, a_2, a_3 sang b_1, b_2, b_3. Một cách khác là hãy viết $b_i = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ dưới dạng hệ phương trình tuyến tính ba ẩn để tìm ra ma trận chuyển cơ sở.

Sau đó áp dụng công thức chuyển cơ sở, ta được

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.19 Chứng minh qui nạp theo bậc và theo số đơn thức của đa thức (sử dụng Mệnh đề 15.4).

15.20 Sử dụng Định lí 15.3, hãy tìm tọa độ $\varphi(f_i)$, $i = 1, 2, 3$. Sau đó viết $\varphi(f_i) = x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3$ dưới dạng phương trình để tìm ra ma trận biểu diễn là ma trận đường chéo $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$.

15.21 Ta có thể viết hình thức $(R) = (T)Q = (S)PQ$. Vậy ma trận chuyển cơ sở từ S sang R là PQ.

15.22 Gọi ma trận biểu diễn đó là A. Cho P là một ma trận chuyển cơ sở từ S sang T. Khi đó $AP = PA$. Theo Bổ đề 15.6 ta có thể lấy P là ma trận khả nghịch tùy ý. Chú ý rằng ma trận $I + O_{ij}$ (xem Bài 6.2) khả nghịch và A giao hoán với $I + O_{ij}$ khi và chỉ khi A giao hoán với O_{ij}. Cho $i, j = 1, ..., n$, ta sẽ suy ra A là ma trận vô hướng (so sánh với Bài 5.4). Do đó $\varphi = \alpha\,\mathrm{id}$.

15.23 Điều kiện đủ suy ra từ công thức đổi cơ sở (Hệ quả 15.8). Ngược lại, giả sử $B = P^{-1}AP$. Gọi φ là toán tử tuyến tính có ma trận biểu diễn là A theo cơ sở $e_1, ..., e_n$ nào đó. Gọi T là tập n véc tơ xác định bởi $(f_1, ..., f_n) = (e_1, ..., e_n)P$. Vì P khả nghịch, nên T là cơ sở. Do đó theo Hệ quả 15.8, ma trận biểu diễn của φ theo T là $P^{-1}AP = B$.

15.24 a) Dựa vào Hệ quả 15.8 và tính chất của định thức của tích và của ma trận nghịch đảo.

b) Cố định một ma trận biểu diễn A của φ. Khi đó, A khả nghịch khi và chỉ khi φ là đẳng cấu. Mặt khác A khả nghịch khi và chỉ khi định thức của nó khác 0. Sau đó sử dụng câu a).

15.25 φ_A không khả nghịch vì $\varphi_A(I) = 0$. Từ Bài 15.24b) ta suy ra điều cần chứng minh.

15.26 Kí hiệu O_{ij} là ma trận gồm toàn 0 trừ phần tử ở vị trí (i, j) bằng 1. Ta chọn cơ sở của $M(n; K)$ theo thứ tự như sau

$$O_{11}, O_{21}, ..., O_{n1};\ O_{12}, O_{22}, ..., O_{n2};\ \cdots, O_{1n}, O_{2n}, ..., O_{nn}.$$

Tích AO_{ij} có tất cả các cột bằng 0, trừ cột thứ j bằng $(a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni})^T$. Như vậy

$$(*) \qquad AO_{ij} = a_{1i}O_{1j} + a_{2i}O_{2j} + \cdots + a_{ni}O_{nj}.$$

Gọi ma trận biểu diễn của L_A là $\mathcal{A}$. Ta thấy đây là ma trận cấp n^2. Vị trí của O_{ij} là $(j-1)n + i$. Từ (*) ta thấy phần tử a_{kl} xuất hiện khi và chỉ khi $i = l$. Điều đó tương ứng với các cột thứ $(j-1)n + l$ của ma trận $\mathcal{A}$. Tại cột này a_{kl} là hệ số của O_{kj} - tương ứng với hàng thứ $(j-1)n + k$. Như vậy, nếu ta xem $\mathcal{A}$ là ma trận khối gồm n^2 ma trận vuông cấp n thì từ lí luận trên ta thấy $\mathcal{A}$ chính là ma trận đường chéo khối $\operatorname{diag}(A, A, ..., A)$. Do đó $\operatorname{Det}(L_A) = (\operatorname{Det} A)^n$.

15.27 Gọi A là một ma trận biểu diễn của φ. Khi đó $A^2 = 0$. Theo lời giải Bài 8.5, A có vết là 0. Do đó

$$\operatorname{Det}(\alpha \operatorname{id} - \varphi) = \begin{vmatrix} \alpha - a & -b \\ -c & \alpha - d \end{vmatrix} = \alpha^2 - \alpha(a+d) + |A| = \alpha^2.$$

15.28 Theo Định lí 15.1, ánh xạ tuyến tính e_i^* tồn tại và duy nhất. Nếu $\varphi \in V^*$ thì dễ kiểm tra $\varphi = \varphi(e_1)e_1^* + \cdots + \varphi(e_n)e_n^*$, nên $e_1^*, ..., e_n^*$ là hệ sinh. Dễ thấy nó độc lập tuyến tính.

15.29 Xét ánh xạ tuyến tính $\varphi \in V^*$ thỏa điều kiện $\varphi(e_i) = 1$ với mọi $i \in I$. Khi đó φ không biểu diễn tuyến tính được qua $(e_i^*;\ i \in I)$.

15.30 Gọi $A \in M(m, n; K)$ là ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ theo cặp cơ sở (S, T). Hãy chứng tỏ $\varphi = \sum a_{ij}e_{ij}$.

15.31 Dễ chứng tỏ $V_1^* \cap V_2^* = 0$. Với mỗi $f \in V^*$, kí hiệu f_i là ánh xạ hạn chế $f|_{V_i} \in V_i^*$ và được nhúng vào V^* như đề bài. Khi đó $f = f_1 + f_2$. Cách

giải này không cần điều kiện $\dim V < \infty$. Nếu $\dim V < \infty$, có thể sử dụng Bài 15.28.

15.32 Dễ chứng tỏ v^{**} là một dạng tuyến tính của V^*, và ánh xạ $\Phi : V \to V^{**}$ mà $\Phi(v) = v^{**}$ là ánh xạ tuyến tính. Theo Bài 15.28, $\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^* = \dim V^{**}$, nên để chứng minh Φ là đẳng cấu, ta chỉ cần chứng tỏ Φ là đơn cấu. Giả sử $v \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Cố định một cơ sở $e_1, ..., e_n$ của V và đặt $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. Khi đó với mọi i, ta có

$$0 = v^{**}(e_i^*) = e_i^*(v) = a_1e_i^*(v_1) + \cdots + a_ne_i^*(v_n) = a_i.$$

Vậy $v = 0$.

15.33 *Cách 1*: Sử dụng Bài 15.28 và Bài 15.32. Ta thấy $f_1^*, ..., f_n^*$ là cơ sở của V^{**} và mỗi f_i^* có thể đồng nhất với e_i^{**} nào đó.

Cách 2: Theo Định lí về hạng của ánh xạ tuyến tính (Định lí 13.7), $\dim \mathrm{Ker}(f_i) = n - 1$ với mọi i. Bằng qui nạp theo định lí chiều giao của các không gian con, ta có thể chứng tỏ giao của r không gian con $\mathrm{Ker}(f_i)$ có chiều ít nhất là $n - r$, $1 \leq r \leq n - 1$. Từ đó $\dim(\cap_{j \neq i} \mathrm{Ker}(f_j)) \geq 1$. Nếu nó lớn hơn hoặc bằng 2 thì lại theo định lí chiều giao, ta có $\dim(\cap_{j=1}^n \mathrm{Ker}(f_j)) \geq 1$, tức là tồn tại $0 \neq v \in \cap_{j=1}^n \mathrm{Ker}(f_j)$. Khi đó mọi dạng tuyến tính khác 0 trên v (luôn tồn tại) sẽ không thể biểu diễn tuyến tính qua $f_1, ..., f_n$. Vô lí. Như vậy $\dim(\cap_{j \neq i} \mathrm{Ker}(f_j)) = 1$, tức là $\cap_{j \neq i} \mathrm{Ker}(f_j)$ sinh bởi đúng một véc tơ $e_i \neq 0$. Hơn nữa lại lí luận như trên, ta có $e_i \notin \mathrm{Ker}(f_i)$. Do đó ta có thể giả thiết $f_i(e_i) = 1$. Bây giờ dễ dàng chứng tỏ $f_i = e_i^*$.

15.34 Vì $\varphi^*(f)$ là ánh xạ hợp thành của các ánh xạ tuyến tính, nên nó là dạng tuyến tính. Dễ kiểm tra φ^* là ánh xạ tuyến tính.

Cho φ là đơn ánh. Lấy $g \in U^*$ tùy ý. Viết $V = \varphi(U) \oplus W$, trong đó W là một phần bù tùy ý. Đặt $f \in V^*$ là ánh xạ $f(\varphi(u) + w) = g(u)$. Khi đó $\varphi^*(f) = g$, tức φ^* là toàn ánh. Ngược lại, cho φ^* là toàn ánh. Nếu $0 \neq u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, thì tồn tại $g \in U^*$ để $g(u) \neq 0$. Khi đó tồn tại $f \in V^*$ để $g = f\varphi$. Ta có $0 \neq g(u) = f\varphi(u) = f(0) = 0$, vô lí.

Bây giờ ta cho φ là toàn ánh. Giả sử $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi^*$, tức là $f\varphi = 0$ - ánh xạ 0. Với mọi $v \in V$, ta có thể chọn $u \in U$ để $v = \varphi(u)$. Ta có $f(v) = f(\varphi(u)) = (f\varphi)(u) = 0$. Do đó $f = 0$. Ngược lại, cho φ^* là đơn ánh. Giả sử φ không là toàn ánh. Khi đó tồn tại $v \notin \varphi(U)$. Xét một cơ sở của V chứa v và cơ sở của $\varphi(U)$. Khi đó ta tìm được $f \in V^*$ (chẳng hạn $f = v^*$ xác định theo cơ sở vừa chọn) sao cho $f(v) \neq 0$ và $f(\varphi(U)) = 0$. Với mọi $u \in U$, ta có

$$(\varphi^*(f))(u) = f(\varphi(u)) = 0.$$

Do đó $f \in \mathrm{Ker}(\varphi^*)$. Vì vậy $f = 0$, và $f(v) = 0$. Vô lí.

15.35 Viết $V = \varphi(U) \oplus W$. Theo Bài 15.31, ta có $V^* = (\varphi(U))^* \oplus W^*$. Hơn nữa có thể kiểm tra dễ dàng $\varphi^*(W^*) = 0$ (xem chứng minh Bài 15.34). Do đó $\varphi^*(V^*) = \varphi^*|_{(\varphi(U))^*}$. Theo Bài 15.34 ánh xạ này là đơn ánh, nên

$$\mathrm{rank}(\varphi^*) = \dim(\varphi^*(V^*)) = \dim(\varphi(U))^* = \dim \varphi(U) = \mathrm{rank}\, \varphi.$$

Cách khác: Dùng ma trận biểu diễn, xem Bài 15.36.

15.36 Sử dụng định nghĩa trong Bài 15.28 và Bài 15.34 để tìm biểu diễn của $\varphi^*(f_i^*)$ qua S^*.

15.37 Mở rộng $f_1, ..., f_r$ thành một cơ sở $f_1, ..., f_n$ của V^*. Sử dụng Bài 15.33 có thể tìm được một cơ sở $e_1, ..., e_n$ của V sao cho $f_i = e_i^*$. Khi đó dễ dàng chứng tỏ $e_{r+1}, ..., e_n$ là cơ sở của $\mathrm{Ker}\, f_1 \cap ... \cap \mathrm{Ker}\, f_r$.

Lời giải, chỉ dẫn chương 5

16.1 Sử dụng công thức tọa độ trong Định lí 15.3, ta có $\varphi(u) = Au$.

16.2 Vì hạng của ma trận là số véc tơ dòng độc lập tuyến tính cực đại, ta có $m = \mathrm{rank}\, A \leq \mathrm{rank}\, B \leq m$. Do đó $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$.

Đây cũng là điều kiện cần, vì theo kí hiệu của Bài 16.1 b) thì điều kiện để hệ phương trình với véc tơ hệ số tự do b có nghiệm là $b \in \mathrm{Im}\, \varphi$. Do đó ta phải có $\mathrm{Im}\, \varphi = K^m$ hay $\mathrm{rank}\, A = \dim(\mathrm{Im}\, \varphi) = m$.

16.3 Nếu $ad - bc \neq 0$, tức là hạng của ma trận liên kết bằng 2, thì hệ có nghiệm duy nhất.

Nếu $ad - bc = 0$ và ít nhất một trong 4 số a, b, c, d khác 0 thì để hệ có nghiệm ta phải có $af - ce = bf - de = 0$. Trường hợp $a = b = c = d = 0$ thì để hệ có nghiệm ta phải có $e = f = 0$.

16.4 Vì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết với nó có vô số nghiệm, nên nếu hệ ban đầu có nghiệm thì theo Mệnh đề 16.4 nó có vô số nghiệm.

16.5 Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} ax + y + z = -2, \\ x + by + z = -2, \\ x + y + cz = -2 \end{cases}$$

có nghiệm (đổi biến $X = x - 1,\ Y = y - 1,\ Z = z - 1$).

Gọi A là ma trận liên kết của hệ trên. Nếu $|\ A\ | = abc - a - b - c + 2 \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất. Nếu $a = b = c = 1$ thì hệ phương trình tương đương với hệ gồm 1 phương trình, và do đó nó có vô số nghiệm. Trong trường hợp còn lại rank $A = 2$. Khi đó ta phải có

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & b & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & c & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ b & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Từ đó suy ra phải có hai trong ba số a, b, c bằng 1.

Tóm lại ta phải có: hoặc $|\ A\ | = abc - a - b - c + 2 \neq 0$ hoặc hai trong ba số a, b, c bằng 1.

16.6 Với giả thiết của bài toán, chiều của không gian nghiệm là 1.

16.7 Để hệ có nghiệm không tầm thường, ta phải có

$$\begin{vmatrix} -1 & b & c & d & e \\ a & -1 & c & d & e \\ a & b & -1 & d & e \\ a & b & c & -1 & e \\ a & b & c & d & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bây giờ có thể sử dụng kết quả Bài 10.16b).

16.8 Ba điểm thẳng hàng khi và chỉ khi ta tìm được a, b, c không đồng thời bằng 0 để tọa độ của chúng là nghiệm của phương trình

$$ax + by + c = 0.$$

Thay các cặp (x_i, y_i) vào, ta được một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các ẩn là a, b, c! Do đó ta phải có

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

16.9 Tương tự Bài 16.8 ta phải có

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

16.10 Điều kiện để ba đường thẳng đồng qui là hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ a_3x + b_3y &= c_3, \end{cases}$$

có nghiệm. Bây giờ ta có thể sử dụng Định lí Kronecker-Capelli.

16.11 Tâm của đường tròn nằm trên giao điểm của hai đường trung trực của 2 trong ba đoạn thẳng nối các điểm. Các đường thẳng này có hệ số hữu tỉ, nên phương trình của chúng có hệ số hữu tỉ. Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm nghĩa là hệ có nghiệm duy nhất trên $\mathbb{Q}$.

16.12 Gọi 4 điểm đó là A_1, A_2, A_3, A_4. Phương trình của đường trung trực đoạn A_1A_i $(i = 2, 3, 4)$ là

$$(x_i - x_1)(x - \frac{x_1 + x_i}{2}) + (y_2 - y_1)(y - \frac{y_1 + y_i}{2}) = 0.$$

Điều kiện cần và đủ để 4 điểm nội tiếp vòng tròn là hệ phương trình lập từ các phương trình này có nghiệm. Từ đó ta có điều kiện tương đương (chú ý rằng do không có ba điểm nào thẳng hàng, nên ma trận liên kết có hạng đúng bằng 2):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ 1 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 \\ 1 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Lần lượt thêm vào các cột một bội của cột đầu tiên, ta được

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

16.13 Cách giải tương tự Bài 16.11. Gọi các điểm đã cho là $A_0, ..., A_n$. Khi đó tâm mặt cầu là giao của n siêu phẳng "trung trực", tức là các siêu phẳng vuông góc với A_0A_i tại điểm giữa của mỗi đoạn thẳng đó.

16.14 Ta nhận thấy phương trình thứ 3 là tổng của phương trình 1 với hai lần phương trình 2. Mặt khác $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, nên $\operatorname{rank} A = 2$. Vậy không gian nghiệm có chiều 3.

16.15 Trong V ta chọn ra một cơ sở $v_1, ..., v_r$. Lập hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các dòng của ma trận liên kết là các tọa độ của các véc tơ $v_1, ..., v_r$. Hệ này cho ta hệ nghiệm cơ sở gồm $n - r$ véc tơ $u_1, ..., u_{n-r}$. Khi đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các dòng của ma trận liên kết là các tọa độ của các véc tơ $u_1, ..., u_{n-r}$ là hệ cần tìm. Đây cũng là hệ có số phương trình bé nhất. Để chứng minh, ta cần sử dụng Định lí 16.2.

16.16 Nếu viết các véc tơ v_i dưới dạng cột và A là ma trận liên kết của hệ phương trình thì với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ ta có

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = A \cdot (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

16.17 Giả sử $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$. Từ điều kiện bài toán ta có hệ phương trình sau đối với các ẩn $a_0, ..., a_n$:

$$a_0 + x_i a_1 + \cdots + x_i^n a_n = \beta_i, \ i = 1, ..., n+1.$$

Định thức của ma trận liên kết của hệ này là định thức Vandermonde (xem trang 63) và bằng $\prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$. Do đó hệ có nghiệm duy nhất. Vì công thức trong đề bài thỏa mãn điều kiện đặt ra, nên từ tính duy nhất ta suy ra f phải có dạng đó.

16.18 Giả sử ma trận đã cho có ma trận bổ sung là A và B. Khi đó từ giả thiết ta suy ra $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ trên L. Tuy nhiên ta có thể xác định hạng của ma trận qua các định thức con, mà các định thức con đều thuộc K nên nó không phụ thuộc vào việc mở rộng K. Do đó $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ trên K. Từ Định lí Kronecker-Capelli ta suy ra hệ có nghiệm trong K.

16.19 Nếu $a_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ và $x = (x_1, ..., x_n)$, thì x vuông góc với tất cả các véc tơ $a_1, ..., a_m$ khi và chỉ khi $x_1, ..., x_n$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$Ax^T = 0,$$

trong đó A là ma trận có các dòng là các tọa độ của a_i. Do vậy $\dim V^\perp = n - \operatorname{rank}\{a_1, ..., a_m\} = n - \dim V$.

16.20 Ta qui ước viết các véc tơ theo cột. Chú ý rằng $v_1 b_1 + \cdots + v_m b_m = b^T v = v^T b$.

Nếu hệ đầu có nghiệm, thì có u để $Au = b$. Khi đó $b^T v = (Au)^T v = u^T (A^T v) = 0$.

Ngược lại, ta kí hiệu $v_1, ..., v_s \in K^m$ là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A^T y = 0$. Khi đó $s = m - \operatorname{rank} A^T = m - r$, trong đó $r = \operatorname{rank} A$. Gọi B là ma trận gồm các dòng là các tọa độ của v_j. Khi đó $A^T v_j = 0$ với mọi j cũng có nghĩa là mỗi cột của A là nghiệm của hệ phương trình

$$Bz = 0.$$

Không gian nghiệm của hệ này có chiều bằng

$$m - \operatorname{rank} B = m - s = m - (m - r) = r = \operatorname{rank} A.$$

Điều này chứng tỏ các cột của A sinh ra không gian nghiệm của hệ $Bz = 0$. Điều kiện $v_j^T b = 0$ với mọi j cũng có nghĩa là b là nghiệm của hệ $Bz = 0$. Do đó b biểu diễn tuyến tính được qua các cột của A. Điều này tương đương với việc hệ $Ax = b$ có nghiệm.

17.1 Ta có $D = 22$, $D_1 = 66$, $D_2 = -22$, $D_3 = 44$. Vậy $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$.

17.2 Ta có $D = -46$, $D_1 = -230$, $D_2 = D_3 = -46$. Vậy $x = 5$, $y = 1$, $z = 1$.

17.3 Ta có $D = 2$, $D_1 = D_2 = 1$, $D_3 = D_4 = -1$. Vậy $x = y = 1/2$, $z = t = -1/2$.

17.4 $x = -1$, $y = 3$, $z = -2$, $t = 2$.

17.5 $x = -1$, $y = -76$, $z = 7$, $t = -33$.

17.6 Vô nghiệm.

17.7 Cộng tất cả các vế lại ta được $x + y + z + t = (a + b + c + d)/2$. Lấy phương trình này lần lượt trừ đi các phương trình ban đầu ta được:

$$x = \tfrac{-a+b+c+d}{2}, \quad y = \tfrac{a-b+c+d}{2},$$
$$z = \tfrac{a+b-c+d}{2}, \quad t = \tfrac{a+b+c-d}{2}.$$

17.8 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$: Nhân 2 vế phương trình thứ 1 với a, phương trình thứ 2 với $-b$, phương trình thứ 3 với $-c$ và phương trình thứ 4 với $-d$, rồi cộng hai vế của các phương trình lại với nhau, ta tìm ra x, ... Cuối

cùng ta được

$$x = \frac{ap - bq - cr - ds}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bp + aq - dr + cs}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$
$$z = \frac{cp + dq + ar - bs}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad t = \frac{dp - cq + br + as}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Nếu $a = b = c = d = 0$ và một trong 4 số p, q, r, s khác 0: hệ vô nghiệm. Trường hợp còn lại thì x, y, z, t tùy ý.

17.9 Sử dụng kết quả tính định thức ở Bài 12.4 và định thức Vandermonde (trang 63), ta được

$$x_k = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1} \cdots a_{i_k}.$$

17.10 Cộng tất cả các phương trình lại, ta được

$$(\lambda + 3)(x + y + z + t) = 4.$$

Như vậy khi $\lambda = -3$ hệ phương trình vô nghiệm. Khi $\lambda = 1$ hệ có vô số nghiệm $x = 1 - y - z - t$, trong đó y, z, t là các biến tự do.

Nếu $\lambda \neq 1, -3$: Chia phương trình trên cho $\lambda + 3$, rồi lần lượt trừ đi các phương trình ban đầu, ta được

$$x = y = z = t = \frac{1}{\lambda + 3}.$$

17.11 Cộng tất cả các phương trình lại, ta được $x_1 + \cdots + x_{100} = 0$. Sau đó cộng cách quãng ba phương trình, ta được $x_1 + \cdots + x_{99} = 0$. Từ đó $x_{100} = 0$. Tương tự $x_1 = \cdots = x_{100} = 0$.

17.12 Cộng tất cả các phương trình lại, ta được $x_1 + x_6 = 6$. Từ đó $x_1 = 6 - x_6$. Lần lượt thay vào phương trình đầu trở xuống, ta khử được các biến $x_2, ..., x_5$. Từ đó ta được nghiệm $(3, 5, 6, 6, 5, 3)$.

17.13 A khả nghịch khi và chỉ khi phương trình ma trận $XA = AX = I$ có nghiệm. Từ hệ thức $XA = I$, xét đối với dòng thứ i ta có hệ phương trình đối với các ẩn là $x_{i1}, ..., x_{in}$.

$$\begin{cases} x_{i1}a_{11} + \cdots + x_{in}a_{n1} = 0, \\ \cdots \\ x_{i1}a_{1i} + \cdots + x_{in}a_{ni} = 1, \\ \cdots \\ x_{i1}a_{1n} + \cdots + x_{in}a_{nn} = 0. \end{cases}$$

Khai triển Laplace của định thức D_j của hệ này theo cột thứ j ta suy ra D_j chính bằng $(-1)^{i+j}$ nhân với định thức của ma trận nhận được từ A^T bằng cách bỏ đi cột thứ j và dòng thứ i, tức là bằng $(-1)^{i+j} \mid A^T_{ji} \mid$. Do đó theo Qui tắc Cramer

$$x_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\mid A^T_{ji} \mid}{\mid A \mid} = (-1)^{i+j}\frac{\mid A_{ji} \mid}{\mid A \mid} = \frac{D_{ji}}{\mid A \mid},$$

trong đo D_{ji} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} (xem trang 45). Từ đó ta nhận lại được công thức quen thuộc ở trang 45.

Đối với phương trình $AX = I$ ta cũng nhận được cùng một nghiệm như vậy.

17.14 Nếu ma trận liên kết của hệ phương trình là $A = (a_{ij}) \in M(n, n+1; K)$, thì với mọi i ta có

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{i(n+1)} \\ a_{11} & \cdots & a_{1i(n+1)} \\ & \cdots & \\ a_{(n+1)1} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Khai triển Laplace định thức này theo dòng đầu ta suy ra bộ giá trị nêu trong bài thỏa mãn phương trình thứ i, và do đó là nghiệm của toàn bộ hệ.

Nếu nó là nghiệm khác 0, thì A có một định thức con khác 0 cấp n. Điều đó chứng tỏ hạng của hệ là n và không gian con nghiệm có chiều 1. Suy ra nghiệm đó là nghiệm cơ sở.

17.15 Hệ có nghiệm nguyên suy ra từ Qui tắc Cramer. Ngược lại, nếu mọi hệ như vậy có nghiệm, thì lần lượt cho b là các véc tơ đơn vị của hệ cơ sở tự nhiên, ta suy ra tồn tại ma trận nguyên X sao cho $AX = I$. Do đó $1 = \mid I \mid = \mid A \mid \cdot \mid X \mid$, và $\mid A \mid$ phải là ước của 1.

17.16 Người đi đầu được điền các hệ số $a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}$ và a_{33}. Ta chỉ việc lấy $a_{11} \neq 0$, $a'_{22} := a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11} \neq 0$. Khi đó theo phương pháp giải Gauss, sau khi người thứ 2 điền xong hệ số a_{32}, ta có thể đưa hệ về dạng :

$$\begin{cases} a_{11}x + *y + *z &= 0, \\ a'_{22}y + a'_{23}z &= 0, \\ a'_{32}y + a'_{33}z &= 0, \end{cases}$$

trong đó $a_{11} \neq 0$ và $a'_{22} \neq 0$. Bây giờ ta chỉ việc chọn a_{33} sao cho $a'_{22}a'_{33} - a'_{23}a'_{32} \neq 0$.

- Người thứ hai không thể đạt được điều đó, nếu người thứ nhất điền tất cả các hệ số là 0.

- Nếu n chẵn thì không thể được, vì người thứ hai chỉ việc điền các hệ số là 0. Khi n lẻ người thứ nhất có thể làm được theo chiến lược trên, vì ông ta được chọn các phần tử trên đường chéo, và do đó ông ta luôn đảm bảo được điều là: nếu thực hiện theo thuật toán Gauss, ông ta sẽ được hệ phương trình dạng tam giác mà tất cả các phần tử trên đường chéo khác 0.

17.17 Do n phần tử của dòng cuối cùng của B' có dạng $(0,...,0,1,*,...,*)$, nên khi thực hiện thuật toán Gauss bằng cách trừ đi các dòng khác một bội của dòng này ta được một ma trận mới có cột thứ n có dạng $(0,...,0,1)^T$. Tiếp tục như vậy với các dòng thứ $n-1$,..., ta sẽ được B". Khi này phương trình $AX = b_i$ tương đương với $IX = d_i$, nên d_i là nghiệm.

Lời giải, chỉ dẫn chương 6

18.1 a) Nếu $\varphi p = \psi p$, thì với mọi $v \in V$ ta tìm được $u \in U$ để $v = p(u)$. Khi đó $\varphi(v) = \varphi p(u) = \psi p(u) = \psi(v)$.

18.2 a) $f_A(t) = (t+2)^2(t-4)$. Như vậy A có giá trị riêng là -2 và 4. Với $\lambda = -2$, hệ phương trình tuyến tính $(A+2I)(x_1,x_2,x_3)^T = 0$ tương đương với phương trình

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Suy ra có hai véc tơ độc lập tuyến tính là véc tơ riêng tương ứng với -2, chẳng hạn $v_1 = (1,0,-1)$ và $v_2 = (0,1,1)$.

Ứng với $\lambda = 4$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_2 - x_3 &= 0. \end{cases}$$

Hệ này có véc tơ riêng là $v_3 = (1,1,2)$.

Do v_1, v_2, v_3 lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$, nên A chéo hóa được.

b) $f_B(t) = (t+2)^2(t-4)$. Như vậy B cũng có giá trị riêng là -2 và 4. Với $\lambda = -2$, không gian riêng có chiều bằng 1 sinh bởi $v_1 = (1,1,0)$. Với $\lambda = 4$, không gian riêng có chiều bằng 1 sinh bởi $v_2 = (0,1,1)$. Như vậy B không thể có cơ sở gồm các véc tơ riêng được. Do đó nó không chéo hóa được (xem thêm Bài 18.6).

18.3 Cho $S = (v_i;\ i \in I)$ là một cơ sở của V (có thể vô hạn). Gọi giá trị riêng ứng với v_i là λ_i. Ta chỉ cần chứng minh $\lambda_i = \lambda_j$ với mọi $i, j \in I$. Điều đó dễ dàng suy ra từ điều kiện $v_i + v_j$ lại là véc tơ riêng của φ và S độc lập tuyến tính.

18.4 Lập ma trận biểu diễn có các dòng là các hệ số của các toạ độ véc tơ ảnh.

a) $f_\varphi(t) = -(t+1)^3$, và véc tơ riêng ứng với giá trị riêng -1 là $\alpha(1,1,-1)$, $\alpha \neq 0$.

b) $f_\varphi(t) = -(t-2)^3$, và không gian riêng ứng với giá trị riêng 2 có chiều 2. Một cơ sở của không gian riêng này là $(1,2,0)$ và $(0,0,1)$.

18.5 a) Đa thức đặc trưng là $-t^2(t-1)$. Véc tơ riêng ứng với 1 là $\alpha(1,1,1)$, ứng với 0 là $\alpha(1,2,3)$, $\alpha \neq 0$.

b) Đa thức đặc trưng là $-(t-1)^3$. Véc tơ riêng ứng với 1 là $\alpha(3,1,1)$, $\alpha \neq 0$.

18.6 Chứng minh bằng qui nạp theo r. Giả sử có một quan hệ tuyến tính

$$a_{11}v_{11}+\cdots+a_{1m_1}v_{1m_1}+\cdots+a_{(r+1)1}v_{(r+1)1}+\cdots+a_{(r+1)m_{r+1}}v_{(r+1)m_{r+1}} = 0.$$

Tác động φ vào hai vế, ta được

$$\begin{aligned}\lambda_1 a_{11}v_{11} &+\cdots+\lambda_1 a_{1m_1}v_{1m_1}+\cdots\\ &+\lambda_{r+1}a_{(r+1)1}v_{(r+1)1}+\cdots+\lambda_{r+1}a_{(r+1)m_{r+1}}v_{(r+1)m_{r+1}} = 0.\end{aligned}$$

Nhân quan hệ thứ nhất với λ_{r+1} rồi trừ đi quan hệ thứ hai, sau đó sử dụng giả thuyết qui nạp, ta được $a_{ij} = 0$ với mọi $i = 1,\ldots,r$ và $1 \leq j \leq m_i$. Thay vào quan hệ thứ nhất và sử dụng tính độc lập tuyến tính của $v_{(r+1)1},\ldots,v_{(r+1)m_{r+1}}$, ta sẽ suy ra $a_{(r+1)1} = \cdots = a_{(r+1)m_{r+1}} = 0$.

Đối với chỉ tiêu cho φ chéo hóa được, hãy sử dụng điều vừa chứng minh và Định lí 18.4(i).

18.7 A chỉ có một giá trị riêng là 0. Theo Bài 18.6, A chéo hóa được khi và chỉ khi A có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính ứng với 0. Điều đó tương đương với $\mathrm{Ker}(\varphi)$ có chiều n, trong đó φ là toán tử tuyến tính có ma trận biểu diễn là A theo cơ sở tự nhiên của K^n. Do đó $\mathrm{Ker}(\varphi) = K^n$ và $A = 0$, tức là $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

18.8 Ma trận biểu diễn của φ là

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Do đó $f_\varphi(t) = (t-2)^2(t-3)$. Ứng với 2 không gian riêng có chiều là 1 sinh bởi véc tơ riêng $v_1 = (1,0,0)$, còn ứng với 3 không gian riêng có chiều là 1 sinh bởi véc tơ riêng $v_2 = (1,1,-2)$. Do đó φ không chéo hóa được.

18.9 Giả sử λ là giá trị riêng của $\varphi\psi$, tức là ta có $v \neq 0$ để $\varphi\psi(v) = \lambda v$. Khi đó $(\psi\varphi)(\psi(v)) = \psi(\varphi\psi(v)) = \lambda\psi(v)$. Như vậy nếu $\psi(v) \neq 0$, thì λ là giá trị riêng của $\psi\varphi$. Giả sử $\psi(v) = 0$. Khi đó từ $\varphi\psi(v) = \lambda v$ phải có $\lambda = 0$. Nhưng điều này tương đương với điều ma trận AB có định thức bằng 0, trong đó A và B tương ứng là ma trận biểu diễn của φ và ψ. Vì $|AB| = |A||B| = |BA|$, nên $\psi\varphi$ cũng nhận $\lambda = 0$ làm giá trị riêng. Như vậy λ luôn là giá trị riêng của $\psi\varphi$.

Do tính chất đối xứng, ta có điều ngược lại.

Cách khác: xem Bài 18.20.

18.10 Do $\varphi(v) = \lambda v$, $v \neq 0$ và φ khả nghịch nên $\lambda \neq 0$. Tác động φ^{-1} lên hai vế, ta được điều phải chứng minh.

18.11 Đó là hệ quả của định lí mọi đa thức hệ số thực bậc lẻ đều có nghiệm thực.

18.12 Đó là hệ quả của Định lí cơ bản của đại số nói rằng mọi đa thức hệ số phức đều có nghiệm phức (xem Định lí 37.1).

Khi $\dim V = \infty$ thì không còn đúng. Ví dụ $T : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]$ mà $T(f) = tf$ với mọi $f \in \mathbb{C}[t]$.

18.13 Nếu $Av = \lambda v$ thì theo qui nạp, ta có $A^r v = \lambda^r v$. Từ đó suy ra $f(A)v = f(\lambda)v$.

18.14 Giả sử ngược lại, φ có s véc tơ riêng độc lập tuyến tính $v_1, ..., v_s$ ứng với λ và $s > r$. Mở rộng hệ véc tơ này thành một cơ sở của φ. Khi đó φ có ma trận biểu diễn theo cơ sở này là ma trận khối dạng $\begin{pmatrix} \lambda I_s & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Do đó $f_\varphi(t) = (t-\lambda)^s f_C(t)$ chia hết cho $(t-\lambda)^s$. Vô lí.

18.15 Điều kiện để $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ chéo hóa được là đa thức đặc trưng của nó có hai nghiệm phân biệt, hoặc khi có nghiệm kép thì hệ phương trình thuần nhất hai ẩn tương ứng phải có hai nghiệm độc lập tuyến tính, tức là chỉ chứa phương trình $0 = 0$. Từ đó

a) $(a-d)^2 + 4bc > 0$ hoặc $a = d$ và $b = c = 0$.

b) $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$ hoặc $a = d$ và $b = c = 0$.

18.16 Từ $\varphi(v) = \lambda v$ suy ra $\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \lambda\psi(v)$.

18.17 Do $f_A(t) = f_{A^T}(t)$. Ví dụ đơn giản nhất là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18.18 Ta viết P dưới dạng $P = (v_1, ..., v_n)$, trong đó v_i viết dưới dạng cột. Khi đó $AP = (\lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n)$. Mặt khác, nếu $P^{-1} = (u_1, ..., u_n)$, trong đó $u_i \in K^n$ được viết theo dòng, thì $u_i v_j = \delta_{ij}$. Do đó $u_i(\lambda_j v_j) = \lambda_j \delta_{ij}$. Suy ra

$$P^{-1}AP = (u_1, ..., u_n)(\lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

18.19 Nhận xét rằng không gian riêng của φ ứng với mỗi véc tơ riêng có chiều bằng 1 (xem Bài 18.6). Mặt khác, nếu v là véc tơ riêng của φ ứng với λ, thì

$$\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \lambda\psi(v).$$

Chứng tỏ, hoặc $\psi(v) = 0$ và khi đó v là véc tơ riêng của ψ ứng với 0, hoặc $\psi(v) \neq 0$ là véc tơ riêng của φ cũng ứng với λ. Theo nhận xét ban đầu ta phải có $\psi(v) = \alpha v$ với $\alpha \in K$ nào đó, tức là v vẫn là véc tơ riêng của ψ.

Cách 2: Hãy sử dụng ma trận biểu diễn với nhận xét rằng nếu một ma trận giao hoán với ma trận đường chéo có các phần tử khác nhau, thì nó cũng là ma trận đường chéo (chỉ việc so sánh hai tích ma trận).

18.20 Nếu A khả nghịch có thể giải dễ dàng:

$$|AB - tI| = |A(B - tA^{-1})| = |(B - tA^{-1})A| = |BA - tI|.$$

A tùy ý: Bằng các phép biến đổi sơ cấp dòng và cột, ta có thể đưa A về ma trận khối toàn 0, trừ khối đầu tiên là ma trận đơn vị. Theo Bài 6.8, điều đó có nghĩa là tồn tại hai ma trận khả nghịch P và Q sao cho

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó I_s là ma trận đơn vị cấp s (xem thêm Bài 15.6). Ta viết

$$Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} C & D \\ R & S \end{pmatrix}$$

dưới dạng ma trận khối cùng cấp như của PAQ ở trên. Khi đó

$$|AB - tI| = |P(AB - tI)P^{-1}| = |PAQ \cdot Q^{-1}BP^{-1} - tI| = |C - tI_s|(-t)^{n-s},$$

trong đó n là cấp của ma trận. Mặt khác

$$|BA - tI| = |Q^{-1}(BA - tI)Q = |Q^{-1}BP^{-1} \cdot PAQ - tI| = |C - tI_s|(-t)^{n-s}.$$

Từ đó $|AB - tI| = |BA - tI|$.

18.21 Theo Bài 10.32

$$f_A(t) = \begin{cases} (t^2-1)^k & \text{nếu } n = 2k, \\ (1-t)(t^2-1)^k & \text{nếu } n = 2k+1. \end{cases}$$

Như vậy A chỉ có hai giá trị riêng là ± 1. Với $\lambda = 1$, hệ phương trình tương ứng là

$$\begin{cases} -x_1 + x_n & = 0, \\ -x_2 + x_{n-1} & = 0, \\ & \cdots \\ -x_k + x_{n-k+1} & = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $n - k + 1$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính là $(1, 0, ..., 0, 1), ..., (0, ..., 0, 1, 1, 0, ..., 0)$ (nếu $n = 2k$), và $(1, 0, ..., 0, 1), ..., (0, ..., 0, 1, 0, 1, 0, ..., 0), (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (nếu $n = 2k + 1$) (các véc tơ đều đối xứng). Tương tự ứng với $\lambda = -1$, ta tìm được k véc tơ riêng độc lập tuyến tính nữa. Do đó A đồng dạng với ma trận đường chéo gồm k số -1 ở phía dưới, còn lại là 1 ở phía trên. Theo Bài 18.18, ta có thể lấy P là ma trận có các cột là các véc tơ riêng vừa tìm thấy, cụ thể

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

18.22 Theo Bài 10.32

$$f_A(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(t^2 - a_i a_{2k+1-i}) & \text{nếu } n = 2k, \\ (a_{k+1} - t)\prod_{i=1}^{k}(t^2 - a_i a_{2k+2-i}) & \text{nếu } n = 2k+1. \end{cases}$$

Từ đó ta có thể tính được các giá trị riêng. Lập các hệ phương trình tuyến tính ta tìm cơ sở của không gian riêng tương ứng với một giá trị riêng. Để điều kiện Bài 18.6 thỏa mãn, ta thấy $a_1, ..., a_n$ phải thỏa mãn điều kiện sau: với mỗi $i = 1, ..., k$ thì a_i và a_{n+1-i} hoặc cùng bằng 0 hoặc cùng khác 0

18.23 Sử dụng Bài 10.21, ta thấy đa thức đặc trưng của A^TA là

$$(-1)^n t^{n-1}[t - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)].$$

18.24 Gọi φ là toán tử tuyến tính của K^n nhận A làm ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên. Đặt $\psi = \varphi - \lambda \mathrm{id}$. Vì λ là giá trị riêng của φ, nên $d = \dim \mathrm{Ker}(\psi) > 0$. Theo Định lí về hạng ánh xạ tuyến tính, $d = n - r$. Theo Bài 18.14, ta có $d \leq p$.

18.25 Chú ý rằng $A - \lambda I$ lại là ma trận chu trình. Do đó ta có thể áp dụng Bài 11.13 để tìm ra các giá trị riêng là $f(\epsilon_i)$, trong đó $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ là các căn phức bậc n của 1.

18.26 Vì tính lũy linh và đa thức đặc trưng không phụ thuộc vào việc mở rộng trường, nên ta có thể giả thiết $K = \mathbb{C}$. Nếu đa thức đặc trưng không bằng $(-t)^n$ thì nó có nghiệm $\lambda \neq 0$. Đây là một giá trị riêng của φ. Gọi v là một véc tơ riêng ứng với λ. Khi đó $\varphi^k(v) = \lambda^k v \neq 0$ với mọi k, nên φ không thể là lũy linh. Vô lí.

Điều ngược lại là hệ quả trực tiếp của Định lí Hamilton - Cayley, hoặc sử dụng Bài 19.15.

18.27 Cố định $0 \leq k \leq n$. Đơn thức t^k chỉ xuất hiện trong những số hạng của định thức $|A - tI|$ gồm các tích chứa đúng k phần tử trên đường chéo của ma trận, tức là trong những tích

$$(-1)^{\mathrm{sign}\,\pi}(a_{i_1 i_1} - t) \cdots (a_{i_k i_k} - t) a_{i_{k+1} j_1} \cdots a_{i_n j_{n-k}},$$

trong đó $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ và $i_{k+1} < \cdots < i_n$ cũng như $j_1, ..., j_{n-k}$ là tập phần bù $\{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}$, còn π là hoán vị giữ nguyên các chỉ số $i_1, ..., i_k$ và biến i_{k+l} thành j_l.

Chú ý rằng khi cố định $i_1, ..., i_k$ thì $(-1)^{\mathrm{sign}(\pi)}$ chính bằng $(-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}$, trong đó σ là hoán vị của $\{i_{k+1}, ..., i_n\}$. Hơn nữa hệ số của t^k trong $(a_{i_1 i_1} - t) \cdots (a_{i_k i_k} - t)$ đúng bằng $(-1)^k$. Do đó khi cho σ chạy trên tập tất cả các hoán vị của $\{i_{k+1}, ..., i_n\}$, thì tổng các số hạng nêu trên cho ta hệ số của t^k là $(-1)^k A_{i_{n+1}, ..., i_n}$, trong đó $A_{i_{k+1}, ..., i_n}$ là định thức con chính lập nên từ các cột và hàng có chỉ số $i_{n+1}, ..., i_n$.

Cho $i_1, ..., i_k$ chạy, cuối cùng ta được c_{n-k} bằng tổng các định thức con chính cấp $n - k$.

19.1 Suy trực tiếp từ các định nghĩa về giao, tổng và không gian con bất biến.

19.2 $\varphi(\psi(U)) = \psi(\varphi(U)) \subseteq \psi(U)$.

19.3 Vì $\varphi(V) \subseteq V$, nên $\varphi(\psi(V)) = \psi(\varphi(V)) \subseteq \psi(V)$. Tiếp theo, nếu $u \in \mathrm{Ker}(\psi)$, thì $\psi(\varphi(u)) = \varphi(\psi(u)) = 0$, nên $\varphi(u) \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

19.4 Chú ý rằng $f(\varphi)$ và φ giao hoán với nhau, nên kết quả suy ra từ Bài 19.2.

19.5 a) Chú ý rằng nếu $w \in W$, thì $\varphi|_U(w) = \varphi(w)$.

b) Đối với mọi ánh xạ tập hợp $f : X \to Y$, nếu $A \subseteq B \subseteq X$ thì $f(A) \subseteq f(B)$, và nếu $A \subseteq B \subseteq Y$ thì $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

19.6 Nếu $v = v_1 + \cdots + v_r$, $v_i \in V_i$, thì

$$\varphi(v) = \varphi(v_1) + \cdots + \varphi(v_r) \in \varphi(V_1) + \cdots + \varphi(V_r).$$

Do $\varphi(V_i) \subseteq V_i$ và tổng $V_1 + \cdots + V_r$ là trực tiếp, nên dễ thấy tổng $\varphi(V_1) + \cdots + \varphi(V_r)$ là tổng trực tiếp.

19.7 Giả sử các giá trị riêng là $a_1, ..., a_n$ và các véc tơ riêng tương ứng là $\{v_1, ..., v_n\} =: S$. Theo Định lí 18.3, S là cơ sở của K^n. Khi đó mọi không gian con sinh bởi một tập con của S là một không gian con bất biến Có tất cả 2^n không gian con như vậy. Ta sẽ chứng minh rằng mọi không gian con bất biến U đều có dạng như vậy. Để đạt được điều đó, ta chỉ cần chứng tỏ, nếu $u \in U$ và $u = a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k}$ thì $v_{i_1}, ..., v_{i_k} \in U$, trong đó $a_1, ..., a_k \neq 0$ và $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Qui nạp theo k. $k = 1$ hiển nhiên. Giả sử điều khẳng định đã đúng với mọi $l < k$. Vì $u \in U$, ta có $\varphi(u) \in U$. Do đó

$$\varphi(u) - \lambda_{i_k} u = a_1(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_k})v_{i_1} + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{i_{k-1}} - \lambda_{i_k})v_{i_{k-1}} \in U.$$

Theo giả thiết qui nạp, $v_{i_1}, ..., v_{i_{k-1}} \in U$. Lại kết hợp với $u \in U$, ta suy ra $v_{i_k} \in U$.

19.8 Theo Định lí 18.4, V có một cơ sở gồm các véc tơ riêng $e_{11}, ..., e_{1m_1}$, ..., $e_{r1}, ..., e_{rm_r}$, trong đó $e_{j1}, ..., e_{jm_j}$ ứng với giá trị riêng λ_j và $\lambda_1, ..., \lambda_r$ đôi một khác nhau. Kí hiệu V_j là không gian con sinh bởi $e_{j1}, ..., e_{jm_j}$. Đây chính là không gian riêng ứng với λ_j. Theo phương pháp Bài 19.7, ta có thể chứng tỏ nếu

$$u = u_{i_1} + \cdots + u_{i_k} \in U;\ 0 \neq u_{i_1} \in V_{i_1}, ..., 0 \neq u_{i_k} \in V_{i_k},$$

trong đó $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r$, thì $u_{i_1}, ..., u_{i_k} \in U$. Từ đó suy ra

$$U = (U \cap V_1) \oplus \cdots (U \cap V_r).$$

Bây giờ chọn trong mỗi $U \cap V_j$ một cơ sở của không gian con này, thì hợp của chúng sẽ cho một cơ sở mà $\varphi|_U$ có ma trận biểu diễn là ma trận đường chéo.

19.9 Sử dụng cấu trúc của không gian con bất biến mô tả trong lời giải của Bài 19.8, để tìm các không gian con bất biến trước hết ta phải xác định các véc tơ riêng và giá trị riêng của các toán tử tuyến tính.

a) φ có hai giá trị riêng: $1, 2$. Ứng với 1 có một véc tơ riêng $v_1 = (2, 2, -1)$ và ứng với 2 có hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính là $v_2 = (1, 1, 0)$ và $v_3 = (1, 0, -1)$. Như vậy ngoài 0 và V nó có các không gian con bất biến sau: 1-chiều: Kv_1 và bất kì đường thẳng nào trên mặt phẳng xác định bởi v_2, v_3, tức là không gian con sinh bởi $D_2 = a_2v_2 + a_3v_3$, a_2, a_3 không đồng thời bằng 0. Không gian con bất biến chiều 2: sinh bởi v_1 và một véc tơ dạng D_2, hoặc $Kv_2 + Kv_3$.

b) Có hai giá trị riêng: 3 và 6. Ứng với 3 có một véc tơ riêng $v_1 = (1, 1, 1)$ và ứng với 6 có hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính là $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$. Làm tiếp tương tự như a).

c) Có hai giá trị riêng: 7 và -7. Ứng với 7 có một véc tơ riêng $v_1 = (1, 2, 3)$ và ứng với -7 có hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính là $v_2 = (-2, 1, 0)$, $v_3 = (-3, 0, 1)$. Làm tiếp tương tự như a).

19.10 Kí hiệu cơ sở tự nhiên là $e_1, ..., e_n$. Rõ ràng các không gian con sinh bởi $e_1, ..., e_r$, $r \leq n$ là các không gian con bất biến. Có tất cả $n + 1$ không gian con như vậy. Ta sẽ chứng tỏ mỗi không gian con bất biến U của φ có dạng như vậy. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng tỏ nếu $u \in U$ mà $u = a_1e_1 + \cdots + a_re_r$ và $a_r \neq 0$, thì $e_1, ..., e_r \in U$.

Qui nạp theo r. $r = 1$ hiển nhiên. Giả sử điều khẳng định đã đúng tới $r - 1$, $r > 1$. Vì $\varphi(u) \in U$, nên

$$\begin{aligned}\varphi(u) - au &= a_1ae_1 + a_2(b_1e_1 + ae_2) + \cdots + a_r(b_{r-1}e_{r-1} + ae_r) \\ &\quad -a(a_1e_1 + \cdots + a_re_r) \\ &= \alpha_1e_1 + \cdots + \alpha_{r-2}e_{r-2} + a_rb_{r-1}e_{r-1} \in U.\end{aligned}$$

Vì $a_r \neq 0$ và $b_{r-1} \neq 0$, nên $a_rb_{r-1} \neq 0$. Do đó theo qui nạp, ta có $e_1, ..., e_{r-1} \in U$. Kết hợp với $u \in U$, ta lại suy ra $e_r \in U$.

19.11 Vì $u \in U$, nên $\varphi(u) \in U$. Theo qui nạp, từ $\varphi^k(v) \in U$ suy ra $\varphi^{k+1}(v) = \varphi(\varphi^k(v)) \in U$. Do đó không gian con W sinh bởi $v, \varphi(v), \varphi^2(v), ...$ chứa trong U. Dễ kiểm tra W là không gian con bất biến. Do tính chất bé nhất của U, ta suy ra $W = U$.

19.12 Điều kiện cần: xem Bài 19.8. Đây không phải là điều kiện đủ: xem Bài 19.10. Một ví dụ khác là khi $K = \mathbb{C}$, thì mọi toán tử tuyến tính không chéo hóa được vẫn thỏa mãn điều kiện đã nêu.

19.13 Cho λ là một giá trị riêng của φ. Kí hiệu W là không gian riêng của φ tương ứng với λ. Với mọi $v \in W = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$, ta có $\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \lambda\psi(v)$. Điều đó chứng tỏ $\psi(v) \in W$, tức là W là không gian con bất biến của ψ. Do đó $\psi|_W$ có véc tơ riêng $w \in W$ nào đó. Đây là véc tơ riêng chung của hai ánh xạ ban đầu.

19.14 Sử dụng cách chứng minh của Bài 19.13 và kết quả của Bài 19.2.

19.15 Sử dụng Mệnh đề 19.2(iv).

19.16 Qui nạp theo n là cấp ma trận. Gọi φ là toán tử tuyến tính của $V = \mathbb{C}^n$ nhận ma trận đã cho làm ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên. Khi đó φ có một véc tơ riêng v_1 và $\mathbb{C}v_1$ là không gian con bất biến của φ. Theo qui nạp, ta có thể chọn được cơ sở $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ của $V/\mathbb{C}v_1$ sao cho $\bar{\varphi}$ có ma trận biểu diễn theo cơ sở này là ma trận tam giác trên. Ta đã biết $v_1, \ldots, v_n$ là cơ sở của V (xem Bài 14.5). Theo Mệnh đề 19.2(iv), φ theo cơ sở này sẽ có ma trận biểu diễn là ma trận tam giác trên.

Trên $\mathbb{R}$ thì không đúng, vì điều kiện cần là đa thức đặc trưng của φ có n nghiệm trên $\mathbb{R}$ (kể cả số bội). Theo chứng minh trên đây cũng là điều kiện đủ.

19.17 Nếu nó phân tích thành tổng $U_1 \oplus U_2$ của các không gian con bất biến, thì mỗi U_i lại chứa một đường thẳng bất biến của $\varphi|_{U_i}$ và do đó bất biến đối với φ.

19.18 Nếu nó có ma trận biểu diễn là ma trận tam giác theo cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$, thì đặt V_i là không gian con sinh bởi $e_1, \ldots, e_i$.

19.19 Qui nạp theo r. $r = 1$ hiển nhiên. Giả sử điều khẳng định đã đúng với $r - 1$. Giả sử $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ là r toán tử tuyến tính giao hoán với nhau của không gian véc tơ V chiều n mà $d \nmid n$. Bằng qui nạp theo n, ta sẽ chứng tỏ chúng có chung véc tơ riêng. Trường hợp $n = 1$ là tầm thường.

Giả sử $n > 2$ và điều trên đã đúng cho mọi V có $\dim V < n$ và $d \nmid \dim V$. Theo giả thiết, φ_r có một giá trị riêng λ nào đó. Kí hiệu $W = \mathrm{Ker}(\varphi_r - \lambda\,\mathrm{id})$ và $Z = \mathrm{Im}(\varphi_r - \lambda\,\mathrm{id})$. Khi đó W, Z là các không gian con bất biến đối với φ_r. Chú ý rằng $\varphi_r - \lambda\,\mathrm{id}$ giao hoán với mọi φ_i, nên theo Bài 19.3, W, Z cũng là các không gian con bất biến của $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$.

Giả sử $W \neq V$. Vì $\dim W + \dim Z = \dim V = n$, nên hoặc d không chia

hết $\dim W$, hoặc d không chia hết $\dim Z$. Trong trường hợp đầu, với lưu ý rằng $\varphi_1|_W, \ldots, \varphi_r|_W$ giao hoán với nhau và vì $\dim V < n$, nên theo giả thiết qui nạp theo chiều không gian, chúng có chung véc tơ riêng $w \in W$. Véc tơ riêng này cũng là véc tơ riêng chung của $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Khi d không chia hết $\dim Z$ làm tương tự đối với các ánh xạ hạn chế trên Z.

Chỉ còn lại trường hợp $W = V$. Theo giả thiết qui nạp theo r, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$ có chung một véc tơ riêng $v \in V = W$. Nhưng khi này v cũng là véc tơ riêng của φ_r.

20.1 Với mọi $v \in U$ và $r \geq 0$, $\varphi^r(v) \in U$. Do đó $f(\varphi)(v) \in U$.

20.2 Kí hiệu các đa thức cực tiểu của V_1, V_2 và $V_1 \oplus V_2$ tương ứng là g_1, g_2, g. Theo Mệnh đề 20.4(iv), g_1, g_2 là các ước của g, nên g chia hết cho bội chung nhỏ nhất h của g_1 và g_2. Ngược lại, với mọi $v \in V_1 \oplus V_2$, ta có $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Theo Mệnh đề 20.4(ii), $h(\varphi|_{V_i}) = 0$. Do đó theo Mệnh đề 20.1(iii)

$$h(\varphi)(v) = h(\varphi)(v_1) + h(\varphi)(v_2) = h(\varphi|_{V_1})(v_1) + h(\varphi|_{V_2})(v_2) = 0.$$

Suy ra $h = g$ (theo Mệnh đề 20.4(ii)).

Đối với ma trận, ta có thể mở rộng ra không chỉ cho ma trận đường chéo khối, xem Bài 8.15.

20.3 Theo thuật toán, ta có

a) $g_\varphi(t) = -f_\varphi(t) = (t-1)^2(t-2)$.

b) $f_\varphi(t) = -(t-2)^2(t-3)$, $g_\varphi(t) = (t-2)(t-3)$.

20.4 Kết hợp thuật toán và Bài 20.2, ta có

$f_A(t) = -(t-3)^2(t-7)^3$, $g_A(t) = (t-3)^2(t-7)^2$,

$f_B(t) = -(t-4)^5$, $g_B(t) = (t-4)^3$.

20.5 Rõ ràng $H(d) \subseteq H(f) \cap H(g)$. Ngược lại, cho $v \in H(f) \cap H(g)$. Khi đó $f(\varphi)(v) = g(\varphi)(v) = 0$. Vì $d = pf + qg$, suy ra

$$d(\varphi)(v) = p(f(\varphi)(v)) + q(g(\varphi)(v)) = 0.$$

Đối với m ta chỉ cần chứng tỏ $H(m) \subseteq H(f) + H(g)$. Cho $v \in H(m)$. Khi đó $m(\varphi)(v) = 0$. Đặt $f_1 = f/d$ và $g_1 = g/d$. Hai đa thức này nguyên tố cùng nhau nên tồn tại $p, q \in K[t]$ sao cho $1 = pf_1 + qg_1$. Suy ra

$$v = \mathrm{id}(v) = pf_1(\varphi)(v) + qg_1(\varphi)(v).$$

Vì $m = df_1g_1$, ta dễ kiểm tra $pf_1(\varphi)(v) \in H(g)$ và $qg_1(\varphi)(v) \in H(f)$.

20.6 Nếu f, g_φ nguyên tố cùng nhau, thì có đa thức p, q để $pf+qg_\varphi = 1$. Từ đó $f(\varphi)$ khả nghịch, nên $H(f) = 0$. Ngược lại, nếu f, g_φ có ước chung khác đa thức hằng là d thì $H(d) \subseteq H(f)$. Ta chỉ cần chứng tỏ $H(d) \neq 0$. Nếu $H(d) = 0$ thì $d(\varphi)$ khả nghịch. Ta viết $g_\varphi = dg_1$. Từ $0 = g_\varphi(\varphi) = d(\varphi)g_1(\varphi)$ suy ra $g_1(\varphi) = 0$. Nhưng g_1 có bậc nhỏ hơn bậc của g_φ. Vô lí.

20.7 Ta có $|A - tI| = (a - t)^n$. Theo Mệnh đề 20.4(ii), $g_A = (t - a)^k$ với $k \leq n$. Chú ý rằng $A - aI$ là ma trận toàn 0 trừ đường chéo con nằm ngay phía trên đường chéo chính. Qui nạp theo r ta dễ thấy $(A - aI)^r$ gồm toàn 0 trừ đường chéo con thứ $r+1$ nằm phía trên đường chéo chính có các phần tử khác 0, cụ thể là $a_{i(i+r)} \neq 0$ với mọi $1 \leq i \leq n - r$. Nói riêng $(A - aI)^{n-1}$ có $a_{1n} \neq 0$, nên nó khác 0. Do đó $g_A = (t - a)^n$.

20.8 Sử dụng Bài 20.2.

a) Sử dụng thêm Ví dụ 20.1(a): $g_A(t) = (t - a_1) \cdots (t - a_r)$.

b) Sử dụng thêm Bài 20.7: $g_A(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_r)^{m_r}$.

20.9 Giả sử $v \neq 0$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của φ. Khi đó $0 = g_\varphi(\varphi)(v) = g_\varphi(\lambda)v$.

20.10 Với mọi đa thức $g \in K[t]$ ta có $g(A^T) = (g(A))^T$.

20.11 Sử dụng tính chất f chia hết cho g_φ.

20.12 Khi mở rộng K thành bao đóng đại số $\bar{K}$, ta kí hiệu toán tử tuyến tính mới nhận được từ φ là $\bar{\varphi}$. Để cho tiện lợi, ta kí hiệu gọn đa thức cực tiểu của φ là $g \in K[t]$ và đa thức cực tiểu của $\bar{\varphi}$ là $\bar{g} \in \bar{K}[t]$. Thế thì $g(\bar{\varphi}) = 0$ (vì φ và $\bar{\varphi}$ có cùng ma trận biểu diễn). Do đó $\bar{g} \mid g$. Cho

$$f_\varphi(t) = f_{\bar{\varphi}}(t) = (-1)^n(t - \alpha_1)^{p_1} \cdots (t - \alpha_r)^{p_r},$$

trong đó $\alpha_1, ..., \alpha_n$ đôi một khác nhau và $p_1, ..., p_r \geq 1$. Khi đó theo Bài 20.9,

$$\bar{g} = (t - \alpha_1)^{q_1} \cdots (t - \alpha_r)^{q_r},$$

trong đó $q_1, ..., q_r \geq 1$. Rõ ràng từ đó suy ra f_φ chia hết $\bar{g}^n$, và do đó chia hết g^n.

Lấy ví dụ $\varphi = \mathrm{id}$ có thể thấy không thể giảm được n.

20.13 Giả sử

$$g_\varphi(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_{m-1}t^{m-1} + t^m.$$

Vì φ khả nghịch, từ tính tối tiểu của g_φ suy ra $c_0 \neq 0$. Do $g_\varphi(\varphi) = 0$, nên

$$\varphi[c_1 \,\mathrm{id} + \cdots + c_{m-1}\varphi^{m-2} + \varphi^{m-1}] = -c_0 \,\mathrm{id}\,.$$

Từ đó $\varphi^{-1} = -[c_1 \,\mathrm{id} + \cdots + c_{m-1}\varphi^{m-2} + \varphi^{m-1}]/c_0$.

20.14 Cho $g(t) \in K[t]$ và $g'(t) \in F[t]$ lần lượt là đa thức cực tiểu của A và $\hat{A}$. Do $g(\hat{A}) = g(A) = 0$, nên $g(t)$ chia hết cho $g'(t)$. Ta sẽ chứng tỏ $g(t)$ chia hết $g'(t)$.

Do $g'(t)$ là đa thức trên trường mở rộng F của K, nên ta có thể viết

$$g'(t) = f_1(t)b_1 + \cdots + f_m(t)b_m,$$

trong đó $f_1(t), ..., f_m(t) \in K[t]$ và $b_1, ..., b_m \in F$ độc lập tuyến tính trên K. Ta có

$$g'(A) = f_1(A)b_1 + \cdots + f_m(A)b_m = 0.$$

Chú ý rằng các phần tử của các ma trận $f_1(A), ..., f_m(A)$ thuộc K. So sánh các phần tử trên mỗi vị trí của (i, j) của ma trận hai bên, và lưu ý tính độc lập tuyến tính của $b_1, ..., b_m$, ta suy ra $f_1(A) = \cdots = f_m(A) = 0$. Do tính cực tiểu của $g(t)$ suy ra $g(t)$ chia hết $f_1(t), ..., f_m(t)$. Vì vậy $g(t)$ chia hết $g'(t)$.

20.15 Điều kiện cần dễ thấy (suy ra ngay từ Bài 20.2 và Ví dụ 20.1(a)). Điều kiện đủ suy ra từ Định lí 20.9 với lưu ý $H(t - \alpha_i)$ trùng với không gian riêng ứng với giá trị riêng α_i.

20.16 Ta thấy $f(t) = t^k - 1$ nhận φ làm nghiệm. Do đó đa thức cực tiểu $g_\varphi(t)$ chia hết đa thức này. Tuy nhiên $f(t)$ có k nghiệm phân biệt trên $\mathbb{C}$. Suy ra $g_\varphi(t)$ cũng có tính chất đó. Bây giờ sử dụng Bài 20.15.

20.17 Suy ra từ Mệnh đề 20.4(iv). Ví dụ: xem Bài 20.7.

20.18 Kí hiệu f' là đạo hàm của đa thức f. Gọi d là ước chung lớn nhất của f và f'. Đa thức d có thể tìm được theo thuật toán Ơclit. Khi đó dễ thấy

$$f_{red} = f/a_0 d.$$

Kí hiệu $G_1 = g_{11} \cdots g_{1m_1}, ..., G_r = g_{r1} \cdots g_{rm_r}$. Để cho tiện phát biểu quá trình truy chứng, ta đặt $R_1 = f_{red}$ và $f_1 = f$. Khi đó p_1 là số p bé nhất sao cho R_1^p chia hết cho f_1. Sau khi xác định được p_1, ta đặt $F_2 = f_{red}^{p_1}/f$ và $R_2 = (F_2)_{red}$. Khi đó ta tìm được

$$G_1 = R_1/R_2.$$

Hơn nữa lũy thừa của G_1 trong f chính là p_1. Bây giờ áp dụng qui trình trên cho $f_2 = f_1/G_1^{p_1}$ và R_2, ta sẽ tìm được G_2, R_3 và f_3. Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi nhận được $r+1$ mà $R_{r+1} = 1$.

20.19 Kí hiệu đa thức đặc trưng là f và f_{red} được xác định như Bài 20.18.

Nếu cấp $n = 3$, ta xét ba trường hợp. Nếu $f_{red}(t) = t - \lambda$ thì $f(t) = -(t-\lambda)^3$, và có thể sử dụng thuật toán tìm đa thức cực tiểu sau Mệnh đề 20.4. Nếu $\deg(f_{red}) = 3$ thì $g_A = -f$. Nếu $\deg(f_{red}) = 2$, thì $g = f_{red}$ khi $f_{red}(A) = 0$ và $g = -f$ trong trường hợp còn lại.

Nếu $n = 4$, thì trường hợp f_{red} có bậc 1 hoặc 3, 4 giải tương tự như trên. Nếu f_{red} có bậc 2 thì hoặc f bất khả qui, và khi đó $f = f_{red}^2$, hoặc $f_{red} = g_1 g_2$ với $g_1 \neq g_2$ là những nhị thức bậc nhất có hệ số đầu là 1. Khi đó ta có thể xác định dễ dàng a, b để $f = g_1^a g_2^b$ rồi sử dụng thuật toán tìm đa thức cực tiểu.

Nếu $n = 5$, thì trường hợp f_{red} có bậc 1 hoặc 4, 5 được giải tương tự như $n = 3$. Nếu f_{red} có bậc 2 thì $f_{red} = g_1 g_2$ với $g_1 \neq g_2$ là những nhị thức bậc nhất có hệ số đầu là 1, và ta giải như $n = 4$. Nếu f_{red} có bậc 3 thì có hai trường hợp:

- Hoặc $g = f/f_{red}$ bất khả qui, hoặc là tích của hai nhị thức đơn khác nhau. Khi đó $f = g^2(f_{red}/g)$.
- Hoặc $g = (t-\lambda)^2$. Khi đó $f = g^3.(f_{red}/(t-\lambda))$.

Bây giờ sử dụng thuật toán tìm đa thức cực tiểu.

20.20 Có thể giả thiết $A \neq 0$. Lần lượt cho $k = 1, 2, ...$ rồi giải hệ phương trình tuyến tính

$$x_0 I + x_1 A + \cdots + x_{k-1} A^{k-1} + A^k = 0.$$

Khi nào gặp hệ phương trình đầu tiên có nghiệm thì ta dừng. Lúc đó hệ có nghiệm duy nhất dạng $(c_0, ..., c_{k-1})$ và ta được đa thức cực tiểu là

$$g(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{k-1} t^{k-1} + t^k.$$

Quá trình tính toán này tối đa đến $k = n$. Nếu đặc số của trường K bằng 0, chỉ cần bắt đầu từ $\deg(f_{red})$ được xác định như Bài 20.18.

20.21 Cho $g_A(t) = f(t)h(t)$. Nếu $f(A)$ khả nghịch sẽ dẫn đến $h(A) = 0$.

20.22 Nếu không thì có $r(t), s(t) \in K[t]$, để $r(t)p(t) + s(t)g_A(t) = 1$. Từ đó $p(A)r(A) = I$.

21.1 Suy ra từ điều $Z(v)$ là không gian con bất biến bé nhất chứa v.

21.2 Cho φ là toán tử tuyến tính của K^n nhận A làm ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên. Khi đó

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= e_2,\\
\varphi^2(e_1) &= \varphi(e_2) = e_3,\\
&\dots\\
\varphi^{n-1}(e_1) &= \varphi(e_{n-1}) = e_n,\\
\varphi^n(e_1) &= \varphi(e_n) = -c_0e_1 - c_1e_2 - \cdots - c_{n-1}e_n.
\end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ K^n là không gian xích của φ sinh bởi e_1. Do đó $g_\varphi(t)$ có bậc bằng $\dim K^n = n$ (Bổ đề 21.2). Vì $f(\varphi)(e_1) = 0$, và là đa thức đơn, nên lại theo Bổ đề 21.2, ta có $g_\varphi(t) = f(t)$.

21.3 a) Với $K = \mathbb{R}$, $g = (t-\alpha)^n$ hoặc $g = (t^2 + at + b)^{n/2}$ nếu n chẵn và $a^2 < 4b$. Với $K = \mathbb{C}$, $g = (t-\alpha)^n$.

b) Suy ra ngay từ Định lí 21.3 , hoặc có thể chứng minh trực tiếp như sau. Giả sử $g_\varphi = g^k$ với $g \in K[t]$ bất khả qui. Vì $g^{k-1}(\varphi) \neq 0$, nên tồn tại $v \in V$ để $g^{k-1}(\varphi)(v) \neq 0$. Do không gian xích $Z(v)$ là không gian con bất biến nên đa thức cực tiểu của nó là ước của g_φ (Mệnh đề 20.4(iv)). Vì $g^{k-1}(\varphi)(v) \neq 0$ và từ tính bất khả qui của g, ta suy ra đa thức cực tiểu của $Z(v)$ là g^k. Từ đó $\dim Z(v) \geq \deg g_{Z(v)} = \deg(g_\varphi) = n$. Do đó $V = Z(v)$.

Nếu V không bất khả qui, theo Bài 20.2 và Mệnh đề 20.4(iv), ta sẽ suy ra ngay đa thức cực tiểu g_φ có bậc nhỏ hơn hẳn n.

21.4 a) Với mọi $f \in K[t]$, $h(\varphi)(f(\varphi)(v)) = f(\varphi)(h(\varphi)(v))$, nên

$$h(\varphi)(Z(v)) = Z((h(\varphi)(v)).$$

b) Giả sử $g = g_1d$ và $h = h_1d$. Ta tìm được $p, q \in K[t]$ sao cho $1 = pg_1 + qh_1$. Gọi g_2 là đa thức cực tiểu của $h(\varphi)(Z(v))$. Khi đó

$$(g_2h)(\varphi)(v) = g_2(\varphi)(h(\varphi)(v)) = 0.$$

Theo Bổ đề 21.2(i), $g \mid g_2h$. Từ đó $g_1 \mid g_2$. Mặt khác,

$$g_1(\varphi)(h(\varphi)(v)) = (g_1dh_1)(\varphi)(v) = h_1(\varphi)(g(\varphi)(v)) = 0,$$

nên lại theo Bổ đề 21.2(i), $g_2 \mid g_1$. Suy ra $g_1 = g_2$.

c) Nếu g, h nguyên tố cùng nhau, thì theo b), đa thức cực tiểu của $h(\varphi)(Z(v))$ là g. Theo câu a) và Bổ đề 21.2(ii), ta có

$$\dim h(\varphi)(Z(v)) = \deg g = \dim Z(v).$$

Suy ra $Z(v) = h(\varphi)(Z(v))$.

21.5 Gọi đa thức cực tiểu của hai không gian xích $Z(u)$ và $Z(v)$ là f, g. Giao $Z(u) \cap Z(v)$ có đa thức cực tiểu là ước chung của f và g, nên nó là 1. Do đó giao này bằng 0. Đặt $w = u + v$, và lấy $p, q \in K[t]$ sao cho $pf + qg = 1$. Khi đó

$$v = p(\varphi)f(\varphi)(v) = p(\varphi)f(\varphi)(w - u) = p(\varphi)f(\varphi)(w) \in Z(w),$$

và

$$u = p(\varphi)g(\varphi)(u) = p(\varphi)g(\varphi)(w - v) = p(\varphi)g(\varphi)(w) \in Z(w).$$

Cho nên $Z(u) \oplus Z(v) \subseteq Z(w)$. Bao hàm thức ngược lại dễ thấy.

21.6 Điều kiện cần suy ra từ Bổ đề 21.2(ii). Giả sử ngược lại $\deg(g_U) = \dim U$. Giả sử $g_U = g_1^{p_1} \cdots g_r^{p_r}$ với $g_1, ..., g_r$ là những đa thức bất khả qui và $p_1, ..., p_r \geq 1$. Theo Định lí 20.9

$$U = H(g_1^{p_1}) \oplus \cdots \oplus H(g_r^{p_r}),$$

và đa thức cực tiểu của $H(g_i^{p_i})$ là $g_i^{p_i}$, $i = 1, ..., r$. Từ đó suy ra $\dim H(g_i^{p_i}) = \deg(g_i^{p_i})$ và $H(g_1^{p_1}) = Z(v_i)$ nào đó (xem Bài 21.3). Để kết thúc chứng minh, bây giờ ta có thể sử dụng qui nạp theo r và Bài 21.5.

21.7 Không mất tính tổng quát, cho $V = Z(v)$ và $U \subseteq V$ là một không gian con bất biến. Nếu $U = 0$ thì $U = Z(0)$. Giả sử $U \neq 0$. Trong số các phần tử khác 0 của U (luôn có dạng $f(\varphi)(v)$), chọn một phần tử $u = g(\varphi)(v)$ sao cho đa thức g có bậc bé nhất. Lấy một phần tử $w = f(\varphi)(v) \in U$ tùy ý. Ta có $f = pg + q$ với $q = 0$ hoặc $\deg(q) < \deg(g)$. Khi đó $q(\varphi)(v) = w - p(\varphi)(u) \in U$. Suy ra $q = 0$ và $w \in Z(u)$. Vậy $U = Z(u)$.

21.8 Điều kiện cần: nếu $V = Z(v)$ mà $v_1 = v$, $v_2 = \varphi(v)$, $v_3 = \varphi(v_2) = \varphi^2(v), ..., v_n = \varphi(v_{n-1}) = \varphi^{n-1}(v)$ phụ thuộc tuyến tính thì $\dim V < n$. Vô lí. Vậy chúng độc lập tuyến tính và do đó là cơ sở.

Điều kiện đủ: sẽ có $V = Z(v_1)$.

Nếu viết đa thức cực tiểu

$$g_\varphi(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0,$$

thì

$$\varphi(e_n) = -c_0 e_1 - c_1 e_2 - \cdots - c_{n-1} e_n.$$

Do đó φ có ma trận biểu diễn như Bài 21.2.

21.9 Vì $y \in Z(y) = Z(x)$, nên $y = f(\varphi)(x)$. Vậy ngay từ đầu ta có thể giả thiết $y = f(\varphi)(x)$. Bây giờ có thể xem Bài 21.4 (với lời giải gọn hơn).

21.10 Mọi đa thức cực tiểu của các thành phần đều có dạng g^k, $k \leq p$. Bây giờ áp dụng Bài 20.2.

21.11 Điều kiện cần: U bất khả qui. Định lí 20.9 kéo theo b) và Định lí 21.3 kéo theo a).

Điều kiện đủ: Cho $g_\varphi = g^p$ là đa thức cực tiểu của U, g bất khả qui. Theo Bổ đề 21.2 thì $\deg(g_\varphi) = \dim U$, tức là g_φ trùng với đa thức đặc trưng. Nếu U không bất khả qui, thì vì đa thức cực tiểu của các thành phần đều có dạng g^k, $k \leq p$, nên theo Bài 20.2, nó có đa thức cực tiểu có bậc nhỏ hơn hẳn $\dim U$. Vô lí.

21.12 Suy ra từ Định lí 21.4.

Có thể giải cách khác như sau: tương tự như cách giải Bài 19.10, mỗi không gian con bất biến là một không gian xích $Z(v)$ có đa thức cực tiểu dạng $(t - \lambda)^k$ và chỉ chứa đúng một véc tơ riêng (với sai khác đến hệ số vô hướng). Các véc tơ riêng thuộc các thành phần khác nhau lại độc lập tuyến tính và lập nên cơ sở của không gian riêng ứng với λ. Hơn nữa đa thức cực tiểu trên mỗi thành phần như vậy bằng đa thức đặc trưng, và λ không thể là giá trị riêng ở các thành phần loại khác, nên tích của các đa thức cực tiểu dạng $(t - \lambda)^k$ đúng bằng $(t - \lambda)^n$.

21.13 Hệ quả trực tiếp của các Bài 21.11 và 21.7.

21.14 Giả sử $g_\varphi = g_1^{p_1} \cdots g_r^{p_r}$. Theo Định lí 20.9

$$V = H(g_1^{p_1}) \oplus \cdots \oplus H(g_r^{p_r}).$$

Hơn nữa, đây là các không gian con bất biến không tầm thường. Điều kiện đủ: nếu số thành phần bất khả qui bằng r thì các không gian con trên phải bất khả qui. Do đó chúng là không gian xích. Theo Bài 21.5, V là không gian xích.

Ngược lại, nếu V là không gian xích thì theo Bổ đề 21.2(ii), $\dim V = \deg(g_\varphi)$. Từ đó suy ra $\dim H(g_i^{p_i}) = \deg(g_i^{p_i})$. Do $g_i^{p_i}$ lại là đa thức cực tiểu của không gian con này, nên theo Bài 21.3, các không gian con này bất khả qui. Vậy số thành phần trong khai triển trên đúng bằng r. Theo Định lí 21.4, số thành phần bất khả qui chiều r không phụ thuộc vào một phân tích cụ thể nào, nên ta có điều khẳng định trong bài.

22.1 $f_A(t) = -(t+1)^3$ và $g_A(t) = (t+1)^2$, nên A có một khối Jordan liên kết với $(t+1)^2$ và một khối liên kết với $t+1$.

$f_B(t) = -(t+3)^3$ và $g_B(t) = (t+3)^2$.

22.2 a) $f_A(t) = -(t-3)^3$ và $g_A(t) = (t-3)^3$ nên trên $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ dạng chuẩn tắc Jordan của A đều là

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $f_B(t) = (t^2+1)^2$. Trên $\mathbb{R}$, $B^2 + I \neq 0$, nên $g_B(t) = f_B(t) = (t^2+1)^2$. Vì đa thức cực tiểu không phụ thuộc vào việc mở rộng trường, nên điều này cũng đúng cho $\mathbb{C}$. Do vậy các dạng chuẩn tắc Jordan tương ứng là

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

22.3 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

22.4 Cả hai ma trận có đa thức đặc trưng là $(1-t)^n$. Dễ chứng minh rằng đa thức cực tiểu của cả hai ma trận cũng bằng $(t-1)^n$ (xem Bài 20.7). Do đó chúng có chung dạng chuẩn tắc Jordan, thậm chí trên mọi trường số. Suy ra chúng luôn đồng dạng với nhau.

22.5 Cả ba ma trận có đa thức đặc trưng là $(1-t)^3$. A và C cùng có đa thức cực tiểu là $(t-1)^2$, còn B có đa thức cực tiểu là $(t-1)^3$. Do đó $A \approx C$ và không đồng dạng với B.

22.6 a) Trên $\mathbb{R}$: kí hiệu J_1, J_2, J_3 lần lượt là các khối Jordan liên kết với $t+1$, $(t+1)^2$, (t^2+2) (có các cấp lần lượt là $1, 2, 2$). Khi đó dạng chuẩn tắc Jordan có các khả năng sau

$$\operatorname{diag}(J_2, J_2, J_3),\ \operatorname{diag}(J_2, J_3, J_3),\ \operatorname{diag}(J_1, J_1, J_2, J_3).$$

b) Trên $\mathbb{C}$: kí hiệu J_1, J_2, J_3, J_4 lần lượt là các khối Jordan liên kết với $t+1$, $(t+1)^2$, $t+\sqrt{2}i$, $t-\sqrt{2}i$. Khi đó dạng chuẩn tắc Jordan có các khả

năng sau

$\operatorname{diag}(J_2, J_2, J_3, J_4)$, $\operatorname{diag}(J_1, J_1, J_2, J_3, J_4)$, $\operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3, J_3, J_4)$,
$\operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3, J_4, J_4)$, $\operatorname{diag}(J_2, J_3, J_3, J_3, J_4)$, $\operatorname{diag}(J_2, J_3, J_3, J_4, J_4)$,
$\operatorname{diag}(J_2, J_3, J_4, J_4, J_4)$.

22.7 Nếu đa thức cực tiểu g là bậc nhất thì cả hai ma trận có cùng dạng chuẩn tắc Jordan là ma trận đường chéo dạng αE. Nếu g có bậc 3, thì cả hai có cùng dạng chuẩn tắc Jordan. Nếu g có bậc 2, thì g không thể là bất khả qui (vì khi đó $f = g^2$), nên $g = (t+\alpha)(t+\beta)$. Nếu $\alpha \neq \beta$ thì dạng chuẩn tắc Jordan của cả hai ma trận là ma trận đường chéo, và vì chúng có cùng đa thức đặc trưng nên phải bằng nhau. Nếu $g = (t+\alpha)^2$ thì cả hai lại có cùng dạng chuẩn tắc Jordan.

Phản ví dụ: hãy xét cặp $\operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$ và $\operatorname{diag}(\alpha, \beta, \beta)$, và cặp $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22.8 Không. Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

22.9 Hai ma trận này có cùng đa thức đặc trưng và đa thức cực tiểu (xem Bài 20.10). Mặt khác, với mọi đa thức $f \in K[t]$, $f(A^T) = (f(A))^T$ và với mọi B đều có $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(B^T)$, nên $\operatorname{rank} g_i^k(A) = \operatorname{rank} g_i^k(A^T)$ với mọi i, k. Vì vậy, theo Định lí 22.6, chúng có cùng dạng chuẩn tắc Jordan.

22.10 Chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Hai ma trận A, B này có cùng đa thức cực tiểu g. Cho g_i là một nhân tử bất khả qui (trên K) tùy ý của g. Theo Định lí 22.6, $\operatorname{rank} g_i^k(A) = \operatorname{rank} g_i^k(B)$ xét trên trường F. Nhưng hạng của ma trận không thay đổi khi mở rộng trường, nên điều đó vẫn đúng trên K. Sử dụng Định lí 22.6 cho K, ta thấy cả hai ma trận có cùng dạng chuẩn tắc Jordan trên K.

22.11 Cho φ là toán tử tuyến tính nhận ma trận A cho trước làm ma trận biểu diễn. Khi đó V phân tích được thành tổng trực tiếp của các không gian con xích $V_i = Z(v_i)$. Nếu g_i là đa thức cực tiểu của không

gian xích này và $\deg(g_i) = m_i$, thì ma trận biểu diễn của $\varphi|_{V_i}$ theo cơ sở $v_i, \varphi(v_i), ..., \varphi^{m_i-1}(v_i)$ chính là các ma trận đồng hành nêu trong bài.

22.12 Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết K là trường đóng đại số và A là ma trận Jordan. Khi đó một khối Jordan J là một ma trận tam giác dưới với λ trên đường chéo, trong đó λ là một giá trị riêng của A (xem Ví dụ 22.1(i)). Bây giờ hãy kiểm tra $g(A)$ là ma trận khối, có ma trận tương ứng với J là ma trận tam giác dưới với các phần tử trên đường chéo chính bằng $g(\lambda)$. Nhận xét thêm rằng số bội của $g(\lambda)$ trong đa thức đặc trưng chính là số lần xuất hiện của nó trên đường chéo chính của $g(A)$.

22.13 Dễ kiểm tra

$$A = J^2_{(t-\alpha)^n} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\alpha & \alpha^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 2\alpha & \alpha^2 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ * & * & * & \cdots & 2\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận này có đa thức đặc trưng $f_A(t) = (\alpha^2 - t)^n$. Theo phương pháp Bài 20.7, ta có $g_A(t) = (t - \alpha^2)^n$. Do đó dạng chuẩn tắc Jordan của A là khối Jordan liên kết với $(t - \alpha^2)^n$.

22.14 Để cho tiện, ta đặt

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bằng qui nạp ta dễ dàng chứng tỏ với mọi $k < n$, thì

$$J_n^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó số 1 ở cột đầu đứng ở hàng thứ $k+1$, và $J_n^k = 0$ nếu $k \geq n$. Như vậy $\operatorname{rank}(J_n^k) = n - k$ nếu $1 \leq k \leq n$.

Từ đó suy ra đa thức đặc trưng của J_n^2 là t^n. Vì đa thức cực tiểu của J_n^2 là ước của t^n, từ nhận xét trên, ta thấy nó phải bằng $t^{[(n+1)/2]}$. Xét hai trường hợp

* $n = 2k$. Theo Định lí 22.6, số các khối Jordan liên kết với t^k, tức là số các ma trận Jordan J_k, trong dạng chuẩn tắc Jordan của J_n^2 là

$$\operatorname{rank}(J_n^2)^{k-1} - 2\operatorname{rank}(J_n^2)^k + \operatorname{rank}(J_n^2)^{k+1} = n - (2k-2) = 2.$$

Mà cấp của J_k đúng bằng k, nên dạng chuẩn tắc Jordan của J_n^2 là $\operatorname{diag}(J_k, J_k)$.

* $n = 2k+1$. Lại theo Định lí 22.6, số các ma trận Jordan J_k trong dạng chuẩn tắc Jordan của J_n^2 là

$$\operatorname{rank}(J_n^2)^{k-1} - 2\operatorname{rank}(J_n^2)^k + \operatorname{rank}(J_n^2)^{k+1} = [n-(2k-2)] - 2(n-2k) = 1.$$

Ngoài ra đương nhiên dạng chuẩn tắc Jordan của J_n^2 phải có một khối là J_{k+1} tương ứng với đa thức cực tiểu. Vậy dạng chuẩn tắc Jordan của J_n^2 là $\operatorname{diag}(J_k, J_{k+1})$.

Theo cách làm này, ta có thể tính được dạng chuẩn tắc Jordan của J_n^k tùy ý, nhưng tính toán sẽ cồng kềnh lên nhiều khi k tăng.

22.15 Gọi ma trận cơ sở là A. A có đa thức đặc trưng là $(1-t)^3$ và đa thức cực tiểu là $(t-1)^2$. Từ đó có thể đưa A về dạng chuẩn tắc Jordan J và tính J^{2004}. Tìm ma trận P để $A = P^{-1}JP$. Bây giờ tính ngược trở lại $A^{2004} = P^{-1}J^{2004}P$.

Cách khác (tránh được việc tính P): Tìm a, b để có đa thức $p(t)$ thỏa mãn

$$t^{2004} = (t-1)^2 p(t) + at + b.$$

Cho $t = 1$ ta tìm được $a+b = 1$, sau đó lấy đạo hàm, ta tìm được $a = 2004$. Từ đó

$$A^{2004} = 2004A - 2003I.$$

22.16 Gọi ma trận cơ sở là A. A có đa thức đặc trưng là $t^2(1-t)$ (đa thức cực tiểu là $t^2(t-1)$). Như vậy $A^n = A^2$ với mọi $n \geq 2$. Từ đó $f(A) = 6A^2 - A$.

22.17 Đặt $B = f_{red}(A)$. Khi đó $B^n = f_{red}^n(A) = 0$ (n là cấp của A), nên đa thức cực tiểu của B là ước của t^n. Giả sử nó là t^s. Khi đó dạng chuẩn tắc Jordan của B có ít nhất một khối Jordan J liên kết với t^s. Từ đó $r = \operatorname{rank}(B) \geq \operatorname{rank}(J) = s - 1$. Suy ra $B^{r+1} = 0$. Từ đó g chia hết f_{red}^{r+1}.

Lời giải, chỉ dẫn chương 7

23.1 Ta dễ dàng kiểm tra các điều kiện (i)-(iii) của Định nghĩa 23.1 đối với tích trong bài. Ta lại có

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\\ &= \tfrac{1}{2}[(x_1+x_2+x_3)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2]\geq 0\end{aligned}$$

và bằng 0 khi và chỉ khi $x=0$. Vậy đây là tích vô hướng.

Để xây dựng một cơ sở trực chuẩn, ta sử dụng phương pháp Gram-Schmidt xuất phát từ cơ sở tự nhiên: e_1,e_2,e_3. Ta có $u_1=e_1$, $u_2=e_2-\alpha e_1$, trong đó $\alpha=\langle e_2,u_1\rangle/\langle u_1,u_1\rangle=1$. Do đó

$$u_2=e_2-e_1=(-1,1,0);\quad |\,u_2\,|=1.$$

Tương tự

$$u_3=e_3-\beta u_1-\gamma u_2,$$

trong đó

$$\beta=\langle e_3,u_1\rangle/\langle u_1,u_1\rangle=1,\quad \gamma=\langle e_3,u_2\rangle/\langle u_2,u_2\rangle=0.$$

Suy ra

$$u_3=e_3-e_1=(-1,0,1);\quad |\,u_3\,|=1.$$

Vậy $(1,0,0)$, $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ là một cơ sở trực chuẩn.

23.2 Sử dụng phương pháp Gram-Schmidt, ta được một cơ sở trực chuẩn là

$$f_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}},0),\ f_2=(\frac{1+2i}{\sqrt{18}},\frac{2-i}{\sqrt{18}},\frac{2-2i}{\sqrt{18}}).$$

23.3 Gọi cơ sở của V là $e_1,...,e_n$. Khi đó $\alpha_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle$.

23.4 Ta cần kiểm tra điều kiện $\langle x,x\rangle>0$. Từ đó suy ra $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ và $\alpha>0,\ \beta>0,\alpha\beta-\gamma^2>0$. Xem thêm Bài 28.13.

23.5 Cho $x=y=e_1,e_2$ ta có α,β là những số thực dương. Từ điều kiện $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$, ta suy ra $\gamma_2=\overline{\gamma}_1$. Bây giờ ta giả sử $x=(u_1+iu_2,v_1+iv_2)$ và $\gamma_1=c_1+ic_2$. Khi đó

$$\langle x,x\rangle=\alpha(u_1^2+u_2^2)+\beta(v_1^2+v_2^2)+2c_1(u_1v_1+u_2v_2)+2c_2(u_1v_2-u_2v_1).$$

Điều kiện cần và đủ để $\langle x, x\rangle > 0$ khi $x \neq 0$ là dạng toàn phương thực trên (của các biến u_1, u_2, v_1, v_2) phải xác định dương. Theo Định lí Sylvester 28.6 ta có thêm điều kiện $\alpha\beta - \gamma_1\gamma_2 > 0$.

23.6 Dùng định nghĩa về chuẩn của một véc tơ.

23.7 Điều kiện đủ là dễ thấy. Ta sẽ chứng minh điều kiện cần cho không gian unita (vì chứng minh đó sẽ đúng cho cả trường hợp không gian Oclit).

Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle \\ &= \langle \alpha x, \alpha x\rangle + \langle \beta y, \beta y\rangle + \langle \alpha x, \beta y\rangle + \langle \beta y, \alpha x\rangle \\ &= \alpha\bar{\alpha}\langle x, x\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle y, x\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle x, y\rangle + \beta\bar{\beta}\langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

Bây giờ thay

$$\alpha = \langle y, y\rangle = |\, y \,|^2 \in \mathbb{R}, \quad \beta = -\langle x, y\rangle,$$

ta được

$$|\, y \,|^4 |\, x \,|^2 - 2\,|\, y \,|^2\, \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} + |\, y \,|^2\, \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} \geq 0.$$

Nhưng $\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} = |\, \langle x, y\rangle \,|^2$, nên

$$|\, y \,|^2 |\, \langle x, y\rangle \,|^2 \leq |\, y \,|^4 |\, x \,|^2 .$$

Khi $y = 0$ bài toán đã được chứng minh. Khi $y \neq 0$ từ bất đẳng thức trên ta suy ra bất đẳng thức $|\, \langle x, y\rangle \,| \leq |\, x \,|\, |\, y \,|$. Nếu dấu bằng xảy ra thì ta phải có $\alpha x + \beta y = 0$ (với α, β đã chọn như trên). Từ đó suy ra x, y là phụ thuộc tuyến tính.

23.8 Ta có

$$\begin{aligned} \langle x, Ay\rangle &= \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \overline{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j} = \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^n \overline{a_{ij} y_j}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \overline{a_{ij}} x_i)\overline{y_j} = \langle A^* x, y\rangle. \end{aligned}$$

23.9 Sử dụng phương pháp Gram-Schmidt đối với $1, t, t^2$, ta được

$$f_1 = 1, \ f_2 = (2t - 1)/\sqrt{3}, \ f_3 = (6t^2 - 6t + 1)/\sqrt{5}.$$

23.10 Điều kiện cần được suy ra từ định nghĩa. Để chứng tỏ điều kiện đủ, chỉ cần lưu ý

$$\langle \sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j\rangle = \sum \alpha_i \beta_j \langle u_i, v_j\rangle.$$

23.11 Giả sử có một quan hệ tuyến tính giữa các phần tử của S:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0,$$

trong đó $v_1, ..., v_n \in S$. Khi đó

$$0 = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle.$$

Do $v_i \neq 0$, ta có $\langle v_i, v_i \rangle = 0$. Suy ra $\alpha_i = 0$.

23.12 Ta chỉ cần chứng tỏ $v_1, ..., v_n$ là hệ sinh. Đặt $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$. Khi đó từ giả thiết ta sẽ có

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - v, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - v \rangle = 0.$$

Suy ra $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

23.13 Nếu gọi véc tơ của hai cạnh bên là u, v, thì ta phải chứng minh

$$| u + v |^2 + | u - v |^2 = 2(| u |^2 + | v |^2).$$

Điều này dễ dàng suy ra từ

$$| u \pm v |^2 = | u |^2 \pm 2\langle u, v \rangle + | v |^2 .$$

23.14 Gọi chiều của toàn không gian là n. Khi đó

$$\dim V_1^{\perp} + \dim V_2 = n - \dim V_1 + \dim V_2 > n.$$

Theo định lí về chiều giao suy ra $V_1^{\perp} \cap V_2 \neq \emptyset$.

23.15 Xét không gian l_2 các chuỗi số thực hội tụ bình phương (xem Ví dụ 23.1(ii)) và không gian con V sinh bởi tất cả các véc tơ dạng $(0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (có một thành phần là 1, còn lại là 0). Khi đó ta dễ dàng kiểm tra $V \neq l_2$, nhưng $V^{\perp} = 0$.

23.16 Xét không gian l_2 và hệ trực chuẩn

$$S = \{e_1 = (1, 0, 0, ...),\ e_2 = (0, 1, 0, ...), ...\}.$$

Dễ kiểm tra đây là hệ trực chuẩn cực đại, nhưng không là cơ sở.

Giả sử tồn tại một cơ sở trực chuẩn T. Vì mỗi e_i biểu diễn tuyến tính được qua T, nên tồn tại tập con $T' \subseteq T$ đếm được sao cho S biểu diễn tuyến tính qua nó. Kí hiệu $V = E(T') \supseteq E(S)$. Theo Bài 23.15,

$V^\perp = 0$. Vì $T \setminus T' \subseteq V^{perrp}$, nên ta phải có $T = T'$. Như vậy T đếm được: $T = \{f_1, f_2, ...\}$. Dễ thấy

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n \in l_2,$$

nhưng không biểu diễn tuyến tính qua T. Vậy T không là cơ sở, vô lí.

23.17 Kiểm tra trực tiếp theo định nghĩa. Trong bài này ta không cần giả thiết không gian có chiều hữu hạn.

23.18 Theo Bài 23.17 ta có

$$(V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp \cap V_2^\perp \quad \text{và} \quad (V_1 \cap V_2)^\perp \supseteq V_1^\perp + V_2^\perp.$$

Theo định nghĩa ta có thể trực tiếp kiểm tra $(V_1 + V_2)^\perp \supseteq V_1^\perp \cap V_2^\perp$, mà không cần điều kiện về chiều của không gian ban đầu. Khi không gian có chiều hữu hạn, áp dụng Hệ quả 23.10, định lí về chiều giao và đẳng thức $(V_1+V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$, ta có thể chứng tỏ $\dim(V_1^\perp + V_2^\perp) = \dim((V_1 \cap V_2)^\perp)$. Do đó

$$(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp.$$

23.19 Ta sẽ chứng tỏ $V^\perp$ sinh bởi các véc tơ dòng hệ số của các phương trình thuần nhất trong hệ. Thật vậy, nếu ta kí hiệu không gian con sau là U, thì từ định nghĩa suy ra $U \subseteq V^\perp$. Kí hiệu ma trận hệ số là A. Khi đó $\dim U = \operatorname{rank} A = n - \dim V = \dim V^\perp$. Do đó $U = V^\perp$.

23.20 Từ công thức $\operatorname{Tr}(AB^T) = \sum a_{ij}b_{ij}$, ta dễ dàng kiểm tra nó là không gian Oclit.

Không gian con bù trực giao của các ma trận đường chéo là không gian con gồm các ma trận có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0.

Không gian con bù trực giao của các ma trận đối xứng là không gian con gồm các ma trận phản đối xứng (tức là đối xứng lệch).

23.21 Phần bù trực giao là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + (2i+1)x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + ix_2 + 4ix_3 + 3x_4 = 0, \\ ix_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + (2i+1)x_3 + x_4 = 0, \\ ix_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Do đó ta được một cơ sở là $(-2i-1,-2i,1,0)$, $(-1,i,0,1)$.

23.22 Theo Bài 23.19, nếu ta tìm được một cơ sở của không gian nghiệm, thì các véc tơ của cơ sở đó sẽ là các véc tơ hệ số của hệ phương trình cần tìm. Chẳng hạn ta được hệ

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

23.23 Xét không gian con hữu hạn chiều $V \subseteq E$ sinh bởi $e_1,...,e_n$ và v. Ta mở rộng hệ đã cho thành một cơ sở trực chuẩn $e_1,...,e_m$ của V, trong đó $m = n$ hoặc $m = n+1$. Khi đó, nếu $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$, thì vế trái bằng $\mid \alpha_1 \mid^2 + \cdots \mid \alpha_n \mid^2$, còn vế phải là $\mid \alpha_1 \mid^2 + \cdots \mid \alpha_m \mid^2$.

23.24 Nếu $\langle f(t), f(t)\rangle = 0$, thì đa thức $f(t) \equiv 0$ trên đoạn $[-1,1]$, và do đó đồng nhất bằng 0. Do đó P_{n+1} là không gian Oclit.

Đặt $g_k(t) = (t^2-1)^k$. Cho $j < k$. Khi đó đạo hàm $g_k^{(j)}(t)$ bậc j chứa nhân tử (t^2-1), nên $g_k^{(j)}(\pm 1) = 0$. Bây giờ áp dụng công thức tích phân theo từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} g_k^{(k)}(t)t^j dt &= \int_{-1}^{1} t^j d(g_k^{(k-1)}(t)) \\ &= t^j g_k^{(k-1)}(t) \mid_{-1}^{1} - j\int_{-1}^{1} g_k^{(k-1)}(t)t^{j-1}dt = \cdots = 0. \end{aligned}$$

Vì $g_j^j(t)$ là đa thức bậc j, nên từ đó suy ra

$$\langle g_k^{(k)}(t), g_j^{(j)}(t)\rangle = \sum_{i\le j} \alpha_i \int_{-1}^{1} g_k^{(k)}(t)t^i dt = 0.$$

23.25 Tính tích phân, ta được

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx &= \tfrac{\sin^2 nx}{2n} \mid_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x - \sin(m-n)x]dx = 0,\ n \neq m, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(m+n)x]dx = 0,\ n \neq m, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(m+n)x]dx = 0,\ n \neq m, \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1-\cos 2nx]dx = \pi,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1+\cos 2nx]dx = \pi.$$

23.26 Vì $(r_n(x))^2 = 1$ với mọi n nên r_n là các véc tơ định chuẩn. Kí hiệu

$$\Delta_k^n = (\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^{n+1}}),\ k = 0, 1, ..., 2^{n+1}-1.$$

Khi đó

$$r_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \Delta_{2m}^n,\ m = 0, 1, ..., 2^n - 1, \\ -1, & \text{nếu } x \in \Delta_{2m+1}^n,\ m = 0, 1, ..., 2^n - 1, \\ 0, & \text{nếu } x = \frac{k}{2^{n+1}},\ k = 0, 1, ..., 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Với $m > n$ trong mỗi khoảng Δ_k^n độ dài $1/2^{n+1}$ chứa một số chẵn 2^{m-n} đoạn Δ_l^m độ dài $1/2^{m+1}$. Điều đó có nghĩa là trên khoảng đó, khi $r_n(x)$ không thay đổi, thì $r_m(x)$ nhận giá trị 1 tại số khoảng đúng bằng số khoảng nó nhận giá trị -1. Do đó

$$\int_0^1 r_m(x) r_n(x) dx = 0.$$

23.27 Ta chứng minh bằng qui nạp theo s. $s = 1$ hiển nhiên. Giả sử đã đúng với s. Kí hiệu V_k là không gian con sinh bởi $e_1, ..., e_k$. Do $f_1, ..., f_k$ độc lập tuyến tính và đều thuộc V_k, nên nó cũng là cơ sở của V_k. Do đó e_k biểu diễn tuyến tính được qua $f_1, ..., f_k$. Suy ra

$$f_{s+1} = a_{s+1}e_{s+1} + \cdots + a_1 e_1 = a_{s+1}e_{s+1} + a'_s f_s + \cdots a'_1 f_1,\ a_{s+1} \neq 0.$$

Từ tính trực giao của f_{s+1} với các f_k suy ra a'_k/a_{s+1} xác định duy nhất. Tương tự,

$$g_{s+1} = b_{s+1}e_{s+1} + b'_s f_s + \cdots b'_1 f_1,\ b_{s+1} \neq 0,$$

trong đó b'_k/b_{s+1} xác định duy nhất. Từ đó ta suy ra $f_{s+1} = \alpha_{s+1} g_{s+1}$.

23.28 Sử dụng Bài 23.27, ta có $f_k(t) = \alpha_k P_k(t)$, trong đó $P_0(t), ..., P_n(t)$ như trong Bài 23.24. Chú ý rằng hệ số đầu của $f_k(t)$ bằng 1. Do đó

$$\alpha_k = \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}.$$

23.29 Từ công thức $v_i = u_i - \alpha_{i-1}v_{i-1} - \cdots - \alpha_1 v_1$, ta có

$$| u_i |^2 = | v_i |^2 + \sum_{j<i} | \alpha |^2 | v_j |^2 .$$

23.30 Ta kí hiệu $f_0 = 1, ..., f_n$ là các đa thức nhận được từ quá trình trực giao của các đa thức $1, t, ..., t^n$. Các đa thức này có hệ số đầu là 1. Do đó một đa thức $f(t)$ bậc n có hệ số đầu là 1 phải được viết dưới dạng

$$f(t) = f_n(t) + \alpha_{n-1}f_{n-1}(t) + \cdots + \alpha_0.$$

Từ đó

$$\int_{-1}^{1} [f(t)]^2 dt = | f(t) |^2 = | f_n(t) |^2 + \sum \alpha_i^2 \geq | f_n(t) |^2 .$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(t) = f_n(t)$. Bây giờ sử dụng Bài 23.28.

23.31 Với mỗi i, kí hiệu E_i là không gian con sinh bởi $e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n$. Khi đó $\dim E_i^{\perp} = 1$. Do đó $E_i^{\perp} = Kf_i'$ ($K = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$), trong đó $f_i' \neq 0$. Hơn nữa $\langle f_i', e_i \rangle \neq 0$. Bây giờ chỉ việc chọn $f_i = f_i'/\langle f_i', e_i \rangle$.

23.32 b) Ta có $(f_1', ..., f_n') = (f_1, ..., f_n)T$ và $(e_1', ..., e_n') = (e_1, ..., e_n)S$. Cho δ_{ij} là kí hiệu Kronecker. Khi đó

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle e_i', f_j' \rangle = \langle e_1 s_{1i} + \cdots + e_n s_{ni}, f_1 t_{1j} + \cdots + f_n t_{nj} \rangle \\ &= s_{1i}\overline{t_{1j}} + \cdots + s_{ni}\overline{t_{nj}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$t_{1j}\overline{s_{1i}} + \cdots + t_{nj}\overline{s_{ni}} = \delta_{ij}.$$

Theo định nghĩa ma trận nghịch đảo suy ra $T = (S^*)^{-1}$.

a) Cách làm trên cũng đúng cho câu a), và ta được $T = (S^T)^{-1}$.

23.33 Trước hết ta chứng minh $(F^{\perp})^{\perp} = F$. Đặt $F' = (F^{\perp})^{\perp}$. Dễ thấy $F \subseteq F'$. Giả sử $F' \neq F$. Lấy $u \in F' \setminus F$. Khi đó không gian con F^* sinh bởi F và u thực sự chứa F và là không gian con của F'. Vì không gian con này có chiều hữu hạn, nên có thể chọn được véc tơ $0 \neq v \in F^*$ vuông góc với F, tức là $v \in F^{\perp}$. Nhưng $F^* \subseteq F'$, nên $v \in F'$, và do đó $\langle v, v \rangle = 0$. Vậy $v = 0$, vô lí. Cho nên $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Dễ thấy $F \cap F^{\perp} = 0$. Cho $v \in E$ tùy ý. Kí hiệu F_1 là không gian con sinh bởi F và v. Sử dụng Định lí 23.9 đối với F_1 và F, ta có thể chọn được

$v_1 \in F$ và $v_2 \in F_1$ vuông góc với F sao cho $v = v_1 + v_2$. Như vậy ta cũng có $v_2 \in F^\perp$, và $v \in F + F^\perp$. Suy ra $E = F^\perp \oplus F$.

24.2 Viết $y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$, từ công thức $\langle x - y, e_i \rangle = 0$, ta có ngay điều cần chứng minh.

Phương pháp này tuy cải tiến đôi chút so với Bổ đề 24.4, nhưng nó cho phép đơn giản hoá tính toán.

24.3 Theo như Bài 24.2, ta chỉ cần sử dụng Phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt để tìm một cơ sở trực giao của V.

a) V có một cơ sở trực giao là $e_1 = (1,0,1,0)$ và $e_2 = (-1,1,1,2)$. Từ đó véc tơ chiếu là

$$y = \frac{5}{2}(1,0,1,0) - \frac{4}{7}(-1,1,1,2) = (\frac{43}{14}, -\frac{4}{7}, \frac{27}{14}, -\frac{8}{7}).$$

Véc tơ độ cao là $x - y = (-\frac{15}{14}, -\frac{3}{7}, \frac{15}{14}, -\frac{6}{7})$.

b) V có một cơ sở trực giao là $e_1 = (-1,1,-1,1)$, $e_2 = (0,1,1,0)$, $e_3 = (1,0,0,1)$. Từ đó dễ dàng tính véc tơ chiếu và véc tơ độ cao.

24.4 a) Chú ý rằng $E = V \oplus V^\perp$, nên x được phân tích duy nhất thành tổng $x = v + h$, trong đó $v \in V$ và $h \in V^\perp$. Rõ ràng v là véc tơ chiếu, còn h là véc tơ độ cao của x. b) Các lập luận không thay đổi khi chuyển từ không gian Ơclit sang không gian unita.

24.5 Sử dụng cách giải câu a) của Bài 24.4.

24.6 Điều kiện cần hiển nhiên. Điều kiện đủ được suy ra từ Bài 23.7.

24.7 Viết $x = y + h$, trong đó y là véc tơ chiếu và h là véc tơ độ cao. Khi đó với mọi $v \in V$, theo bất đẳng thức Côsi-Bunhiakovski-Schwarz, ta có

$$\cos(x,v) = \frac{\langle y, v \rangle}{|\, x \,| \cdot |\, v \,|} \leq \frac{|\, y \,|}{|\, x \,|}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\langle y, v \rangle = |\, y \,| \cdot |\, v \,|$. Bây giờ có thể áp dụng Bài 23.7.

24.8 Bằng qui nạp, ta chỉ cần chứng tỏ cho trường hợp σ là một hoán vị (i,j). Khi đổi chỗ hai véc tơ v_i, v_j cho nhau thì ma trận Gram mới nhận được từ ma trận Gram cũ bằng cách đổi chỗ các dòng và cột có chỉ số i và j cho nhau. Vì vậy định thức không thay đổi.

24.9 Chú ý rằng ma trận Gram là một ma trận Hermite, tức là $G = G^*$. Do đó

$$\overline{\mathrm{Det}(G)} = \mathrm{Det}(\overline{G}) = \mathrm{Det}(\overline{(\overline{G})^T}) = \mathrm{Det}(G^T) = \mathrm{Det}(G).$$

Do đó $\mathrm{Det}(G)$ là số thực. Hơn nữa, tương tự Bổ đề 24.7, nếu A là ma trận các véc tơ cột tọa độ của $v_1, ..., v_n$ theo một cơ sở trực chuẩn $S = (e_1, ..., e_n)$ thì $G = A^*A$. Hạn chế trên không gian con chiều bằng m và chứa các véc tơ $v_1, ..., v_m$ đã cho, ta có thể giả thiết $m = n$. Khi đó

$$\mathrm{Det}(G) = \mathrm{Det}(A^*A) = \overline{\mathrm{Det}(A)}\,\mathrm{Det}(A) = \mid \mathrm{Det}(A) \mid^2 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\mathrm{Det}(A) = 0$. Nhưng ta biết rằng điều này tương đương với $v_1, ..., v_n$ là độc lập tuyến tính.

24.10 Chú ý rằng $G(v_1, ..., v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$ nhận được từ ma trận Gram ban đầu bằng cách nhân cột thứ i với α và dòng thứ i với $\bar{\alpha}$.

24.11 Bài toán được suy ra từ (dạng phức của) Định lí 24.11 và Bổ đề 24.5.

24.12 Ta có thể dễ dàng đưa về trường hợp $u_1, ..., u_m$ độc lập tuyến tính. Chú ý rằng v_m là véc tơ độ cao của u_m lên không gian con sinh bởi $u_1, ..., u_{m-1}$. Trong khi đó $\mid G(u_1, ..., u_{m-1}) \mid$ (t.ư. $\mid G(u_1, ..., u_m) \mid$) là bình phương của thể tích của hình hộp $P(u_1, ..., m-1)$ (t.ư $P(u_1, ..., u_m)$). Sử dụng (dạng phức của) Định lí 24.11 và theo qui nạp ta có

$$\mid G(u_1, ..., u_m) \mid = \mid v_m \mid^2 \mid G(u_1, ..., u_{m-1}) \mid = \mid v_m \mid^2 \cdots \mid v_1 \mid^2 .$$

24.13 Suy ra ngay từ Bài 24.12.

24.14 Xét không gian unita $\mathbb{C}^n$ với cơ sở tự nhiên (là hệ trực chuẩn). Xét hệ véc tơ $v_1, ..., v_n$ với các véc tơ cột tọa độ là các dòng của D. Khi đó theo dạng phức của Bổ đề 24.7,

$$G(v_1, ..., v_n) = A^*A,$$

trong đó A là ma trận của định thức D. Do đó, theo Bài 24.11, ta có

$$\begin{aligned} \mid D \mid^2 &= \mathrm{Det}(A^*A) = \mathrm{Det}(G(v_1, ..., v_m)) \leq \mid v_1 \mid^2 \cdots \mid v_m \mid^2 \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mid a_{ij} \mid^2 . \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hoặc có một véc tơ $v_i = 0$, tức định thức có một dòng toàn 0, hoặc hệ $v_1, ..., v_n$ trực giao, tức là

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{jk}} = 0 \quad \text{nếu } i \neq j.$$

24.15 Giả sử $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m$ là các véc tơ nhận được từ $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m$ trong qua trình trực giao hóa, còn $c_1, ..., c_m$ là các véc tơ nhận được từ $v_1, ..., v_m$ trong qua trình trực giao hóa. Kí hiệu L_i là không gian con sinh bởi $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_i$ $(0 \leq i \leq m)$ và L_0 là không gian con sinh bởi $u_1, ..., u_n$. Khi đó với mỗi $i \geq 1$, ta có

$$b_i = v_i + x_{i-1}, \quad x_{i-1} \in L_{i-1}.$$

Ta cũng có $c_i = v_i + y_{i-1}$ với lưu ý rằng $y_{i-1} \in L_{i-1}$. Do đó

$$c_i = b_i + y_{i-1} - x_{i-1}.$$

Vì b_i trực giao với L_{i-1}, nên

$$| c_i |^2 = | b_i |^2 + | y_{i-1} - x_{i-1} |^2 .$$

Bây giờ theo Bài 24.12, ta có

$$\begin{aligned} | G(u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m) | &= | a_1 |^2 \cdots | a_n |^2 | b_1 |^2 \cdots | b_m |^2 \\ &\leq | a_1 |^2 \cdots | a_n |^2 | c_1 |^2 \cdots | c_m |^2 \\ &= | G(u_1, ..., u_n) | \, | G(v_1, ..., v_m) | . \end{aligned}$$

Nếu một trong hai hệ đã cho phụ thuộc tuyến tính thì định thức Gram tương ứng bằng 0, và ta có dấu bằng. Giả sử cả hai hệ độc lập tuyến tính. Từ trên ta có dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b_i = c_i$ với mọi $i = 1, ..., m$. Nói riêng $c_1, ..., c_m$ trực giao với L_0, tức là trực giao với $u_1, ..., u_n$. Nhưng $c_1, ..., c_m$ và $v_1, ..., v_m$ sinh ra cùng một không gian con. Vậy hai hệ đã cho trực giao với nhau. Bây giờ dễ kiểm tra khi hai hệ trực giao với nhau thì $a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n$ là hệ trực giao nhận được từ quá trình trực giao hóa của hệ $u_1, ..., v_m$ ban đầu.

24.16 Sử dụng Bài 24.15.

25.2 Lấy $E = F = \mathbb{R}^n$ với tích vô hướng tự nhiên. Khi đó ánh xạ $\varphi(x) = x/2$ là ánh xạ tuyến tính và bảo toàn góc, nhưng không bảo toàn tích vô hướng.

25.3 Vì ánh xạ đẳng cự là đơn ánh, nên điều kiện cần là $\dim E \leq \dim F$. Đây cũng là điều kiện đủ. Thật vậy, cho $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở trực cuẩn của E và $\{f_1, ..., f_m\}$ là cơ sở trực chuẩn của F, $n \leq m$. Khi đó ánh xạ tuyến tính φ mở rộng ánh xạ tập hợp $\varphi(e_i) = f_i$, $i \leq n$ là một ánh xạ đẳng cự (xem Định lí 25.2).

25.4 Ta chỉ xét trường hợp không gian Óclit, còn trường hợp kia tương tự. Giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ và $\{f_1, ..., f_n\}$ là hai cơ sở trực chuẩn của E và A là ma trận chuyển cơ sở từ $\{e_1, ..., e_n\}$ sang $\{f_1, ..., f_n\}$, tức là

$$(f_1, ..., f_n) = A(e_1, ..., e_n).$$

Xét ánh xạ tuyến tính cho bởi $\varphi(e_i) = f_i$, $i \leq n$. Theo Định lí 25.2 φ là toán tử trực giao. Hơn nữa A là ma trận biểu diễn của nó. Theo Định lí 25.6, A là ma trận trực giao.

25.5 Ta chỉ xét trường hợp ma trận trực giao, còn trường hợp kia tương tự. Giả sử A là ma trận trực giao và S là một cơ sở trực chuẩn của không gian Óclit E. Gọi φ là toán tử tuyến tính của E nhận A làm ma trận biểu diễn theo cơ sở S. Khi đó, nếu $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của véc tơ x theo cơ sở S, thì tọa độ của $\varphi(x)$ là $(\sum_j a_{1j}x_j, ..., \sum_j a_{1j}x_j)$. Do đó, với mọi $x, y \in E$ ta có

$$\begin{aligned}\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle &= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij}a_{ik}x_jx_k \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_jx_k(\sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ik}).\end{aligned}$$

Từ điều kiện $AA^T = I$ là ma trận đơn vị ta suy ra

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j = k, \\ 0 & \text{nếu } j \neq k. \end{cases}$$

Do đó tổng trên cuối cùng bằng $\sum_j x_jy_j = \langle x, y \rangle$.

25.6 Ba đẳng thức đầu suy ra từ các điều kiện $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = 1$, và $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Từ 2 đẳng thức đầu có thể đặt $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$ và $c = \cos\beta$, $d = \sin\beta$. Từ đẳng thức 3 ta suy ra $\cos(\alpha - \beta) = 0$, và từ đó suy ra 2 đẳng thức cuối cùng.

25.7 Gọi ánh xạ đó là φ. Ta phải chứng minh nó là ánh xạ tuyến tính. Ta

chỉ xét trường hợp không gian unita. Cho $u, v \in E$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi(\alpha u + \beta v) - \alpha\varphi(u) - \beta\varphi(v), \varphi(\alpha u + \beta v) - \alpha\varphi(u) - \beta\varphi(v)\rangle \\
&= \langle \varphi(\alpha u + \beta v), \varphi(\alpha u + \beta v)\rangle - \bar{\alpha}\langle \varphi(\alpha u + \beta v), \varphi(u)\rangle \\
&\quad -\bar{\beta}\langle \varphi(\alpha u + \beta v), \varphi(v)\rangle - \cdots \\
&= \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v\rangle - \bar{\alpha}\langle \alpha u + \beta v, u\rangle - \bar{\beta}\langle \alpha u + \beta v, v\rangle - \cdots \\
&= \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v\rangle - \langle \alpha u + \beta v, \alpha u\rangle - \langle \alpha u + \beta v, \beta v\rangle - \cdots \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vậy $\varphi(\alpha u + \beta v) - \alpha\varphi(u) - \beta\varphi(v) = 0$.

25.8 Lấy $E = \mathbb{R}$ và $\varphi(x) = \mid x \mid$, thì φ không là ánh xạ tuyến tính.

25.9 Xét trường hợp không gian unita. Nếu $u = \sum \alpha_i e_i$, $v = \sum \beta_i e_i$, thì

$$\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle \sum \alpha_i \varphi(e_i), \sum_j \beta_j \varphi(e_j)\rangle = \sum \alpha_i \overline{\beta_j} \langle e_i, e_j\rangle = \langle u, v\rangle.$$

25.10 Xét trường hợp không gian unita. Theo Bài 25.9, ta phải có

$$g_{ij} = \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ki} g_{kl} \overline{a_{lj}}.$$

Từ đó $A^T G \bar{A} = G$. Nếu lấy liên hợp phức các phần tử hai bên, ta được điều kiện tương đương là $A^* \bar{G} A = \bar{G}$.

25.11 Điều kiện cần là hiển nhiên. Để chứng minh điều kiện đủ, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $v_1, ..., v_n$; $n \leq k$ độc lập tuyến tính. Cố định chỉ số i với $n < i \leq kn$. Ta có $v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Do đó

$$\langle v_i - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_n v_n, v_i - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_n v_n\rangle = 0.$$

Khai triển tích này ra, rồi thay $\langle v_p, v_q\rangle$ bằng $\langle u_p, u_q\rangle$, ta sẽ được đẳng thức trên, trong đó v_p được thay bằng u_p. Do đó u_i cũng biểu diễn tuyến tính qua $u_1, ..., u_n$.

Bây giờ ta lấy F là một không gian con hữu hạn chiều tùy ý chứa $v_1, ..., v_n$ và $u_1, ..., u_n$ (chẳng hạn $F = E$ nếu E có chiều hữu hạn, hoặc F sinh bởi $v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_n$). Kí hiệu V là không gian con sinh bởi $v_1, ..., v_n$ và U là không gian con sinh bởi $u_1, ..., u_n$. Kí hiệu các không gian con bù trực giao của chúng trong F là V^* và U^*. Khi đó $\dim V^* = \dim U^*$. Do vậy có thể chọn được các cơ sở trực chuẩn $e_{m-n}, ..., e_m$ và $f_{m-n}, ..., m$ tương ứng của V^* và U^*, trong đó $m = \dim F$. Kí hiệu lại $e_1 = v_1, ..., e_n = v_n$

và $f_1 = u_1, ..., f_n = u_n$. Khi đó các hệ $e_1, ..., e_m$ và $f_1, ..., f_m$ lại thỏa mãn điều kiện bài ra, tức là $\langle e_i, e_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle$. Kí hiệu φ là toán tử tuyến tính của F biến e_i thành f_i. Theo Bài 25.9, φ là ánh xạ đẳng cự. Theo Bài 23.9, $E = F \oplus F^{\perp}$. Mở rộng φ sao cho $\varphi(v + u) = \varphi(v) + u$, trong đó $v \in F$ và $u \in F^{\perp}$ ta được một đẳng cự của E. Chỉ còn cần chứng tỏ $\varphi(v_i) = u_i$ với $i = n, .., k$. Nhưng điều đó được suy ra từ tính tuyến tính của φ và u_i có biểu diễn tuyến tính qua $u_1, ..., u_n$ giống như v_i qua $v_1, ..., v_n$.

25.12 Ý tưởng giải như Bài 25.11. Kí hiệu $V = F + \varphi(F)$ là không gian con hữu hạn chiều của E. Gọi F^* và $\varphi(F)^*$ là các phần bù trực giao tương ứng trong V. Khi đó $\dim F^* = \dim \varphi(F)^*$, nên tồn tại một đẳng cự $\psi : F^* \to \varphi(F)^*$. Theo Bài 23.33

$$E = F \oplus F^* \oplus F^{\perp} = \varphi(F) \oplus \varphi(F)^* \oplus F^{\perp}.$$

Khi đó ánh xạ $\phi(v_1 + v_2 + v_3) = \varphi(v_1) + \psi(v_2) + v_3$, trong đó $v_1 \in F$, $v_2 \in F^*$ và $v_3 \in F^{\perp}$ là đẳng cấu đẳng cự cần tìm.

25.13 Đối với ma trận thực: điều kiện $AA^T = I$ tương đương với các véc tơ dòng lập thành hệ trực chuẩn, còn $A^T A = I$ tương đương với các véc tơ cột lập thành hệ trực chuẩn. Với ma trận phức: tương tự.

25.14 Ta có $\langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \alpha\bar{\beta}\langle u, v \rangle$. Vì β có môđun bằng 1, nên $\bar{\beta} = 1/\beta$. Từ đó $\alpha\bar{\beta} \neq 1$. Suy ra $\langle u, v \rangle = 0$.

25.15 a) Giải tương tự Bài 25.14.

Ta có thể giải câu b) tương tự câu c). Ta sẽ giải câu c) phức tạp hơn tí chút. Xem A như ma trận unita. Chú ý rằng $u_1 \pm iu_2$ là véc tơ riêng của A ứng với các giá trị riêng c_1 và $\overline{c_1}$, còn $v_1 \pm iv_2$ là véc tơ riêng của A ứng với các giá trị riêng c_2 và $\overline{c_2}$. Các số $c_1, c_2, \overline{c_1}, \overline{c_2}$ đôi một khác nhau, nên theo Bài 25.14 $u_1 \pm iu_2$ trực giao với $v_1 \pm iv_2$. Vì $u_1 = [(u_1 + iu_2) + (u_1 - iu_2)]/2$ và $u_2 = [(u_1 + iu_2) - (u_1 - iu_2)]/(2i)$, nên từ đó u_1, u_2 trực giao với $v_1 \pm iv_2$. Sử dụng hệ thức tương tự với v_1, v_2 ta suy ra hệ này trực giao với u_1, u_2.

25.16 Chú ý rằng có thể tính đa thức đặc trưng thông qua dạng chuẩn tắc của ma trận trực giao. Khi đó $| A | = 1$ khi và chỉ khi số phần tử -1 trong dạng chuẩn tắc bằng 0 hoặc chẵn.

25.17 Xét phép dịch chuyển trong không gian l_2 các dãy hội tụ bình phương

$$\varphi(a_1, a_2, ...,) = (0, a_1, a_2, ...).$$

Xét E là không gian con gồm các dãy có thành phần thứ nhất bằng 0. Rõ

ràng nó là không gian con bất biến nhưng $E^\perp = (a, 0, 0, ...)$ không là không gian con bất biến.

25.18 Xét một cơ sở trực chuẩn để ma trận có dạng đường chéo. Khi đó mỗi véc tơ của cơ sở là một véc tơ riêng. m véc tơ tùy ý của cơ sở này sinh ra không gian con bất biến chiều m.

25.19 Vì đa thức phức luôn có nghiệm, nên luôn chọn được véc tơ riêng định chuẩn $e_1 \in E$ của toán tử tuyến tính φ cho trước. Giả sử ta đã chọn được $k < n = \dim E$ véc tơ lập thành hệ trực chuẩn sao cho

$$\varphi(e_i) \in \mathbb{C}e_1 + \cdots + \mathbb{C}e_i, \ i = 1, ..., k.$$

Ta xây dựng véc tơ thứ $k+1$ như sau. Gọi F là không gian con sinh bởi $e_1, ..., e_k$. Khi đó $E = F \oplus F^\perp$. Với mỗi $x \in E$ kí hiệu $x = x_1 + x_2$, trong đó $x_1 \in F$ và $x_2 \in F^\perp$. Khi đó φ cảm sinh ra toán tử tuyến tính sau trên $F^\perp$: $\varphi'(x) := \varphi(x)_2$. Theo bước 1, ta có thể tìm được véc tơ định chuẩn $e_{k+1} \in F^\perp$ là véc tơ riêng của φ'. Khi đó $e_1, ..., e_{k+1}$ là hệ trực chuẩn, và từ $\varphi'(e_{k+1}) \in \mathbb{C}e_{k+1}$ suy ra

$$\varphi(e_{k+1}) \in \mathbb{C}e_1 + \cdots + \mathbb{C}e_k + \mathbb{C}e_{k+1}.$$

25.20 Gọi hai toán tử unita là φ và ψ. Gọi α là một giá trị riêng của φ (luôn tồn tại) và F là không gian riêng của φ ứng với α. Khi đó mỗi véc tơ của F là véc tơ riêng của φ. Với mọi $x \in F$ ta có

$$\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \alpha\psi(x).$$

Do đó $\psi(x) \in F$ và F là không gian con bất biến của ψ. Do vậy có thể chọn được một véc tơ định chuẩn $e_1 \in F$ là véc tơ riêng của ψ. Theo trên nó cũng là véc tơ riêng của φ. Bây giờ xét phần bù trực giao của $\mathbb{C}e_1$ và sử dụng qui nạp.

25.21 Có thể xem $V = \mathbb{R}^n$. Gọi hai toán tử trực giao là φ và ψ. Ta cũng xem φ, ψ là toán tử unita của $\mathbb{C}^n$. Theo Bài 25.20 hai toán tử này có chung một véc tơ riêng v. Nếu v là véc tơ thực, thì các giá trị riêng của φ, ψ ứng với nó là ± 1, và không gian bù trực giao $(\mathbb{R}v)^\perp$ bất biến với cả hai toán tử. Xét hạn chế của chúng trên không gian con này và theo qui nạp (theo chiều của không gian) ta có thể kết luận mệnh đề nêu trong bài toán là đúng.

Nếu v là véc tơ không thực, thì viết $v = v_1 + iv_2$, trong đó $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Đặt $U = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$. Theo thuật toán tìm dạng chuẩn tắc của toán tử trực

giao, U và do đó cả $U^{\perp}$ là các không gian con bất biến của cả hai toán tử. Hơn nữa hạn chế của chúng trên U có ma trận biểu diễn là dạng chuẩn tắc theo cơ sở trực chuẩn $v_1/\mid v_1 \mid,\ v_2/\mid v_2 \mid$. Do đó theo qui nạp ta cũng có thể kết luận mệnh đề nêu trong bài toán là đúng.

25.22 b) Chú ý rằng $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*)$ - vết của ma trận tích. Do đó, nếu U là ma trận unita thì

$$\langle AU, BU\rangle = \mathrm{Tr}(AUU^*B^*) = \mathrm{Tr}(AB^*) = \langle A, B\rangle.$$

Ngược lại, giả sử đẳng thức trên đúng với mọi A, B. Kí hiệu $C = UU^*$. Nhắc lại: O_{ij} là ma trận toàn 0 trừ phần tử ở dòng i, cột j bằng 1. Khi đó dễ kiểm tra $O_{ij}CO_{ki}$ có tất cả các phần tử bằng 0, trừ phần tử ở dòng i và cột i bằng c_{jk}, nên $\mathrm{Tr}(O_{ij}CO_{ki}) = c_{jk}$. Do đó, từ $\mathrm{Tr}(O_{ij}CO_{ki}) = \mathrm{Tr}(O_{ij}IO_{ki})$, suy ra $c_{jk} = \delta_{jk}$, tức $C = I$.

Với phép nhân bên phải, hãy sử dụng công thức

$$\mathrm{Tr}(UAB^*U^*) = \mathrm{Tr}(U^*UAB^*) = \mathrm{Tr}(AB^*).$$

25.23 Giả sử dạng chuẩn tắc của A là B, tức là tồn tại ma trận trực giao P để $A = P^{-1}BP$. Khi đó $A^k = P^{-1}B^kP$. Từ đó dễ dàng thấy, nếu

$$B = \mathrm{diag}(I_p, -I_q, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_s & \sin\alpha_s \\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s \end{pmatrix}),$$

thì

$$B^k = \mathrm{diag}(I_p, (-1)^k I_q, \begin{pmatrix} \cos k\alpha_1 & \sin k\alpha_1 \\ -\sin k\alpha_1 & \cos k\alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos k\alpha_s & \sin k\alpha_s \\ -\sin k\alpha_s & \cos k\alpha_s \end{pmatrix}).$$

25.24 Đa thức đặc trưng $f_A(t) = -(t-1)^2(t+1)$. Do đó ma trận dạng chuẩn tắc là $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$. Hệ phương trình

$$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tương đương với $2x_2 = x_1 + x_3$. Nó có hai véc tơ nghiệm trực giao là $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$. Trực chuẩn hóa, ta được hệ trực chuẩn $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ và $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

Hệ phương trình

$$(A+I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

có nghiệm định chuẩn duy nhất là $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. Vậy cơ sở trực chuẩn để ma trận biểu diễn của φ có dạng chuẩn tắc là

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).$$

25.25 Đa thức đặc trưng $f_A(t)=-(t-1)(t^2+1)$. Do đó ma trận dạng chuẩn tắc của A là

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Lập các hệ phương trình tương ứng, ta tìm được cơ sở trực chuẩn mới f_1,f_2,f_3. Ma trận với các cột là véc tơ cột tọa độ của các véc tơ này chính là ma trận P cần tìm:

$$P=\begin{pmatrix}2/3&2/3&-1/3\\2/3&-1/3&2/3\\-1/3&2/3&2/3\end{pmatrix}.$$

25.26 Phương pháp giải như Bài 25.25. Ta có

$$f_A(t)=-(t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1).$$

Từ đó

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix},\ \text{với } P=\begin{pmatrix}2/3&2/3&-1/3\\2/3&-1/3&2/3\\-1/3&2/3&2/3\end{pmatrix}.$$

25.27 Đa thức đặc trưng

$$f_A(t)=(t^2+1)(t^2-t+1)=(t-i)(t+i)(t-(1+\sqrt{3}i)/2)(t-(1-\sqrt{3}i)/2).$$

Từ đó giải các hệ phương trình tuyến tính trên trường số phức, ta được

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(i,-i,\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\frac{1-\sqrt{3}i}{2}),$$

với

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

26.1 Vì f_1, f_2 không là cơ sở trực chuẩn, nên ta phải tìm ma trận biểu diễn của φ theo e_1, e_2. Ta có

$$(f_1, f_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

nên ma trận chuyển cơ sở từ e_1, e_2 sang f_1, f_2 là $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1} = P$.

Do đó ma trận biểu diễn của φ theo e_1, e_2 là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vì ma trận biểu diễn của φ^T theo e_1, e_2 là A^T, nên ma trận biểu diễn của nó theo f_1, f_2 là

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

26.2 Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở tự nhiên e_1, e_2, e_3 sang f_1, f_2, f_3 là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó (có thể tìm bằng cách biểu diễn e_i qua f_1, f_2, f_3):

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Từ đó, theo phương pháp Bài 26.1 ta tìm được ma trận biểu diễn của φ^T theo f_1, f_2, f_3 là

$$B = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}.$$

26.3 Gọi e_1, e_2, e_3 là cơ sở tự nhiên. Khi đó

$$\begin{aligned}\varphi(e_3) &= \varphi(u_1) = (1,-2,1),\\ \varphi(e_2) &= \varphi(u_2) - \varphi(u_1) = (-1,3,-2) - (1,-2,1) = (-2,5,-3),\\ \varphi(e_1) &= \varphi(u_3) - \varphi(u_2) = (2,1,0) - (-1,3,-2) = (3,-2,2).\end{aligned}$$

Do đó

$$\varphi^T(x,y,z) = (3x - 2y + 2z, -2x + 5y - 3z, x - 2y + z).$$

26.4 Cho $v \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$. Vì $E = L_1 \oplus L_2$, nên $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$. Khi đó $\langle v, v_2\rangle = \langle v, v_1\rangle = 0$, nên $\langle v, v\rangle = 0$. Suy ra $v = 0$. Như vậy $L_1^\perp \cap L_2^\perp = 0$. Từ công thức chiều suy ra $E = L_1^\perp \oplus L_2^\perp$. Với mọi $u, v \in E$, viết $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, trong đó $u_1 \in L_1$, $u_2 \in L_2$ và $v_1 \in L_1^\perp$, $v_2 \in L_2^\perp$, ta có

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u_1, v_1 + v_2\rangle = \langle u_1, v_2\rangle = \langle u, v_2\rangle.$$

Suy ra $\varphi^T(v) = v_2$.

26.5 Ta có $\langle \varphi(x), x\rangle = \langle x, \varphi^*(x)\rangle$. Vì $\varphi(x) = \alpha x$, $\varphi^*(x) = \beta x$ và $\langle x, x\rangle \neq 0$, suy ra $\beta = \bar{\alpha}$.

26.6 Cố định một cơ sở trực chuẩn và gọi A là ma trận biểu diễn của φ thì

$$f_{\varphi^*}(t) = |\, A^* - It\,| = |\, (\bar{A} - It)^T\,| = |\, \bar{A} - It\,| = \overline{f_\varphi(t)}.$$

Do đó $f_\varphi(\alpha) = 0$ khi và chỉ khi $f_{\varphi^*}(\bar{\alpha}) = 0$.

26.7 Ta cần chứng minh $g_{\varphi^*}(t) = \overline{g_\varphi}(t)$. Với mọi $x, y \in E$, ta có

$$\langle x, \overline{g_\varphi}(\varphi^*)(y)\rangle = \langle g_\varphi(\varphi)(x), y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0.$$

Do đó $\overline{g_\varphi}(\varphi^*)(y) = 0$ với mọi y và $\overline{g_\varphi}(\varphi^*) = 0$. Như vậy $\overline{g_\varphi}(t)$ chia hết cho $g_{\varphi^*}(t)$. Tương tự, xét $\langle \overline{g_{\varphi^*}}(\varphi)x, y\rangle$ ta suy ra $\overline{g_{\varphi^*}}(t)$ chia hết cho $g_\varphi(t)$. Vì vậy $g_{\varphi^*}(t)$ chia hết cho $\overline{g_\varphi}(t)$. Từ đó $g_{\varphi^*}(t) = \overline{g_\varphi}(t)$.

26.8 Ta có

$$\langle \varphi(e_i), f_j\rangle = \langle e_i, \varphi^*(f_j)\rangle.$$

Mà

$$\langle \varphi(e_i), f_j\rangle = \langle \sum_k a_{ki} e_k, f_j\rangle = \sum_k a_{ki}\langle e_k, f_j\rangle = a_{ji},$$

$$\langle e_i, \varphi^*(f_j)\rangle = \langle e_i, \sum_k b_{kj} f_j\rangle = \sum_k \overline{b_{kj}}\langle e_i, f_k\rangle = \overline{b_{ij}}.$$

Do đó $B = A^*$.

26.9 Nếu $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned}(a_0\,\mathrm{id} + a_1\varphi + \cdots + a_n\varphi^n)^* &= a_0\,\mathrm{id} + a_1\varphi^* + \cdots + a_n(\varphi^*)^n \\ &= a_0\,\mathrm{id} + a_1\varphi + \cdots + a_n\varphi^n.\end{aligned}$$

26.10 Cho x là véc tơ riêng ứng với α và y là véc tơ riêng ứng với β, trong đó $\alpha \neq \beta$. Chú ý rằng đây là các số thực. Ta có

$$\alpha\langle x, y\rangle = \langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle = \beta\langle x, y\rangle.$$

Vì vậy $\langle x, y\rangle = 0$.

26.11 Sử dụng Bài 26.4.

26.12 b) Giả sử $S = \{e_1, ..., e_n\}$. Sử dụng các công thức (do G là ma trận Hermite)

$$\begin{aligned}\langle\varphi(e_i), e_j\rangle &= \langle e_i, \varphi(e_j)\rangle, \\ \langle\varphi(e_i), e_j\rangle &= \langle\textstyle\sum_k a_{ki}e_k, e_j\rangle = \sum_k a_{ki}g_{kj} = \sum_k \overline{g_{jk}}a_{ki}, \\ \langle e_i, \varphi(e_j)\rangle &= \langle e_i, \textstyle\sum_k a_{kj}e_k\rangle = \sum_k g_{ik}\overline{a_{kj}}.\end{aligned}$$

Từ đó $\sum_k \overline{g_{jk}}a_{ki} = \sum_k g_{ik}\overline{a_{kj}}$ với mọi i, j, hay $\bar{G}A = (G\bar{A})^T = A^*\bar{G}$. Lấy liên hợp phức hai vế, ta được $G\bar{A} = A^TG$.

a) Khi các ma trận đều thực, ta được điều kiện tương đương $GA = A^TG$.

26.13 Làm tương tự như Bài 26.12 ta được: $\sum_k \overline{g_{jk}}a_{ki} = \sum_k g_{ik}\overline{b_{kj}}$ với mọi i, j, hay $\bar{G}A = (G\bar{B})^T = B^*\bar{G}$. Lấy liên hợp hai vế ta được $A^*\bar{G} = \bar{G}B$. Vì G khả nghịch, nên $B = \bar{G}^{-1}A^*\bar{G}$.

Trong trường hợp không gian Óclit, ta có $B = G^{-1}A^TG$.

26.14 a) Ta có

$$f_\varphi(t) = t^2 - 4t - 1 = (t - 2 - \sqrt{5})(t - 2 + \sqrt{5}).$$

Ứng với $2 + \sqrt{5}$ ta tìm được véc tơ riêng $(\sqrt{5} - 1, 2)$, ứng với $2 - \sqrt{5}$ ta tìm được véc tơ riêng $(\sqrt{5} + 1, -2)$. Chuẩn hóa, ta được cơ sở trực chuẩn

$$e_1 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}, \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\right), e_2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}, -\frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right).$$

b) $f_\varphi(t) = -(t - 1)^2(t - 4)$. Ứng với giá trị riêng 1 ta được phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ta được hai nghiệm độc lập tuyến tính là $(1, -1, 0)$

và $(0, 1, -1)$. Dùng phương pháp trực giao hóa, ta thay véc tơ thứ hai bằng $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Ứng với giá trị riêng 4 ta được véc tơ riêng $(1, 1, 1)$. Chuẩn hóa các véc tơ, ta được cơ sở trực chuẩn cần tìm là

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0),\ e_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}),\ e_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

26.15 a) $f_A(t) = (t-1)(t-3)$. Từ đó $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ và cơ sở trực chuẩn để toán tử tuyến tính nhận B làm ma trận biểu diễn là:

$$f_1 = (\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\quad f_2 = (-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở tự nhiên sang cơ sở này là

$$P = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

b) $f_A(t) = -(t-3)(t^2-4t+1) = -(t-3)(t-2-\sqrt{3})(t-2+\sqrt{3})$. Từ đó

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}} & -\frac{(1+\sqrt{3})i}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}} & -\frac{(1+\sqrt{3})i}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}} \end{pmatrix}.$$

26.16 Nếu chúng có chung một cơ sở S như vậy, thì ma trận biểu diễn của chúng theo S là ma trận đường chéo, nên giao hoán với nhau.

Ngược lại, giả sử $\varphi\psi = \psi\varphi$. Vì φ là toán tử tự liên hợp, nên nó có một giá trị riêng thực α_1. Gọi V là tập các véc tơ riêng của φ ứng với α. Khi đó V là không gian con bất biến của φ. Nếu $v \in V$ thì $\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \alpha\psi(v)$, nên $\psi(v) \in V$, tức là V cũng là không gian con bất biến của ψ. Hạn chế của ψ trên V cũng là toán tử tự liên hợp, nên nó có một véc tơ riêng e_1 ứng với một giá trị riêng thực β_1. Khi đó e_1 cũng là véc tơ riêng của φ. Bây giờ ta có thể sử dụng qui nạp đối với hạn chế của các toán tử này trên không gian con bù trực giao của Ke_1.

Do các giá trị riêng đều là các số thực nên cách giải này cũng đúng cho không gian Oclit. (Hãy so sánh với Bài 25.20.)

26.17 Vì φ là toán tử tự liên hợp, nên tồn tại cơ sở trực chuẩn để ma trận biểu diễn của nó là ma trận đường chéo $\text{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ với $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Sử dụng tọa độ theo cơ sở này, ta có

$$\langle \varphi(x), x \rangle = \alpha_1 \mid x_1 \mid^2 + \cdots + \alpha_n \mid x_n \mid^2 .$$

Từ đó dễ dàng suy ra điều khẳng định trong bài.

26.18 Ta chỉ xét trường hợp $\varphi = \psi\chi$. Gọi $e_1, ..., e_n$ là cơ sở trực chuẩn bao gồm các véc tơ riêng của χ ứng với các giá trị riêng $c_1, ..., c_n$. Vì χ là toán tử unita, $\mid c_i \mid = 1$ với mọi i. Do φ, ψ xác định dương, nên $\langle \varphi(e_i), e_i \rangle = a_i$ và $\langle \psi(e_i), e_i \rangle = b_i$ là những số thực dương. Theo giả thiết ta có

$$a_i = \langle \varphi(e_i), e_i \rangle = \langle \psi\chi(e_i), e_i \rangle = c_i \langle \psi(e_i), e_i \rangle = c_i b_i.$$

Như vậy c_i là số thực dương, nên $c_i = 1$. Suy ra $\varphi\psi^{-1} = \chi = \text{id}$.

26.19 Cách giải sau cho câu b) cũng đúng cho câu a):

Toán tử $\varphi\varphi^*$ là toán tử tự liên hợp. Hơn nữa

$$\langle \varphi\varphi^*(x), x \rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x) \rangle > 0,$$

nên nó xác định dương. Theo Bài 26.17, tồn tại cơ sở trực chuẩn S để ma trận biểu diễn của $\varphi\varphi^*$ là $\text{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, trong đó $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ là các số thực. Gọi ψ_1 là toán tử Hermite có ma trận biểu diễn theo S là $\text{diag}(\sqrt{\alpha_1}, ..., \sqrt{\alpha_n})$. Khi đó ψ_1 xác định dương và

$$\psi_1^2 = \varphi\varphi^*.$$

Đặt $\chi_1 = \psi_1(\varphi^*)^{-1}$. Khi đó $\varphi = \psi_1\chi_1$. Hơn nữa, do ψ_1 là Hermite, nên

$$\chi_1(\chi_1)^* = \psi_1(\varphi^*)^{-1}(\psi_1(\varphi^*)^{-1})^* = \psi_1((\varphi^*)^{-1}\varphi^{-1})\psi_1 = \psi_1(\psi_2)^{-1}\psi_1 = \text{id}.$$

Như vậy χ_1 là toán tử unita.

Xét $\varphi^*\varphi$, và làm tương tự, ta được biểu diễn thứ hai. Để chứng minh tính duy nhất ta sử dụng Bài 26.18.

26.20 Tương tự như Bài 26.19, ta tìm được toán tử Hermite P xác định không âm và

$$P^2 = \varphi^*\varphi.$$

Ta chỉ cần xét trường hợp φ suy biến. Đặt $V = P(E)$ (E là không gian unita ban đầu). Xác định ánh xạ $T_1 : V \to E$ như sau:

$$T_1(v) = \varphi(x); \quad \text{trong đó } P(x) = v.$$

Ánh xạ này được hoàn toàn xác định. Thực vậy, giả sử $P(x) = P(x')$. Khi đó $P(x - x') = 0$ kéo theo

$$0 = \langle P(x - x'), P(x - x')\rangle = \langle \varphi(x - x'), \varphi(x - x')\rangle.$$

Suy ra $\varphi(x) = \varphi(x')$.

Chú ý rằng vì $\mid P(x) \mid = \mid \varphi(x) \mid$ với mọi $x \in E$ nên $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Do đó $\dim V^{\perp} = \dim(\mathrm{Im}\,\varphi^{\perp})$. Gọi T_2 là một ánh xạ đẳng cự tùy ý từ $V^{\perp}$ vào $\mathrm{Im}\,\varphi^{\perp}$. Đặt $T = T_1 \oplus T_2$, tức là $T(v + v') = T_1(v) + T_2(v')$, trong đó $v \in V$, $v' \in V^{\perp}$. Dễ kiểm tra đây là toán tử tuyến tính. Nếu $x \in E$ và $P(x) = v$ thì

$$\varphi(x) = T_1(v) = T(v) = TP(x),$$

tức là $\varphi = TP$. Ta sẽ chứng minh T là toán tử unita. Cho $x \in E$. Khi đó $x = P(v) + v'$, trong đó $v' \in V^{\perp}$. Ta có $T(x) = TP(v) + T_2(v') = \varphi(x) + T_2(v')$, trong đó $\langle \varphi(x), T_2(v')\rangle = 0$. Do đó

$$\begin{aligned}\langle T(x), T(x)\rangle &= \langle \varphi(x) + T_2(v'), \varphi(x) + T_2(v')\rangle \\ &= \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle + \langle T_2(v'), T_2(v')\rangle \\ &= \langle T_1(v), T_1(v)\rangle + \langle v', v'\rangle \\ &= \langle T_1(v) + v', T_1(v) + v'\rangle = \langle x, x\rangle.\end{aligned}$$

Như vậy có thể đặt $\psi_2 = P$ và $\chi_2 = T$. Rõ ràng ψ_2 xác định duy nhất.

26.21 Chú ý rằng đa thức đặc trưng của toán tử tự liên hợp φ có đúng n nghiệm thực $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (n là chiều của không gian) và $f_{\varphi}(t) = (-1)^n(t - \alpha_1)\cdots(t - \alpha_n)$. Nếu φ xác định dương, thì theo Bài 26.17, các số này dương. Từ đó nó có tính chất đã nêu. Ngược lại, nếu nó không xác định dương, thì theo Bài 26.17, có thể giả thiết $\alpha_1, ..., \alpha_m \leq 0$, còn $\alpha_{m+1}, ..., \alpha_n > 0$, trong đó $1 \leq m \leq n$. Từ đó suy ra nó không có tính chất đã nêu.

26.22 Vì đa thức đặc trưng của một toán tử tuyến tính bằng đa thức đặc trưng của một ma trận biểu diễn nào đó, nên không mất tính tổng quát, có thể xem không gian đang xét là không gian unita. Khi đó nếu α là một nghiệm, thì nó là giá trị riêng và do đó tồn tại $x \neq 0$ để $\varphi\psi(x) = \alpha x$. Theo Bài 26.17, có một cơ sở trực chuẩn để ma trận biểu diễn của φ là ma trận đường chéo gồm các phần tử trên đường chéo là những số thực dương. Sử dụng cơ sở và ma trận biểu diễn này có thể tìm thấy toán tử tự liên hợp xác định dương χ sao cho $\chi^2 = \varphi$. Ta có

$$\alpha\langle x, \psi(x)\rangle = \langle \varphi\psi(x), \psi(x)\rangle = \langle \chi^2\psi(x), \psi(x)\rangle = \langle \chi\psi(x), \chi\psi(x)\rangle.$$

Như vậy, nếu $\psi(x) \neq 0$ thì $\langle \chi\psi(x), \chi\psi(x)\rangle$ là một số thực dương, và do đó $\langle x, \psi(x)\rangle \neq 0$. Chú ý rằng do $\psi = \psi^*$ nên $\langle \psi(x), x\rangle = \langle x, \psi(x)\rangle$. Theo tính chất của tích vô hướng suy ra $\langle x, \psi(x)\rangle$ là số thực. Từ đó α là số thực.

Nếu $\psi(x) = 0$, thì từ $\alpha\langle x, x\rangle = \langle \varphi\psi(x), x\rangle = 0$ suy ra $\alpha = 0$.

26.23 Sử dụng cách chứng minh của Bài 26.22, nhưng bây giờ χ là toán tử tự liên hợp xác định không âm, và lưu ý rằng $\langle x, \psi(x)\rangle \geq 0$. Hơn nữa $\langle x, \psi(x)\rangle > 0$ nếu ψ không suy biến, và φ là xác định dương, nếu φ không suy biến.

26.24 Cho $\varphi_1, ..., \varphi_r$ là các toán tử tự liên hợp không âm, thì

$$\langle (\varphi_1 + \cdots + \varphi_r)(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \varphi_i(x), x\rangle \geq 0.$$

Ngược lại, xét cơ sở trực chuẩn mà ma trận biểu diễn của toán tử đã cho φ có dạng ma trận đường chéo. Khi đó theo Bài 26.17, đường chéo của nó gồm r số thực dương, còn lại là 0. Ma trận đó bằng tổng của r ma trận đường chéo, mà trên mỗi đường chéo có đúng một phần tử khác 0. Tương ứng với các ma trận đó là các toán tử tự liên hợp xác định không âm có hạng bằng 1 cần tìm.

26.25 Cho $x \in L$ và $y \in L^{\perp}$. Khi đó

$$\langle \varphi(y), x\rangle = \langle y, -\varphi(x)\rangle = -\langle y, \varphi(x)\rangle = 0.$$

26.26 Kí hiệu toán tử đã cho là φ. Nếu x là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng α, thì

$$\alpha\langle x, x\rangle = \langle \varphi(x), x\rangle = -\langle x, \varphi(x)\rangle = -\bar{\alpha}\langle x, x\rangle.$$

26.27 Sử dụng Bài 26.25 và qui nạp theo chiều không gian.

26.28 Trong cơ sở trực chuẩn mà φ có ma trận biểu diễn dạng đường chéo A thì $\varphi \pm i\,\mathrm{id}$ cũng có dạng đó, và các phần tử trên đường chéo khác 0, vì các phần tử của A là những số thực. Do đó các toán tử tuyến tính này khả nghịch. Bây giờ dễ kiểm tra $\psi\psi^* = \mathrm{id}$.

26.29 Chú ý rằng các toán tử liên hợp lệch đều có thể chéo hóa được, và các giá trị riêng tương ứng là ảo, hoặc có môđun bằng 1. Từ đó suy ra trong cả hai trường hợp $\mathrm{id} + \varphi$ khả nghịch. Để kiểm tra nó có là toán tử

liên hợp lệch hay không ta chỉ còn so sánh ψ và ψ^*. Chẳng hạn với phần đầu ta có

$$\begin{aligned}\psi\psi^* &= (\mathrm{id}-\varphi)(\mathrm{id}+\varphi)^{-1}[(\mathrm{id}-\varphi)(\mathrm{id}+\varphi)^{-1}]^* \\ &= (\mathrm{id}-\varphi)(\mathrm{id}+\varphi)^{-1}(\mathrm{id}+\varphi^*)^{-1}(\mathrm{id}-\varphi^*) \\ &= (\mathrm{id}-\varphi)(\mathrm{id}+\varphi)^{-1}(\mathrm{id}-\varphi)^{-1}(\mathrm{id}+\varphi) \\ &= (\mathrm{id}-\varphi)(\mathrm{id}-\varphi)^{-1}(\mathrm{id}+\varphi)^{-1}(\mathrm{id}+\varphi) = \mathrm{id}.\end{aligned}$$

Ở trên ta đã sử dụng tính giao hoán của $\mathrm{id}-\varphi$ và $\mathrm{id}+\varphi$.

26.30 a) $\varphi = \frac{\varphi+\varphi^*}{2} + \frac{\varphi-\varphi^*}{2}$. Ngược lại, nếu có φ_1, φ_2 thỏa mãn đề bài thì lấy liên hợp hai vế, ta có $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi^*$. Từ đó suy ra $\varphi_1 = \frac{\varphi+\varphi^*}{2}$ và $\varphi_2 = \frac{\varphi-\varphi^*}{2}$.

b) Tương tự $\varphi = \frac{\varphi+\varphi^*}{2} + i\frac{\varphi-\varphi^*}{2i}$.

26.31 a) Với mọi $x, y \in E$ ta có $\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle\varphi^*\varphi(x), x\rangle = \langle\varphi\varphi^*(x), x\rangle = \langle\varphi^*(x), \varphi^*(x)\rangle$.

b) Dễ kiểm tra $(\varphi - \mathrm{id})(\varphi - \mathrm{id})^* = (\varphi - \mathrm{id})^*(\varphi - \mathrm{id})$.

c) $\varphi(x) = \alpha x$ khi và chỉ khi $(\varphi - \alpha)(x) = 0$. Từ a) và b) suy ra $(\varphi - \alpha)^*(x) = 0$. Do đó $\varphi^*(x) = \bar{\alpha}x$.

d) Nếu x ứng với α và y ứng với β, theo c) ta có

$$\alpha\langle x, y\rangle = \langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle = \beta\langle x, y\rangle.$$

Suy ra $\langle x, y\rangle = 0$.

26.32 Gọi họ đã cho là $\mathcal{C}$. Lấy một $\varphi \in \mathcal{C}$. Lấy α là một giá trị riêng của φ và đặt $V_1 = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha\,\mathrm{id})$. Đây là tập các không gian riêng ứng với α và là không gian con bất biến của φ. Nếu mọi véc tơ khác 0 của V_1 đều là véc tơ riêng còn lại của các toán tử tuyến tính của $\mathcal{C}$, thì ta chọn một véc tơ $x_1 \neq 0$ trong V_1. Ngược lại gọi ψ là một toán tử tuyến tính không có tính chất đó. Vì $\varphi\chi = \psi\chi$, $\chi \in \mathcal{C}$, nên theo cách giải Bài 19.13, V_1 là không gian con bất biến của mọi toán tử tuyến tính trong $\mathcal{C}$. Xét hạn chế của các toán tử tuyến tính của $\mathcal{C}$ trên V_1 và kí hiệu $V_2 \neq 0$ là không gian con riêng của $\psi|_{V_1}$ ứng với một giá trị riêng nào đó. Khi đó $V_2 \subset V_1$, và V_2 là không gian con bất biến của ψ, cũng như của φ. Theo lí luận vừa rồi, nó cũng là không gian con bất biến của mọi toán tử tuyến tính từ $\mathcal{C}$. Tiếp tục như vậy, một lúc nào đó phải dừng (do không gian ban đầu có chiều hữu hạn), và ta tìm được một véc tơ riêng x_1 chung của cả họ. Như vậy trong mọi trường hợp ta luôn tìm được x_1 là véc tơ riêng chung. Bây giờ kí hiệu $L = (\mathbb{C}x_1)^\perp$. Với mọi $y \in L$, theo Bài 26.31 c) ta có

$$\langle x_1, \chi(y)\rangle = \langle\chi^*(x_1), y\rangle = \gamma\langle x_1, y\rangle = 0,$$

trong đó $\chi \in \mathcal{C}$ có giá trị riêng γ ứng với x_1. Như vậy L bất biến với mọi toán tử tuyến tính thuộc $\mathcal{C}$. Tương tự , L bất biến với mọi toán tử liên hợp của các toán tử tuyến tính thuộc $\mathcal{C}$. Do đó với mọi $\chi \in \mathcal{C}$ ta có $(\chi_L)^* = \chi^*|_L$, và $\chi|_L$ lại là các toán tử chuẩn tắc. Bây giờ sử dụng giả thuyết qui nạp đối với các hạn chế trên L của các toán tử tuyến tính thuộc $\mathcal{C}$, ta tìm được một cơ sở trực giao là các véc tơ riêng chung cho cả họ.

26.33 Điều kiện cần suy ra từ Bài 26.31 c). Đối với điều kiện đủ, chú ý rằng nếu x là một véc tơ riêng chung của φ và φ^* thì không gian con bù trực giao của x cũng là không gian con bất biến của cả hai toán tử này. Từ đó tồn tại một cơ sở trực chuẩn để φ chéo hóa được, và theo cơ sở đó φ^* cũng có ma trận biểu diễn là ma trận đường chéo, nên nó giao hoán với φ.

26.34 Qui nạp theo chiều của không gian E. Nếu $\dim E = 1$ thì hiển nhiên. Cho $\dim E > 1$. Chọn một véc tơ riêng định chuẩn x_1 của φ. Kí hiệu $L = \mathbb{C}x_1$. Khi đó $L^\perp \cong E/L$. Xem E/L là không gian unita thông qua một đẳng cấu như vậy. Khi đó φ cảm sinh ra một toán tử tuyến tính $\varphi_{E/L}$ của E/L. Theo giả thiết qui nạp, tồn tại cơ sở trực chuẩn $x_2, ..., x_n$ của $L^\perp$ sao cho ma trận biểu diễn của $\varphi_{E/L}$ theo ảnh của nó trong E/L có dạng tam giác. $x_1, x_2, ..., x_n$ là cơ sở cần tìm.

26.35 Cho $x \in E$ mà $\varphi(x) = 0$. Với mọi y ta có

$$\langle x, \varphi^*(y)\rangle = \langle \varphi(x), y\rangle = 0.$$

Do đó $\mathrm{Im}(\varphi^*) \subseteq (\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp$. So sánh chiều, ta suy ra chúng bằng nhau.

26.36 Giả sử tồn tại T. Đặt

$$T(1) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Khi đó với mọi $f \in \mathbb{R}[t]$, ta phải có

$$\int_0^1 f(t)T(1)dt = \int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0).$$

Thay $T(1)$ và cho $f(t) = t^m$, ta được

$$\frac{a_0}{m+1} + \frac{a_1}{m+2} + \cdots + \frac{a_n}{1+m+n} = 1,$$

với mọi số tự nhiên m. Điều đó vô lí, vì khi m đủ lớn vế trái bé tùy ý.

26.37 Xét dạng tuyến tính $\varphi(f) = f(0)$. Giả sử tồn tại h thỏa mãn đề bài. Khi đó

$$0 = \varphi(tf(t)) = \int_0^1 tf(t)h(t)dt,$$

với mọi $f(t)$. Lấy $f(t) = h(t)$ sẽ suy ra vô lí.

26.38 Nếu $n = 2k-1$ thì $\varphi^{2k}(v) = 0$. Do đó nếu $n > 1$, bằng qui nạp ta chỉ cần chứng minh $\varphi^k(v) = 0$ nếu $\varphi^{2k}(v) = 0$. Chú ý rằng φ^k lại là toán tử tự liên hợp. Do đó chỉ cần chứng tỏ nếu ψ là toán tử tự liên hợp và $\psi^2(v) = 0$, thì $\psi(v) = 0$. Nhưng điều này dễ suy ra từ đẳng thức $0 = \langle \psi^2(v), v\rangle = \langle \psi(v), \psi(v)\rangle$.

Lời giải, chỉ dẫn chương 8

27.1 Không.

27.2

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3/2 \\ 4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

27.3 Vì $a_{ij} = f(v_i, v_j)$, nên $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

27.4 Dễ kiểm tra $f+g$ và αf là các dạng song tuyến tính trên $U \times V$. Cũng dễ kiểm tra ánh xạ 0 biến mọi phần tử của $U \times V$ thành 0 đóng vai trò phần tử 0, và ánh xạ $(-f)(x,y) := -f(x,y)$ đóng vai trò phần tử đối. Việc kiểm tra 8 tiên đề của không gian véc tơ đối với các phần tử của $L^2(U,V)$ đưa về việc thử các tiên đề đó đối với các phần tử ảnh $f(x,y), \ldots$. Nhưng điều đó là thỏa mãn vì K là không gian véc tơ.

27.5 Rõ ràng các f_{ij} là các dạng song tuyến tính trên V. Giả sử $e_1, \ldots, e_n$ là cơ sở của V đối ngẫu với $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (xem Bài 15.33), tức là $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Cho $f \in L^2(V,V)$. Đặt $d_{ij} = f(e_i, e_j)$. Khi đó sử dụng tọa độ theo cơ sở $e_1, \ldots, e_n$, ta có

$$f(x,y) = \sum d_{ij}x_iy_j = \sum d_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y) = \sum d_{ij}f_{ij}(x,y).$$

Như vậy $f = \sum d_{ij} f_{ij}$, tức (f_{ij}) là hệ sinh. Nếu $\sum \alpha_{ij} f_{ij} = 0$, thì ta có

$$\alpha_{ij} = \sum \alpha_{ij} f_{ij}(e_i, e_j) = 0,$$

nên (f_{ij}) cũng độc lập tuyến tính. Vậy nó là cơ sở. Từ đó $\dim L^2(V, V) = n^2$.

27.6 Cho $u_1, .., u_n$ là cơ sở của U và $v_1, ..., v_m$ là cơ sở của V. Kí hiệu f_{ij} là dạng song tuyến tính trên $U \times V$ xác định bởi điều kiện $f_{ij}(u_i, v_j) = 1$ và $f_{ij}(u_k, v_l) = 0$ với mọi $(k, l) \neq (i, j)$. Dễ chứng minh f_{ij} lập thành cơ sở. Vậy $\dim L^2(U, V) = nm$.

27.7 Phải kiểm tra ma trận biểu diễn của tổng các dạng song tuyến tính là tổng của các ma trận biểu diễn, ma trận biểu diễn của tích vô hướng của một phần tử vô hướng với dạng song tuyến tính là tích vô hướng của ma trận biểu diễn. Rõ ràng tương ứng này là một song ánh.

27.8 Cố định cơ sở tự nhiên của K^n. Nếu dạng song tuyến tính f được viết thành tích hai dạng tuyến tính $l_1(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ và $l_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$, thì mỗi dòng của ma trận biểu diễn của f là một bội của $(a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$, nên ma trận biểu diễn có hạng bằng 1.

Ngược lại, có một dòng, chẳng hạn dòng i của ma trận biểu diễn khác 0, và các dòng còn lại là bội của nó, tức là có bộ số khác 0 là $(c_1, ..., c_n)$ để dòng thứ j là $d_j(c_1, ..., c_n)$, trong đó $d_i = 1$. Từ đó $f(x, y) = (\sum c_i x_i)(\sum d_i y_i)$.

27.9 Điều kiện đủ hiển nhiên. Điều kiện cần: cho $l_1(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ và $l_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$. Giả sử có $a_i \neq 0$ và $b_j \neq 0$. Nếu $i = j$ thì từ $l_1(e_i)l_2(e_i) = 0$ suy ra vô lí. Cho $i \neq j$. Từ $l_1(e_i)l_2(e_i) = l_1(e_j)l_2(e_j) = 0$ suy ra $b_i = 0$ và $a_j = 0$. Lại kết hợp với $l_1(e_i + e_j)l_2(e_i + e_j) = 0$ suy ra $a_ib_j = 0$. Vô lí.

27.10 Cho f là dạng song tuyến tính trên $U \times V$. Cho S_1, S_2 là hai cơ sở trên U, T_1 và T_2 là hai cơ sở trên V. Cho P là ma trận chuyển cơ sở từ S_1 sang S_2, Q là ma trận chuyển cơ sở từ T_1 sang T_2, A là ma trận biểu diễn của f theo (S_1, T_1), còn B là ma trận biểu diễn từ của f theo (S_2, T_2). Khi đó $B = P^TAQ$, trong đó P, Q khả nghịch. Theo Ví dụ 7.1, $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A$.

27.11 a) Chọn một cơ sở $e_1, ..., e_k$ của L và mở rộng nó thành cơ sở $e_1, ..., e_n$ của V. Gọi A là ma trận biểu diễn của f theo cơ sở này. Chú ý rằng $f(x, y) = 0$ với mọi $x \in L$ khi và chỉ khi $f(e_i, y) = 0$ với mọi $i \leq k$. Từ đó sử dụng tọa độ theo cơ sở này ta thấy L^* gồm các véc tơ có tọa độ thỏa mãn k phương trình tuyến tính với các dòng hệ số là k dòng đầu của A. Hạng của hệ tối đa là k, nên $\dim L^* \geq n - k$.

b) Lấy f là dạng song tuyến tính trên K^2 được cho bởi

$$f(x_1, x_2; y_1, y_2) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

Lấy $L = \{(x, x);\ x \in K\}$. Khi đó $L^* = L$.

Tuy nhiên nếu $f(x, x) \neq 0$ với mọi $0 \neq x \in L$ thì $L \cap L^* = 0$. Từ đó $\dim(L + L^*) \geq n$, nên $V = L \oplus L^*$.

27.12 Rút ra từ đẳng thức $f(x + y, x + y) = 0$ với mọi $x, y \in V$. Điều ngược lại được suy ra từ $f(x, x) = -f(x, x)$.

27.13 $f(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(y, x)] + \frac{1}{2}[f(x, y) - f(y, x)]$.

27.14 Nếu $f = 0$ thì điều khẳng định hiển nhiên đúng. Nếu $\dim V = 1$, thì mọi véc tơ có dạng αv, trong đó $v \in V$ cố định. Do $f(v, v) = 0$, suy ra $f = 0$. Vậy ta có thể giả thiết $f \neq 0$ và $\dim V \geq 2$. Khi đó tồn tại $v_1, v_2 \in V$ để $\alpha = f(v_1, v_2) \neq 0$. Thay v_1 bằng v_1/α, có thể giả thiết $f(v_1, v_2) = 1$, và do đó $f(v_2, v_1) = -1$. Do $f(x, x) = 0$, nên từ đó cũng suy ra v_1, v_2 độc lập tuyến tính. Gọi U là không gian con sinh bởi v_1, v_2, và W là không gian con của V xác định bởi

$$W = \{y \in V;\ f(v_1, y) = f(v_2, y) = 0\} = \{y \in V;\ f(x, y) = 0\ \forall x \in U\}.$$

Nếu $y \in U \cap W$ thì $y = \alpha v_1 + \beta v_2$. Từ đó $0 = f(v_1, y) = \beta$ và $0 = f(v_2, y) = -\alpha$. Do đó $y = 0$, tức là $U \cap W = 0$. Theo câu a) Bài 27.11, $\dim(U \oplus W) \geq \dim V$. Vậy $V = U \oplus W$. Bây giờ ta thấy hạn chế của f trên W lại là một dạng thay phiên. Theo qui nạp, tồn tại cơ sở $v_3, ..., v_n$ ($n = \dim V$) để ma trận biểu diễn của nó có dạng như đề bài. Bây giờ ta dễ kiểm tra ma trận biểu diễn của f theo $v_1, ..., v_n$ thỏa mãn đề ra.

27.15 a) Rõ ràng $\Phi(u) \in V^*$ với mọi $u \in U$. Ta dễ dàng kiểm tra $\Phi(\alpha u + \beta u') = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(u')$.

b) Nếu $\Phi = 0$, thì $\Phi(u) = 0$ với mọi $u \in U$, và rõ ràng $f = 0$. Để chứng minh tính toàn cấu, ta nhận xét rằng nếu $\Phi \in L(U, V^*)$ thì

$$f(u, v) := (\Phi(u))(v)$$

là một ánh xạ tuyến tính.

27.16 Dễ dàng kiểm tra đẳng thức khi $\Gamma(x) = \varphi(x, x)$, trong đó φ là dạng song tuyến tính. Điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn, xét ánh xạ sau trên $\mathbb{C}$: $\Gamma(a + ib) = a^2,\ a, b \in \mathbb{R}$. Nếu Γ là dạng toàn phương thì dạng cực của nó phải là

$$\varphi(a_1+ib_1, a_2+ib_2) = \frac{1}{2}(\Gamma(a_1+a_2+ib_1+ib_2) - \Gamma(a_1+ib_1) - \Gamma(a_2+ib_2) = a_1a_2.$$

Nhưng ánh xạ này không phải là song tuyến tính trên $\mathbb{C}$.

27.17 Dạng chính tắc xác định không duy nhất. Chẳng hạn:
a) $y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{25}{12}y_3^2$.
b) $y_1^2 - 5y_2^2 + \frac{9}{20}y_3^2$.
c) $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$.

27.18 Câu trả lời không duy nhất. Chẳng hạn

a) $$\begin{aligned} & x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 \\ &= [x_1^2 + 2x_1(2x_2 - x_3) + (2x_2 - x_3)^2] - (2x_2 - x_3)^2 - 5x_2^2 + 4x_3^2 \\ &= y_1^2 - 9x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= y_1^2 - 9(x_2 - \tfrac{2}{9}x_3)^2 + \tfrac{31}{9}x_3^2 \\ &= y_1^2 - 9y_2^2 + \tfrac{31}{9}y_3^2. \end{aligned}$$

Ở trên đã sử dụng các phép biến đổi $y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$, $y_2 = x_2 - \frac{2}{9}x_3$, $y_3 = x_3$.

b) Giải tương tự.

c) Dùng biến đổi $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$, ta được $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = y_1^2 + y_1y_2 + 2y_1y_3 + y_2y_3$, rồi giải tương tự như trên.

27.19 a) Tổng bằng $(\sum_{i=1}^n a_ix_i)^2 = y_1^2$, trong đó đặt $y_1 = \sum_{i=1}^n a_ix_i$. Về cơ bản các biến còn lại được giữ nguyên, nhưng phải đảm bảo được phép biến đổi là không suy biến. Do đó nếu $a_1 \neq 0$ thì đặt $y_j = x_j$ với mọi $j \geq 2$. Nếu $a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$ và $a_i \neq 0$ với $i \geq 2$ thì đặt $y_j = x_j$ với mọi $j \neq 1, i$ và $y_i = x_1$.

b) Sử dụng công thức truy chứng

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2 \; & + \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j \\ &= (x_1 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=2}^n x_i)^2 + \tfrac{3}{4}\textstyle\sum_{i=2}^n x_i^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{2\leq i<j\leq n} x_ix_j \\ &= y_1^2 + \tfrac{3}{4}[\textstyle\sum_{i=2}^n x_i^2 + \tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{2\leq i<j\leq n} x_ix_j] \\ &\cdots \\ &= y_1^2 + \tfrac{3}{4}y_2^2 + \cdots + \tfrac{n+1}{2n}y_n^2, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=2}^n x_i \\ y_2 &= x_2 + \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=3}^n x_i \\ &\cdots \\ y_{n-1} &= x_{n-1} + \tfrac{1}{n}x_n \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

27.20 a) Biểu thức là đối xứng với tất cả các biến, nên cố gắng sử dụng biến đổi đối xứng! Sử dụng biến đổi $x_1 = y_1 + y_2$ và $x_2 = y_1 - y_2$, còn các biến khác giữ nguyên, ta có thể biến x_1x_2 thành biểu thức chứa bình phương:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1\textstyle\sum_{i\ge 3} x_i + \sum_{3\le i<j\le n} x_ix_j\\ &= (y_1 + \textstyle\sum_{i\ge 3} x_i)^2 - y_2^2 - (\sum_{i\ge 3} x_i)^2 + \sum_{3\le i<j\le n} x_ix_j\\ &= z_1^2 - z_2^2 - (\textstyle\sum_{i=3}^n x_i^2 + \sum_{3\le i<j\le n} x_ix_j).\end{aligned}$$

Bây giờ ta có thể sử dụng Bài 27.19 b).

b) Biến x_1x_2 thành biểu thức chứa bình phương theo phương pháp Lagrange thông thường bằng phép đổi biến $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_i = y_i$, $i \ge 3$, ta được

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i-1}x_i = [y_1 + \frac{y_2 + y_3}{2}]^2 - [\frac{y_2 - y_3}{2}]^2 + \sum_{i=4}^{n} y_{i-1}y_i.$$

Như vậy theo truy chứng, cứ mỗi lần ta làm với từng nhóm 2 biến một. Cuối cùng ta được dạng chính tắc là $y_1^2 - y_2^2 + \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$ nếu n lẻ, và bằng $y_1^2 - y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$ nếu n chẵn. Từ đó cũng dễ dàng viết được công thức của phép biến đổi.

27.21 a) Khai triển ra ta được dạng toàn phương

$$\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i<j} x_ix_j.$$

Bây giờ cứ khử dần các biến x_1,... như phương pháp Lagrange thông thường, ta đưa dạng toàn phương trên về dạng (qui nạp theo n)

$$\frac{n-1}{n}y_1^2 + \frac{n-2}{n-1}y_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}y_{n-1}^2,$$

trong đó

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \tfrac{1}{n-1}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n),\\ y_2 &= x_2 - \tfrac{1}{n-2}(x_3 + x_4 + \cdots + x_n),\\ &\cdots\\ y_{n-1} &= x_{n-1} - x_n,\\ y_n &= x_n.\end{aligned}$$

b) Thực hiện phép biến đổi $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2 - y_3$, ..., $x_{n-1} = y_{n-1} - y_n$, còn $x_n = y_n + y_1$, ta thấy với $i < j < n$ thì

$$\begin{aligned} \mid i-j \mid x_i x_j &= (j-i)(y_i - y_{i+1})(y_j - y_{j+1}) \\ &= (j-i)[y_i y_j - y_i y_{j+1} - y_{i+1} y_j - y_{i+1} j + 1]. \end{aligned}$$

Như vậy khi $1 < i < j < n-1$, $y_i y_j$ xuất hiện trong các tích $x_i x_j$, $x_{i-1} x_j$, $x_i x_{j-1}$, $x_{i-1} x_{j-1}$ tương ứng với các hệ số $(j-i)$, $-(j-i+1)$, $-(j-i-1)$ (kể cả khi $j = i+1$, tức là không tồn tại tích $x_i x_{j-1}$!) và $(j-i)$. Tổng các hệ số này bằng 0. Với $i = 1$ và $1 < j < n-1$, thì $y_1 y_j$ xuất hiện trong các tích $x_1 x_j$, $x_1 x_{j-1}$, $x_j x_n$, $x_{j-1} x_n$ tương ứng với các hệ số $j-1$, $-(j-2)$, $(n-j)$ và $-(n-j+1)$. Tổng các hệ số này cũng bằng 0. Tương tự các hệ số của $y_i y_{n-1}$ (với $i < n-1$) và của $y_i y_n$, $i < n$ cũng bằng 0. Do đó dạng toàn phương đã cho sau khi đổi biến bằng

$$(n-1)y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2.$$

Giải $y_1, ..., y_n$ qua $x_1, ..., x_n$, ta được

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n), \\ y_2 &= \tfrac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n), \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + \cdots + x_n), \\ &\cdots \\ y_n &= \tfrac{1}{2}(-x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} + x_n). \end{aligned}$$

27.22 Giả sử dạng toàn phương là $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ với $a_{ij} = a_{ji}$. Chú ý rằng nếu ta thực hiện phép đổi biến

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + c_{1n} x_n, \\ y_2 &= x_2 + c_{23} x_3 + \cdots + c_{2n} x_n, \\ &\cdots \\ y_n &= x_n, \end{aligned}$$

thì định thức góc D_k^*, $k \leq n$ của dạng toàn phương mới chính là định thức của dạng toàn phương $f_k = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$ sau khi thực hiện phép đổi biến cắt ngắn sau:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + c_{1k} x_k, \\ y_2 &= x_2 + c_{23} x_3 + \cdots + c_{2k} x_k, \\ &\cdots \\ y_k &= x_k. \end{aligned}$$

Do đó $D_k^* = \mid P^T \mid \cdot D_k \cdot \mid P \mid = D_k$, trong đó P là ma trận chuyển cơ sở của phép đổi biến cắt ngắn vừa nêu (có định thức bằng 1).

27.23 Theo như Bài 27.22, thì $\lambda_1 \cdots \lambda_k = D_k.p_k^2$, trong đó p_k là định thức của phép biến đổi cắt ngắn trên k biến. Từ đó ta có điều kiện cần. Đối với điều kiện đủ, ta nhận xét rằng $p_1 = \cdots = p_r = 1$.

28.1 Giả sử A là ma trận biểu diễn của Γ theo cơ sở S của V. Ta biến V thành không gian Oclit sao cho S là cơ sở trực chuẩn. Bây giờ ta có thể sử dụng Định lí 28.8.

28.2

$$\Gamma(x) = \langle x, \varphi\varphi^T(x)\rangle = \langle \varphi^T(x), \varphi^T(x)\rangle \geq 0.$$

28.3 Sử dụng Bài 27.23.

28.4 Với $x \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{x}{|x|}) &= \Gamma(x)/\mid x \mid^2 = (c_1x_1^2 + \cdots + c_nx_n^2)/\mid x \mid^2 \\ &\geq c_n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)/\mid x \mid^2 = c_n.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra nếu x có tọa độ (theo cơ sở trực chuẩn tương ứng) là $(0, ..., 0, 1)$. Ta có thể làm tương tự với c_1.

28.5 Ta biến không gian véc tơ đã cho thành không gian Oclit E bằng cách đặt

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}[\Gamma_1(x+y) - \Gamma_1(x) - \Gamma_1(y)].$$

Khi đó theo Định lí 28.8, tồn tại cơ sở trực chuẩn để

$$\Gamma_2(x) = c_1x_1^2 + \cdots + c_nx_n^2.$$

Theo cơ sở trực chuẩn này

$$\Gamma_1(x) = \mid x \mid^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

28.6 Sử dụng ý chứng minh Định luật quán tính. Giả sử ngược lại, chỉ số quán tính dương lớn hơn p. Khi đó tồn tại cơ sở để

$$f = l_1^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2 = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2,$$

trong đó $r > p$. Ta có thể coi $l_1, ..., l_p$ là các biểu thức tuyến tính của các tọa độ mới $y_1, ..., y_n$. Khi đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$l_1 = \cdots = l_p = y_{r+1} = \cdots = y_n$$

gồm $p+(n-r)<n$ phương trình. Vì vậy nó có nghiệm không tầm thường $(u_1,...,u_r,0,...,0)$. Thay $y_1=u_1,...,y_r=u_r,y_{r+1}=\cdots=y_n=0$ vào đẳng thức trên sẽ cho ta điều vô lí.

Có thể làm tương tự đối với chỉ số quán tính âm. Xét dạng toàn phương $0=l_1^2-l_1^2$ ta thấy có thể xảy ra trường hợp bất đẳng thức thực sự.

28.7 Câu b) được suy ra từ a). Đối với câu a) ta chú ý rằng một dạng toàn phương f được đưa về dạng chính tắc $c_1y_1^2+\cdots+c_ny_n^2$ $(c_1,...,c_n\in K)$ có nghĩa là tồn tại một phép chuyển cơ sở từ $S=(e_1,...,e_n)$ (cơ sở ban đầu) sang $T=(e_1',...,e_n')$ sao cho

$$f(y_1,...,y_n)=c_1y_1^2+\cdots+c_ny_n^2,$$

trong đó $(x_1,...,x_n)$ là tọa độ của x theo S và $(y_1,...,y_n)$ là tọa độ của x theo T. Hai tọa độ này liên hệ với nhau theo công thức

$$(x_1,...,x_n)^T=P(y_1,...,y_n)^T,$$

trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T. Nếu ta xem g là dạng toàn phương trên V xác định bởi

$$g(x)=c_1x_1^2+\cdots+c_nx_n^2,$$

thì $f\circ\varphi=g$, trong đó φ là toán tử tuyến tính biến e_i thành e_i' $(i=1,...,n)$. Nói cách khác f có dạng biểu diễn chính tắc là $c_1y_1^2+\cdots+c_ny_n^2$ khi và chỉ khi f tương đương với g. Dễ kiểm tra quan hệ tương đương giữa các dạng toàn phương thực sự là quan hệ tương đương thông thường. Từ đó ta có ngay a).

28.8 Ta xét dạng chuẩn tắc của f (theo cơ sở S nào đó)

$$f(x)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_q^2.$$

Khi đó f đưa về được g có nghĩa là tồn tại các dạng tuyến tính $l_1,...,l_q$ (của các biến $x_1,...,x_n$ - là tọa độ của véc tơ theo cơ sở S) sao cho

$$g(x)=l_1^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_q^2.$$

Theo Bài 28.6, $p\le r$ và $q\le s$, trong đó r,s tương ứng là các chỉ số quán tính dương và âm của g. Một cách đối xứng $r\le p$ và $s\le q$. Do đó $r=p$ và $s=q$. Như vậy cả f và g đều có cùng dạng chuẩn tắc. Do đó chúng tương đương với nhau.

28.9 Hạng là số chẵn và kí số bằng 0.

28.10 Nếu

$$f(x) = (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + \cdots + b_nx_n),$$

thì f có ma trận biểu diễn mà dòng thứ i có dạng

$$\frac{1}{2}a_i(b_1, ..., b_n) + \frac{1}{2}b_i(a_1, ..., a_n).$$

Như vậy hạng của không gian sinh bởi các dòng ma trận tối đa là 2. Hơn nữa nếu nó có hạng bằng 2 thì $(a_1, ..., a_n)$ và $(b_1, ..., b_n)$ độc lập tuyến tính. Nếu kí số của nó bằng 0, thì ta có thể giả thiết $f = y_1^2 + y_2^2$ hoặc $f = -y_1^2 - y_2^2$. Khi đó f là nửa xác định dương hoặc nửa xác định dương. Tuy nhiên tích của hai dạng tuyến tính độc lập tuyến tính thì không thể là nửa xác định dương hay âm. Vô lí.

Để chứng minh điều ngược lại ta chỉ việc xét dạng biểu diễn chuẩn tắc của nó.

28.11 Nếu $A = C^TC = C^TIC$, trong đó I là ma trận đơn vị, thì có thể xem C là ma trận chuyển cơ sở và dạng toàn phương đã cho có một ma trận biểu diễn là ma trận đơn vị, nên nó là xác định dương. Ngược lại, nếu nó là xác định dương, thì có cơ sở để ma trận biểu diễn của nó là I. Khi đó theo công thức chuyển cơ sở ta có $A = P^TIP$.

28.12 Giả sử trong cơ sở $S = (u_1, ..., u_n)$ ta có $\Gamma(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$. Cho $x = u_i$, tức là $x_j = 0$ với mọi $j \neq i$ và $x_i = 1$, ta có $a_{ii} = \Gamma(u_i) > 0$. Điều kiện này không đủ vì $\Gamma(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ không xác định dương trên $\mathbb{R}^2$.

28.13 Sử dụng Định lí 28.6(iii), ta đưa bài toán về việc tính giá trị của tối đa 2 định thức. Từ đó a) $\lambda > 3/2$, b) $|\lambda| < 1$, c) không có λ nào.

28.14 Đưa về dạng chuẩn tắc, ta có thể viết $f = y_1^2 + \cdots + y_p^2$ và $g = z_1^2 + \cdots + z_q^2$, trong đó y_i, z_i là các dạng tuyến tính của $x_1, ..., x_n$. Chú ý rằng y_i^2 và z_j^2 cũng là các dạng toàn phương, và $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$, $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$. Do đó

$$(f, g) = \sum_{i,j=1}^{n} (y_i, z_j).$$

Với hai dạng tuyến tính tùy ý $y = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ và $z = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$, ta có

$$(y^2, z^2) = \sum_{i,j=1}^{n} a_ia_jb_ib_jx_ix_j = (\sum_{i=1}^{n} a_ib_ix_i)^2.$$

Rõ ràng dạng toàn phương này là nửa xác định dương, nên câu a) được chứng minh.

Đối với câu b) nhận xét rằng $p = q = n$. Giả sử có x để $(f, g)(x) = 0$. Từ trên suy ra $(y_i^2, z_j^2)(x) = 0$ với mọi i, j. Giả sử

$$y_i = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n \quad \text{và} \quad z_i = b_{i,1}x_1 + \cdots + b_{i,n}x_n.$$

Cố định một j và cho i chạy từ 1 đến n, từ hệ thức $(y_i^2, z_j^2)(x) = 0$ ở trên, ta được hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$a_{i,1}b_{j,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}b_{j,n}x_n = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Do ma trận hệ số của $y_1, ..., y_n$ là khả nghịch, nên ta phải có $b_{j,i}x_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., n$. Vì điều này đúng với mọi $j = 1, ..., n$ và ma trận hệ số của $z_1, ..., z_n$ cũng khả nghịch, nói riêng không có cột nào bằng 0, nên từ đó suy ra $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Điều này cho ta b).

28.15 Xét dạng toàn phương thực Γ nhận A làm ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên. Chú ý rằng từ giả thiết suy ra Γ là xác định dương. Do đó kết luận được suy ra từ Định lí Sylvester 28.6. Ngược lại, vì Γ xác định dương, nên có thể đưa về dạng tổng các bình phương, tức là ma trận biểu diễn bằng I. Sử dụng công thức chuyển cơ sở ta có ngay $A = P^TP$.

28.16 Điều kiện cần chứng minh như Định lí Sylvester: xét dạng toàn phương hạn chế trên các không gian con sinh bởi một số véc tơ trong cơ sở mà dạng toàn phương có ma trận biểu diễn đang xét.

Để chứng minh điều kiện đủ, ta chứng minh bằng qui nạp theo cấp n của ma trận. Khi $n = 1$ hiển nhiên đúng. Giả sử $n > 1$ và A là ma trận biểu diễn đang xét theo cơ sở $e_1, ..., e_n$. Kí hiệu f là dạng cực của Γ. Ta có $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Như vậy ma trận con $A(i_1, ..., i_k; i_1, ..., i_k)$ là ma trận biểu diễn của dạng toàn phương Γ hạn chế trên không gian con sinh bởi $e_{i_1}, ..., e_{i_k}$. Từ đó suy ra, nếu ta đổi chỗ các véc tơ trong cơ sở đã cho thì sẽ nhận được ma trận biểu diễn mới B của Γ cũng có tính chất như của A. Gọi r là hạng của A. Từ nhận xét trên ta thấy không mất tính tổng quát, có thể giả thiết định thức con góc cấp r của A dương. Ma trận con A' của A gồm $n - 1$ cột và dòng đầu cũng có tính chất như A. Nó là ma

trận biểu diễn của hạn chế Γ' của Γ (hay của f) trên không gian con V' sinh bởi $e_1, ..., e_{n-1}$. Theo giả thiết qui nạp, đây là một dạng toàn phương nửa xác định dương. Theo Thuật toán Lagrange, có thể tìm được cơ sở $y_1, ..., y_{n-1}$ của V' sao cho Γ' có ma trận biểu diễn là ma trận đường chéo C' dạng $\text{diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0)$, tức là $f(y_i, y_j) = 0$ nếu $1 \leq i \neq j \leq n-1$, $f(y_i, y_i) = 1$ nếu $i = 1, ..., s$ và $f(y_i, y_i) = 0$ nếu $i = s+1, ..., n-1$.

Đặt $y_n = a_1 y_1 + \cdots + a_{n-1} y_{n-1} + e_n$ với $a_i = -f(y_i, e_n)$. Khi đó $y_1, ..., y_n$ là cơ sở của V. Gọi C là ma trận biểu diễn của f theo cơ sở này. Khi đó với mọi $i < n$

$$f(y_i, y_n) = a_i + f(y_i, e_n) = 0.$$

Như vậy C là ma trận đường chéo. Xét 2 trường hợp:

$r \leq n-1$: Vì hạng của $\text{rank}\, C = \text{rank}\, A = r = \text{rank}\, A' = \text{rank}\, C'$, nên $f(y_n, y_n) = 0$, tức là các phần tử đường chéo của C không âm. Do đó Γ là nửa xác định dương.

$r = n$. Vì $\text{rank}\, C = \text{rank}\, A = r = n$, nên các phần tử đường chéo của C khác 0, và $n-1$ phần tử đầu tiên là 1. Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ $v_1, ..., v_n$ sang $y_1, ..., y_n$. Khi đó

$$f(y_n, y_n) = \mid C \mid = \mid P^T A P \mid = \mid A \mid \cdot \mid P \mid^2 > 0.$$

Vậy trong trường hợp này Γ là xác định dương.

Phản ví dụ $f(x_1, x_2) = -x_2^2$.

28.17 Gọi Γ la dạng toàn phương của $\mathbb{R}^n$ với ma trận biểu diễn A theo cơ sở tự nhiên S. Nếu $A = C^T C$ thì Γ là nửa xác định dương, nên theo Bài 28.16, A có tính chất đã nêu.

Ngược lại, theo Bài 28.16, Γ là nửa xác định dương. Do vậy tồn tại cơ sở T để Γ có dạng ma trận khối

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó I là ma trận đơn vị cấp $\leq n$. Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ T sang S, ta có

$$A = P^T J P = P^T J J P = (JP)^T (JP).$$

Rõ ràng ma trận JP có $n-r$ dòng cuối bằng 0, và $\text{rank}(JP) = \text{rank}(J) = \text{rank}\, A$.

28.18 Biến không gian véc tơ đang xét thành không gian Oclit E xác định bởi $\mid x \mid^2 = g(x)$. Gọi S là cơ sở ban đầu của không gian E và T là một cơ sở trực chuẩn của E. Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T. Khi đó

theo cơ sở mới T, f có ma trận biểu diễn là P^TAP và g có ma trận biểu diễn là ma trận đơn vị $I = P^TBP$. Một phép đổi biến tùy ý để g là tổng của các bình phương tương đương với một phép chuyển T sang cơ sở trực chuẩn mới U. Theo Định lí 28.8, dạng chính tắc của f xác định duy nhất và là nghiệm của đa thức đặc trưng

$$| P^TAP - \lambda I | = | P^TAP - \lambda P^TBP | = | A - \lambda B | \cdot | P |^2 .$$

Để chứng minh tính duy nhất, ta cũng có thể làm như sau: nếu có ma trận chuyển cơ sở P sao cho $P^TAP = D$ là một ma trận đường chéo và $P^TBP = I$ thì

$$| D - \lambda I | = | P^TAP - \lambda P^TBP | = | A - \lambda B \cdot | P |^2 .$$

Như vậy các phần tử trên đường chéo của D là các nghiệm của $| A - \lambda B |$ (kể cả bội).

28.19 Theo Bài 28.18 $a_1, ..., a_n$ là nghiệm của đa thức $| A - \lambda B | = 0$, còn $b_1, ..., b_n$ là nghiệm của đa thức $| B - \lambda A | = 0$ (kể cả số bội). Vì A và B bất khả qui, nên suy ra có thể sắp xếp lại để $a_ib_i = 1$ với mọi i.

28.20 Nếu f có ma trận biểu diễn là ma trận trực giao A, thì mọi giá trị riêng (có thể phức) của A có môđun bằng 1. Nhưng A là ma trận đối xứng, nên các giá trị riêng đều là số thực, tức là các giá trị riêng bằng ± 1. Vì vậy dạng chính tắc trục chính của f có dạng chuẩn tắc.

Ngược lại, cho A là ma trận biểu diễn của f theo một cơ sở trực chuẩn đang xét là S. Nếu f tương đương trực giao với dạng chuẩn tắc của nó có nghĩa là tồn tại ma trận trục giao P để $P^TAP = J$ là một ma trận đường chéo gồm các số ± 1. Như vậy J là ma trận trực giao. Từ đó $A = PJP^T$ là ma trận trực giao.

28.21 Mối liên hệ giữa hai ma trận biểu diễn là $B = P^TAP$, trong đó P là ma trận trực giao. Do đó $P^T = P^{-1}$. Từ đó A và B đồng dạng với nhau.

28.22 Nếu chúng tương đương trực giao với nhau, thì hai ma trận biểu diễn liên hệ với nhau như sau: $B = P^TAP$, trong đó P là ma trận trực giao.

Ngược lại nếu hai đa thức đặc trưng trùng nhau thì chúng có cùng dạng chính tắc trục chính.

28.23 Giả sử các ma trận biểu diễn đang xét theo cơ sở S của không gian véc tơ V. Có thể xem V là không gian Ôclit với S là cơ sở trực chuẩn. Gọi các giá trị riêng của A là $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Khi đó $A - \lambda I$ có các giá trị riêng là

$\lambda_1 - \lambda, \ldots, \lambda_n - \lambda$. Theo thuật toán tìm dạng chính tắc trục chính, dạng toàn phương f với ma trận biểu diễn $A - \lambda I$ có dạng chính tắc trục chính là

$$f = (\lambda_1 - \lambda)y_1^2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda)y_n^2.$$

28.24 Gọi f, g và h tương ứng là các dạng toàn phương với ma trận biểu diễn $A - \lambda I$, $B - \mu I$ và $A + B - \nu I$ theo một cơ sở trực chuẩn của không gian Oclit. Với mọi $\lambda \le a$ và $\mu \le c$, f và g là xác định dương. Do đó g là xác định dương với mọi $\nu \le a + c$. Tương tự, g là xác định âm với mọi $\nu \ge b + d$. Bây giờ hãy sử dụng Bài 28.23.

28.25 Xét dạng toàn phương Γ trên không gian Oclit $\mathbb{R}^n$ với ma trận biểu diễn A^TA theo cơ sở tự nhiên. Khi đó Γ xác định dương. Khi đó, theo Bài 27.23 và Định lí Sylvester, tồn tại ma trận tam giác trên P với các phần tử trên đường chéo chính bằng 1 để $P^T(A^TA)P = D$, trong đó D là ma trận đường chéo với các phần tử dương. Do đó có thể viết $D = C^2$, trong đó C cũng là ma trận đường chéo với các phần tử dương. Từ đó

$$A = (P^TA^T)^{-1}C \cdot CP^{-1} = (A^T)^{-1}(P^T)^{-1}C \cdot CP^{-1} =: QB,$$

trong đó $Q = (A^T)^{-1}(P^T)^{-1}C$. Ta có

$$\begin{aligned} Q^TQ &= C^TP^{-1}A^{-1}(A^T)^{-1}(P^T)^{-1}C = C^TP^{-1}(A^TA)^{-1}(P^T)^{-1}C \\ &= C^TP^{-1} \cdot ((P^T)^{-1}C^2P^{-1})^{-1} \cdot (P^T)^{-1}C \\ &= C^TP^{-1} \cdot P(C^{-1})^2P^T \cdot (P^T)^{-1}C = I. \end{aligned}$$

Như vậy Q là ma trận trực giao.

Nếu có hai biểu diễn $QB = Q'B'$ thì $(Q')^{-1}Q = B'B^{-1} = I$, vì vế trái là ma trận trực giao, còn vế phải là ma trận tam giác trên.

28.26 Đây là cách phát biểu khác của Bài 26.19. Có thể làm trực tiếp như sau (nhưng về cơ bản ý tưởng vẫn vậy, và tương tự Bài 28.25). Ta chỉ xét phân tích thứ nhất.

Vì ma trận A^TA là xác định dương, nên tồn tại ma trận đường chéo C với các phần tử dương trên đường chéo và ma trận trực giao P sao cho $P^T(A^TA)P = C^2$. Từ đó

$$A = [(A^T)^{-1}(P^T)^{-1}CP^{-1}] \cdot [PCP^{-1}] =: Q_1B_1.$$

Dễ kiểm tra Q_1 là trực giao. Để chứng minh tính duy nhất, ta giả sử có Q, B với tính chất tương tự để $QB = Q_1B_1$. Khi đó $BB_1^{-1} = Q^{-1}Q_1$. Vì B, B_1 là các ma trận của các dạng toàn phương xác định dương (Định lí

Sylvester), nên tồn tại ma trận không suy biến P để $P^TBP = I$ và P^TB_1P là ma trận đường chéo với các phần tử dương trên đường chéo. Ta có

$$P^TQ^{-1}Q_1(P^T)^{-1} = P^TBP(P^{-1}B_1^{-1}(P^T)^{-1}) = (P^TB_1P)^{-1}.$$

Từ vế phải ta suy ra các giá trị riêng là các số thực dương, còn từ vế trái chúng là các số phức có môđun bằng 1. Do đó chúng bằng 1.

28.27 Sử dụng phương pháp Lagrange đưa chúng về dạng chuẩn tắc. Hai dạng toàn phương thực tương đương với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng dạng chuẩn tắc.

a) Cả ba dạng toàn phương cùng có dạng chuẩn tắc $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

b) Không có 2 dạng nào tương đương với nhau, vì $f_1 \to y_1^2+y_2^2+y_3^2$, $f_2 \to y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $f_3 \to -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

28.28 Để làm bài toán này, trước hết ta dùng phương pháp Lagrange để đưa dạng toàn phương xác định dương về dạng chuẩn tắc. Khi này dạng toàn phương còn lại sẽ có ma trận biểu diễn mới. Tìm các giá trị riêng của ma trận này, theo Định lí 28.8, ta có dạng chính tắc của dạng toàn phương còn lại. Chú ý rằng theo Định lí Sylvester thì dạng toàn phương xác định dương phải có các hệ số của các bình phương là dương. Vậy trong cả hai câu chỉ có thể g là xác định dương.

Tuy nhiên phương pháp vừa nêu nói chung phải tính toán cồng kềnh. Một cách ngắn gọn hơn là sử dụng Bài 28.18.

a)

$$\begin{aligned} &\left| \begin{pmatrix} 21 & 2 & 14 \\ 2 & -18 & 3 \\ 14 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 11 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \right| \\ = \;& -81(\lambda^3 + 3\lambda^2 - 13\lambda - 15). \end{aligned}$$

Phương trình này có 3 nghiệm $3, -1, -5$. Vậy $f = 3y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2$.

b) Tương tự định thức trong câu b) là $9(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 13\lambda + 10)$ và $f = 5y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$.

28.29 Gọi hai ma trận biểu diễn của hai dạng toàn phương là A và B. Theo phần cuối của lời giải Bài 28.18 ta thấy nếu chúng cùng đưa về được dạng đường chéo (với các phần tử thực), thì nghiệm của đa thức $|A - \lambda B|$ phải là số thực. Vậy để tìm ví dụ chỉ cần tìm A và B vi phạm điều kiện này. Chẳng hạn $f = x_1^2 - x_2^2$ và $g = 2x_1x_2$.

28.30 Theo Định lí 28.8 ta cần tìm nghiệm của các đa thức đặc trưng.

a) $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32$. Vậy $f = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$.

b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 3$. Vậy $f = y_1^2 + \sqrt{3}y_2^2 - \sqrt{3}y_3^2$.

28.31 Đặt

$$D_n(\lambda) := D_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Khai triển theo dòng thứ nhất ta dễ dàng nhận được

$$D_n = -\lambda D_{n-1} - \frac{1}{4}D_{n-2}.$$

Ta có $D_1 = -\lambda$ và $D_2 = \lambda^2 - 1/4$. Như vậy $D_2 - \beta D_1 = \alpha^2$ và $D_2 - \alpha D_1 = \beta^2$. Theo phương pháp truy hồi (xem phần tính định thức, trang 65), ta được

$$D_n(\lambda) = -(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta),$$

trong đó

$$\alpha = (-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})/2,\ \beta = (-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})/2.$$

Dễ thấy khi $|\lambda| \geq 1$ thì $D_n(\lambda) \neq 0$. Khi $|\lambda| < 1$, ta đặt $\lambda = -\cos(x)$. Khi đó, theo công thức Moivre,

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} &= \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x) - \cos((n+1)x) \\ &\quad + i\sin((n+1)x) = 2i\sin((n+1)x). \end{aligned}$$

Vậy $D_n(\lambda) = 0$ khi và chỉ khi $\lambda = \cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, ..., n$. Từ đó dạng chính tắc trục chính của f là $\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{n+1} y_k^2$.

28.32 Phương pháp chung để giải các bài toán này là sử dụng thuật toán tìm dạng chính tắc trục chính.

a) $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162$. Nó có các nghiệm phân biệt là 3, 6, 9. Do đó ứng với mỗi giá trị riêng ta tìm được một véc tơ riêng, định chuẩn:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1),\ f_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2),\ f_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2).$$

Lấy tọa độ các véc tơ này làm cột, ta được ma trận P chuyển từ cơ sở cũ sang cơ sở mới nói trên. Tại cơ sở mới này dạng toàn phương có dạng chính tắc trục chính

$$\Gamma = 3y_1^2 + 6y_2^2 + y_3^2.$$

Theo công thức chuyển tọa độ $(x_1, x_2, x_3)^T = P(y_1, y_2, y_3)^T$, ta có thể viết phép biến đổi dưới dạng sau

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}(2y_1 - y_2 + 2y_3), \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 - y_3), \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}(-y_1 + 2y_2 + 2y_3). \end{aligned}$$

b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5$ có một nghiệm đơn $\lambda = 5$ và một nghiệm kép $\lambda = -1$. Ứng với $\lambda = 5$ ta tìm được một véc tơ riêng, định chuẩn $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Ứng với $\lambda = -1$ ta có phương trình $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Từ đó ta tìm được ngay hai véc tơ riêng, trực giao (hoặc sử dụng phương pháp Gram-Schmidt) là

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \; f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).$$

Từ đó $\Gamma = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ và phép biến đổi trực giao là

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \tfrac{2}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}y_3. \end{aligned}$$

c) Vì ma trận có dạng ma trận đường chéo khối, dễ thấy các nghiệm của đa thức đặc trưng là $0, -5$ và một nghiệm kép 5. Từ đó $\Gamma = -5y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2$. Các véc tơ riêng, định chuẩn ứng với 0 là $f_1 = \frac{1}{3}(0,0,1,2)$, ứng với -5 là $f_2 = \frac{1}{3}(0,0,-2,1)$. Các véc tơ riêng, trực chuẩn ứng với 5 là $f_3 = \frac{1}{3}(-2,1,0,0)$ và $f_4 = \frac{1}{3}(0,0,-2,1)$.

d) Câu này ta có thể làm đơn giản, dựa vào nhận xét:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_3 + x_4)^2.$$

28.33 Dựa vào công thức tính định thức ở Ví dụ 10.7 ta dễ dàng tính được các giá trị riêng trong câu a) là $(n+1)/2$ và $1/2$ với số bội $n-1$, còn

ở câu b) là $(n-1)/2$ và $-1/2$ với số bội $n-1$. Ứng với nghiệm bội, hệ phương trình của các véc tơ riêng chỉ gồm 1 phương trình. Từ đó cũng dễ dàng tìm được một hệ trực giao các véc tơ riêng. Chuẩn hóa đi, ta sẽ được một cơ sở trực chuẩn tại đó Γ có dạng chính tắc trục chính.

28.34 Để làm bài toán này, trước hết ta dùng phương pháp Lagrange để đưa dạng toàn phương xác định dương về dạng chuẩn tắc. Khi này dạng toàn phương còn lại sẽ có ma trận biểu diễn mới. Bây giờ ta sử dụng Thuật toán tìm dạng chính tắc trục chính đối với ma trận mới này.

Chú ý rằng theo Định lí Sylvester thì dạng toàn phương xác định dương phải có các hệ số của các bình phương là dương. Vậy trong cả hai câu chỉ có thể g là xác định dương.

a) $g = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$. Như vậy ta có $g = y_1^2 + y_2^2$ với

$$x_2 = y_2/\sqrt{3},\ x_1 = y_1 + y_2/\sqrt{3}.$$

Từ đó $f = -4y_1y_2/\sqrt{3} - 4y_2^2/3$. Ta có

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - \frac{2}{3}).$$

Hai giá trị riêng là -2 và $2/3$. Các véc tơ riêng định chuẩn tương ứng là

$$u_1 = (1/2, \sqrt{3}/2),\ u_2 = (\sqrt{3}/2, -1/2).$$

Từ đó dạng chính tắc của f là $-2z_1^2 + \frac{2}{3}z_2^2$. Phép biến đổi là

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2,\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2.$$

Suy ra $x_1 = z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_2,\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}z_2$.

b) Nhìn chung sử dụng phương pháp Lagrange một cách máy móc sẽ làm tính toán cồng kềnh. Tùy đặc thù bài toán, ta có thể thay đổi chút ít thì sẽ làm đơn giản khá nhiều tính toán. Trong bài này, trước hết để khử các tích có chứa x_1 ta biến đổi

$$g = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + 13x_2^2 - 10x_2x_3 + 2x_3^2.$$

Nếu đến đây thực hiện tiếp phương pháp Lagrange, thì sẽ nhận được phép biến đổi tuyến tính có hệ số chứa căn. Tuy nhiên ta thấy

$$\begin{aligned} 13x_2^2 - 10x_2x_3 + 2x_3^2 &= 9x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (3x_2 - x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, trong đó

$$x_1 = y_1 - y_3,\ x_2 = y_2 - y_3,\ x_3 = 2y_2 - 3y_3.$$

Thay vào f ta được luôn dạng chính tắc trục chính: $f = y_1^2 - 3y_2^2 + 2y_3^2$.

29.1 Chỉ cần chứng tỏ $f(A)^* = f(A^*) = f(A)$.

29.2 Chỉ việc sử dụng định nghĩa $\Gamma(z) = f(z,z)$ và các tính chất của dạng song tuyến tính liên hợp.

29.3 Nếu f là dạng Hermite thì $\Gamma(x) = \overline{\Gamma(x)}$. Ngược lại sử dụng Bổ đề 29.6 (hoặc Bài 29.2) ta dễ dàng chứng tỏ $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$ với mọi $x, y \in V$.

29.4 Kí hiệu x_S là véc tơ cột tọa độ của x theo một cơ sở trực chuẩn S nào đó. Kí hiệu φ là toán tử tuyến tính của E nhận $\bar{A}$ làm ma trận biểu diễn theo cơ sở S. Khi đó $f(x,y) = x_S^T A \bar{y}_S$ và

$$\langle x, \varphi(y)\rangle = x_S^T \cdot \overline{(\bar{A}y_S)} = x_S^T A \bar{y}_S.$$

Như vậy chỉ còn phải chứng tỏ φ được xác định duy nhất. Nếu có toán tử tuyến tính ψ thỏa mãn hệ thức đã cho thì $\langle x, \varphi(y) - \psi(y)\rangle = 0$ với mọi x, y. Chọn $x = \varphi(y) - \psi(y)$ ta suy ta $\varphi = \psi$.

29.5 Sử dụng định nghĩa ta dễ dàng kiểm tra trực tiếp là $\mathrm{Tr}((A+A')\bar{B}) = \mathrm{Tr}(A\bar{B}) + \mathrm{Tr}(A'\bar{B})$, ...

29.6 Ta xét dạng toàn phương liên hợp $\Gamma = x_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1 x_2$. Giả sử nó chéo hóa được. Khi đó tồn tại ma trận không suy biến $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ để

$$P^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bar{P} = \begin{pmatrix} 2\bar{a}c + a\bar{c} & 2\bar{b}c + a\bar{d} \\ 2\bar{a}d + b\bar{c} & 2\bar{b}d + b\bar{d} \end{pmatrix}$$

là ma trận đường chéo. Từ đó suy ra $\bar{b}c = a\bar{d} = 0$. Vì vậy $bc = ad = 0$ và P suy biến. Vô lí.

29.7 a) Xét dạng song tuyến tính liên hợp nhận A làm ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên, rồi áp dụng Định lí 29.8.

Ta có thể chứng minh trực tiếp như sau: do $xA\bar{x}^T$ là một số, nên

$$\overline{xA\bar{x}^T} = \overline{xA\bar{x}^T}^T = (\bar{x}\bar{A}x^T)^T = xA^*\bar{x} = xA\bar{x}^T.$$

b) Nếu Γ là dạng toàn phương Hermite và A là ma trận biểu diễn của nó theo cơ sở S, thì $\Gamma(x) = x_S^T A\overline{x_S}$, trong đó x_S là véc tơ cột tọa độ của x theo S.

29.8 Gọi Γ là dạng toàn phương Hermite nhận A làm ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên của $\mathbb{C}^n$. Theo Định lí 29.10 có một cơ sở trực chuẩn S sao cho Γ có dạng biểu diễn

$$\Gamma(y) = c_1 \mid y_1 \mid^2 + \cdots + c_n \mid y_n \mid^2,$$

trong đó $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Lấy $c > \max(-c_1, ..., -c_n)$. Gọi Γ' là dạng toàn phương Hermite nhận $A + cI$ làm ma trận biểu diễn theo cơ sở tự nhiên. Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở tự nhiên sang S. Khi đó

$$P^T I\bar{P} = P^T\bar{P} = I.$$

Suy ra dạng biểu diễn của Γ' theo S là

$$\Gamma'(y) = (c - c_1) \mid y_1 \mid^2 + \cdots + (c - c_n) \mid y_n \mid^2 > 0 \ \forall y \neq 0.$$

29.9 Do A là ma trận Hermite nên tồn tại ma trận unita P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo $\text{diag}(c_1, ..., c_n)$, với $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Theo Bài 5.9 ta có

$$\text{Tr}(AA) = \text{Tr}(P^{-1}AAP) = \text{Tr}(P^{-1}APP^{-1}AP) = \text{Tr}(\text{diag}(c_1^2, ..., c_n^2)) \geq 0.$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi $c_1 = \cdots = c_n = 0$, tức $A = 0$.

29.10 Nhận xét rằng nếu $A = A^*$, thì luôn tồn tại ma trận unita P sao cho $A = P^T D\bar{P}$, trong đó D là ma trận đường chéo với các số thực trên đường chéo. A là xác định dương thì $D = B^2$, trong đó B là ma trận đường chéo với các số thực dương trên đường chéo. Khi đó

$$A = P^T B.P^{-1}PB\bar{P} = (P^T B\bar{P}^T)(PB\bar{P}) =: CC^*,$$

trong đó $C = P^T B\bar{P}^T$ (chú ý rằng từ $PP^* = I$ ta suy ra $P^{-1} = \bar{P}^T$).

Ngược lại, ta có $x(CC^*)\bar{x}^T = (xC) \cdot \overline{xC}^T = \langle xC, xC\rangle > 0$ với mọi $x \neq 0$ (vì C không suy biến).

29.11 Giải tương tự Bài 28.26.

29.12 Nhận xét rằng nếu $A = A^*$, thì luôn tồn tại ma trận unita P sao cho $A = P^T D\bar{P}$, trong đó D là ma trận đường chéo với các số thực trên

đường chéo. A là xác định dương thì $D = C^2$, trong đó C là ma trận đường chéo với các số thực dương trên đường chéo. Khi đó

$$A = P^T C(.P^T)^{-1} P^T C\bar{P} = (P^T C(.P^T)^{-1})(P^T C(.P^T)^{-1}) =: B^2.$$

Để chứng minh tính duy nhất ta để ý rằng, nếu $A = B^2$ thì $AB = BA$, và một dạng toàn phương Hermite xác định dương khi và chỉ khi các giá trị riêng của nó là dương. Xem A, B là ma trận biểu diễn của hai toán tử tuyến tính mà ta cũng kí hiệu lại là A và B theo cơ sở tự nhiên của $\mathbb{C}^n$. Sử dụng chứng minh của Bài 19.2, ta suy ra nếu $\mathbb{C}^n$ phân tích thành các không gian con riêng $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ sao cho $A\,|_{V_i} = \alpha_i \,\mathrm{id}_{V_i}$, trong đó $\alpha_1, ..., \alpha_m > 0$ là các giá trị riêng khác nhau của A, thì $B\,|_{V_i} = \sqrt{\alpha_i}\,\mathrm{id}_{V_i}$. Suy ra B được xác định duy nhất.

29.13 Chéo hóa bằng ma trận unita, ta có thể giả thiết $A = \mathrm{diag}(c_1, ..., c_n)$, trong đó $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Bây giờ viết $c_i = p_i - q_i$, trong đó p_i, q_i là những số thực dương, ta sẽ suy ra điều cần phải chứng minh.

29.14 Chéo hóa A, ta cũng đồng thời chéo hóa $I \pm iA$ và các ma trận này có các phần tử trên đường chéo khác 0.

29.15 Cách chứng minh về cơ bản giống như trường hợp các dạng toàn phương thực.

29.16 Ta chỉ cần chứng minh điều kiện cần. Theo Định lí Sylvester, ma trận Hermite A có các định thức con góc là những số thực dương khi và chỉ khi A là ma trận Hermite xác định dương. Điều kiện để $AB = (AB)^*$ tương đương với $AB = B^{-1}A$. Ta hiểu đẳng thức này theo nghĩa sau $I \cdot (AB) = B^{-1} \cdot A$. Do AB là ma trận xác định dương, nên đây là hai phân tích thỏa mãn Bài 29.11. Suy ra $B^{-1} = I$.

29.17 Ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Cho $e_1, ..., e_n$ là các véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng của φ. Xem E như là không gian unita nhận $e_1, ..., e_n$ là cơ sở trực chuẩn. Khi đó φ có ma trận biểu diễn là ma trận đường chéo và thỏa mãn điều kiện cần xây dựng. Như vậy ta có thể xét dạng toàn phương Hermite sau

$$\Gamma(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_n\bar{x}_n.$$

Lời giải, chỉ dẫn chương 9

30.2 b) Nếu $u = \sum u_i \in U,\ u_i \in U_i$ và $v = \sum v_j \in V,\ v_j \in V_j$ thì ta định nghĩa

$$\varphi(u, v) = \sum \varphi_{ij}(u_i, v_j).$$

Dễ kiểm tra đây là ánh xạ được hoàn toàn xác định và là song tuyến tính. Nếu có ánh xạ thứ hai φ' mà hạn chế của nó trên $U_i \times V_j$ là $\varphi_{i,j}$ thì từ $(u, v) = \sum_i (u_i, v) = \sum_i \sum_j (u_i, v_j)$ ta suy ra

$$\varphi'(u, v) = \sum_i \sum_j \varphi'(u_i, v_j) = \sum \varphi_{ij}(u_i, v_j) = \varphi(u, v).$$

30.3 Dễ dàng kiểm tra theo định nghĩa. Thực chất φ' là ánh xạ hạn chế trên

$$0 \times \cdots \times 0 \times V_{j_1} \times 0 \times \cdots \times 0 \times V_{j_2} \times \cdots \times V_{j_q} \times 0 \times \cdots \times 0.$$

30.4 Để phép tương ứng không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện, ta phải có $\varphi(u, v) \in W'$ với mọi $u \in U'$ hoặc $v \in V'$. Thật vậy, nhận xét rằng $\varphi(0, v) = \varphi(u, 0) = 0$. Nếu $u \in U'$ ta có $\bar{u} = \bar{0}$. Do đó với mọi $v \in V$ ta phải có

$$W' = \varphi(0, v) + W' = \bar{\varphi}(\bar{0}, \bar{v}) = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(u, v) + W'.$$

Suy ra $\varphi(u, v) \in W'$. Tương tự khi $v \in V'$ và u tùy ý. Đây cũng là điều kiện đủ, vì nếu $u_1 - u_2 \in U'$ và $v_1 - v_2 \in V'$, thì

$$\varphi(u_1, v_1) - \varphi(u_2, v_2) = \varphi(u_1 - u_2, v_1) + \varphi(u_2, v_1 - v_2) \in W'.$$

Bây giờ dễ chứng tỏ $\bar{\varphi}$ là ánh xạ song tuyến tính.

Với ánh xạ đa tuyến tính $\varphi : \prod_{i=1}^{p} V_i \to U$ và các không gian con $V_i' \subseteq V_i$, $U' \subseteq U$, ta phải có: nếu một thành phần thứ i nào đó $v_i \in V_i'$ thì $\varphi(v_1, ..., v_p) \in U'$.

30.5 Dựa vào Định lí 30.2 hoặc 30.3 có thể chứng minh

$$\dim L(V_1, ..., V_p; U) = dd_1 \cdots d_p.$$

Ứng với mỗi bộ phần tử $(\alpha_{i,i_1,...,i_p})$, trong đó có đúng một phần tử bằng 1, còn lại là 0, ta xây dựng được một ánh xạ đa tuyến tính. Các ánh xạ này là cơ sở của $L(V_1, ..., V_p; U)$. Số bộ phần tử như vậy là $dd_1 \cdots d_p$.

30.6 Ta xây dựng đẳng cấu $F : L(U,V;W) \to L(U,L(V,W))$ như sau: Mỗi $\varphi \in L(U,V;W)$ ta đặt tương ứng với ánh xạ $F(\varphi) \in L(U,L(V,W))$ xác định như sau:

$$[F(\varphi)(u)](v) = \varphi(u,v).$$

Dễ dàng chứng tỏ với mỗi $u \in U$, ánh xạ $F(\varphi)(u)$ là tuyến tính, và bản thân F là ánh xạ tuyến tính và là đơn ánh. Ngược lại, nếu $\psi \in L(U,L(V,W))$ thì với $\varphi(u,v) = [\psi(u)](v)$, ta dễ dàng chứng minh $F(\varphi) = \psi$.

Trường hợp tổng quát, ta có

$$L(V_1,...,V_p;U) \cong L(V_i, L(V_1,...,\widehat{V_i},...,V_p;U)),$$

trong đó kí hiệu $\widehat{V_i}$ nghĩa là loại không gian này ra khỏi liệt kê.

30.7 Dễ dàng kiểm tra nó là ánh xạ song tuyến tính. Nếu $v \in V$ tùy ý và $(e_i) \subset U$ là một cơ sở, ta kí hiệu $\psi \in L(U,V)$ xác định bởi $\psi(e_i) = v$. Khi đó $\beta(\psi, e_i) = v$.

30.8 Chú ý rằng $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ với mọi $\bar{y} \in V_2/N_2(\varphi)$ khi và chỉ khi $\varphi(x,y) = 0$ với mọi $y \in V_2$.

30.9 Có thể giả thiết $V \neq 0$. Khi đó $V^* \neq 0$. Nếu $g \in V^*$ khác 0 thì tồn tại $v \in V$ sao cho $g(v) \neq 0$. Từ đó suy ra $N_1(\varphi) = 0$.

31.1 Với mọi $\alpha_j \in K,\ u_j \in U,\ v_j \in V$, ta có

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(u_j \otimes v_j) = \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j u_j) \otimes v_j = \sum_{j=1}^{r} u'_j \otimes v_j.$$

Trong các biểu diễn $z = \sum_{j=1}^{r} u_j \otimes v_j$ ta chọn biểu diễn có r bé nhất. Ta sẽ chứng minh rằng các u_i và v_i là độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử ngược lại u_i là phụ thuộc tuyến tính. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $u_1,...,u_p$ độc lập tuyến tính cực đại với $p < r$. Biểu diễn $u_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ji} u_i$, ta được

$$z = \sum_{j=1}^{r} u_j \otimes v_j = \sum_{j=1}^{r} (\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ji} u_i) \otimes v_j = \sum_{i=1}^{p} u_i \otimes (\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^{p} u_i \otimes v'_i.$$

Vô lí. Tương tự đối với v_i.

31.3 Ánh xạ $v \mapsto v \otimes 1$ là một đơn ánh (xem Bổ đề 31.6) và là ánh xạ tuyến tính từ V vào $V \otimes K$. Một phần tử tùy ý của $V \otimes K$ có dạng

$$\sum_j (v_j \otimes \alpha_j) = \sum_j \alpha_j (v_j \otimes 1) = (\sum_j \alpha_j v_j) \otimes 1,$$

nên ánh xạ vừa nêu là toàn ánh.

31.4 Theo Định lí 31.3, tồn tại ánh xạ tuyến tính

$$\varphi : K^n \otimes K^m \to M(m, n; K)$$

sao cho

$$\varphi : (a_1, ..., a_n) \otimes (b_1, ..., b_m) \mapsto (a_1, ..., a_n)^T \cdot (b_1, ..., b_m).$$

Lấy $(a_1, ..., a_n)$ là một véc tơ e_i trong cơ sở tự nhiên của K^n và $(b_1, ..., b_m)$ là một véc tơ f_j trong cơ sở tự nhiên của K^m, ta thấy $\varphi(e_i, f_j) = O_{ij}$. Các ma trận này lập thành cơ sở của $M(n, m; K)$, nên φ là toàn ánh. Vì $\dim K^n \otimes K^m = nm = \dim M(n, m; K)$, nên φ là đẳng cấu.

31.5 Theo Định lí 31.3, ánh xạ đã cho cảm sinh ra ánh xạ tuyến tính: $\varphi : K^n \otimes V \to \oplus^n V$ sao cho $\varphi((a_1, ..., a_n) \otimes v) = (a_1 v, ..., a_n v)$. Xét ánh xạ tuyến tính:

$$\psi : \oplus^n V \to K^n \otimes V;\ (v_1, ..., v_n) \mapsto (1, 0, ..., 0) \otimes v_1 + \cdots + (0, ..., 0, 1) \otimes v_n.$$

Dễ kiểm tra $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ và $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

31.6 Theo Định lí 31.3, với mỗi $\varphi \in L(U, V; W)$ tồn tại duy nhất $\tilde{\varphi} \in L(U \otimes V, W)$ sao cho $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \otimes$. Ta gọi tương ứng này là ánh xạ F. Rõ ràng F là đơn ánh. Nếu $h \in L(U \otimes V, W)$, thì $\psi := h \circ \otimes \in L(U, V; W)$ (xem Bài 31.2), nên $F(\psi) = h$. Vậy F là toàn ánh. Nếu $\varphi_1, \varphi_2 \in L(U, V; W)$ và $\alpha, \beta \in K$, thì

$$\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 = (\alpha\tilde{\varphi}_1 + \beta\tilde{\varphi}_2) \circ \otimes.$$

Do đó

$$F(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\tilde{\varphi}_1 + \beta\tilde{\varphi}_2 = \alpha F(\varphi_1) + \beta F(\varphi_2).$$

31.7 Ánh xạ $\varphi' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ xác định bởi

$$\varphi'((a_1, ..., a_n), \alpha) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$$

là ánh xạ song tuyến tính. Do vậy theo Định lí 31.3 tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ sao cho $\varphi' = \varphi \circ \otimes$. Vì φ' là toàn cấu, nên φ cũng là toàn cấu. Giả sử $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ và $x = \sum_j (a_{j,1}, ..., a_{j,n}) \otimes \alpha_j$. Đặt $\alpha_j = c_j + id_j$, trong đó $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, ta có

$$0 = \varphi(x) = (\sum_j c_j a_{j,1}, ..., \sum_j c_j a_{j,n}) + i(\sum_j d_j a_{j,1}, ..., \sum_j d_j a_{j,n}).$$

Suy ra

$$\sum_j c_j a_{j,1} = \cdots = \sum_j c_j a_{j,n} = \sum_j d_j a_{j,1} = \cdots = \sum_j d_j a_{j,n} = 0.$$

Do đó

$$\begin{aligned} x &= \textstyle\sum_j (a_{j,1}, ..., a_{j,n}) \otimes (c_j + id_j) \\ &= \textstyle\sum_j (a_{j,1}, ..., a_{j,n}) \otimes (c_j \cdot 1) + \sum_j (a_{j,1}, ..., a_{j,n}) \otimes (d_j \cdot i) \\ &= \textstyle\sum_j c_j (a_{j,1}, ..., a_{j,n}) \otimes 1 + \sum_j d_j (a_{j,1}, ..., a_{j,n}) \otimes i \\ &= \textstyle(\sum_j c_j a_{j,1}, ..., \sum_j c_j a_{j,n}) \otimes 1 + (\sum_j d_j a_{j,1}, ..., \sum_j d_j a_{j,n}) \otimes i = 0. \end{aligned}$$

31.8 Trước hết ta phải kiểm tra phép nhân được định nghĩa đúng là phép toán. Ta kí hiệu $\mathcal{T}$ là không gian véc tơ nhận $V \times L$ làm cơ sở và

$$F : \mathcal{T} \to \mathcal{T},\ F(\sum_j c_j(v_j, \beta_j)) = \sum_j c_j(v_j, \alpha\beta_j),$$

trong đó $c_j \in K,\ \alpha, \beta_j \in L$ và $v_j \in V$. Từ cách xây dựng tích tenxơ, ta chỉ cần chứng tỏ nếu $x \in H$, thì $F(x) \in H$. Từ cách xây dựng của F ta thấy chỉ cần chứng minh điều này cho các phần tử sinh của H nêu trong Định nghĩa 31.1. Điều này ta có thể dễ dàng kiểm tra trực tiếp.

Bây giờ ta dễ dàng kiểm tra các tiên đề của phép nhân vô hướng.

31.9 Theo Bài 31.7, φ là một song ánh bảo toàn phép cộng. Chỉ còn phải kiểm tra nó bảo toàn phép nhân vô hướng.

31.10 Tương tự như Bài 31.7 nhưng phức tạp hơn trong việc chứng tỏ tính chất đơn ánh của ánh xạ. Ta phải cố định một cơ sở của L như là không gian véc tơ trên K. Cơ sở này có thể vô hạn, nhưng khi biểu diễn mỗi phần tử của L qua các phần tử cơ sở, thì thực chất ta chỉ còn làm việc với hữu hạn phần tử.

31.11 Ta xét ánh xạ song tuyến tính

$$\varphi : V \times V \to V \otimes V;\ \varphi(u, v) = A(u) \otimes A(v).$$

Theo Định lí 31.3, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $F : V \otimes V \to V \otimes V$ sao cho $\varphi = F \circ \otimes$.

31.12 Hãy xét ánh xạ song tuyến tính

$$\varphi : U \times V \to U \otimes V;\ \varphi(u, v) = A(u) \otimes B(v).$$

31.13 Xét ánh xạ song tuyến tính:

$$\omega : C(S) \times C(T) \to C(S \times T);\ (f, g)(s, t) \mapsto f(s)g(t).$$

Ta kí hiệu ánh xạ $(s, t) \mapsto f(s)g(t)$ là fg. Theo Định lí 31.3 tồn tại ánh xạ tuyến tính: $\varphi : C(S) \otimes C(T) \to C(S \times T)$ sao cho $\varphi(f \otimes g) = fg$.

Ngược lại, ta kí hiệu F_{ij} là hàm có giá trị bằng 1 tại (e_i, t_j) và bằng 0 tại các phần tử khác của $S \times T$, $f_i \in C(S)$ (t.ư. g_j) là hàm có giá trị bằng 1 tại e_i (t.ư t_j) và bằng 0 tại các phần tử khác của S (t.ư. T). Khi đó, với mỗi $H \in C(S \times T)$ chỉ có hữu hạn phần tử $s_i \in S$ và $t_j \in T$ sao cho $H(s_i, t_j) \neq 0$. Suy ra $H = \sum H(s_i, t_j) f_i g_j$. Bây giờ ta có thể xây dựng

$$\psi : C(S \times T) \to C(S) \otimes C(T);\ H \mapsto \sum H(s_i, t_j) f_i \otimes g_j.$$

Ta có thể dễ dàng kiểm tra $\varphi\psi = \mathrm{id}$ và $\psi\varphi = \mathrm{id}$.

31.14 $U = V = K^2$. $(1, 0) \otimes (1, 0) + (0, 1) \otimes (0, 1) = (-1, 0) \otimes (-1, 0) + (0, -1) \otimes (0, -1)$.

Gọi U_1, V_1 tương ứng là các không gian con của U, V sinh bởi các u_i, u'_j và các v_i, v'_j. Kí hiệu S là cơ sở của U_1 mở rộng u_i và T là cơ sở của V_1 mở rộng v_i. Với mỗi $j = 1, ..., s$, ta viết

$$\begin{aligned} u'_j &= \textstyle\sum_{i=1}^{s} a_{ji} u_i + \sum_{u_i \neq u_* \in S} a_{j*} u_*, \\ v'_j &= \textstyle\sum_{i=1}^{s} b_{ji} u_i + \sum_{v_i \neq v_* \in T} b_{j*} v_*, \end{aligned}$$

trong đó $a_{ji}, b_{ji} \in K$. Thay $\sum u'_j \otimes v'_j = \sum a_{jk} b_{jl} u_k \otimes v_l + *$ vào biểu diễn thứ hai và sử dụng Định lí 31.8 để so sánh với biểu diễn thứ nhất của x, ta phải có $A^T B = I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp r còn $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Từ đó $s \geq \operatorname{rank} A \geq r$ (xem Bài 7.8). Do tính đối xứng ta cũng có $s \leq r$.

31.15 Điều kiện cần: vì $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \neq 0$, nên $u_i \neq 0$ với mọi i. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $v_i = \lambda_i u_i$ với mọi $i \leq q$ và v_i, u_i là độc lập tuyến tính với mọi $i > q$. Khi đó

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p = \lambda_1 \cdots \lambda_q u_1 \otimes \cdots \otimes u_q \otimes v_{q+1} \otimes \cdots \otimes v_p.$$

Ta phải có $\lambda_1 \cdots \lambda_q \neq 0$. Nếu $q < p$ thì vế phải độc lập tuyến tính với $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ (Định lí 31.8). Từ đó ta suy ra $q = p$ và $\lambda_1 \cdots \lambda_p = 1$.

31.16 Ta thấy ánh xạ $(u, v) \mapsto \varphi(u) \otimes \psi(v)$ là song tuyến tính, nên nó được mở rộng duy nhất thành ánh xạ tuyến tính $\varphi \otimes \psi$.

31.17 Tạm thời kí hiệu $\varphi \otimes' \psi$ là tích ten xơ của hai ánh xạ được định nghĩa trong Bài 31.16. Ánh xạ song tuyến tính:

$$L(U, U') \times L(V, V') \longrightarrow L(U \otimes V, U' \otimes V'); \ (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes' \psi$$

xác định duy nhất ánh xạ tuyến tính F. Giả sử $0 \neq \omega = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \otimes \psi_i \in \operatorname{Ker} F$. Theo Bài 31.1, ta có thể giả thiết φ_i và ψ_i là hai hệ độc lập tuyến tính. Với mọi $u \in U$ và $v \in V$ ta có

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(u) \otimes \psi_i(v) = 0.$$

Chọn $u_0 \in U$ sao cho $\varphi_1(u_0) \neq 0$. Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết $\varphi_1(u_0), ..., \varphi_p(u_0)$ là độc lập tuyến tính, còn $\varphi_j(u_0)$, $j > p$ biểu diễn qua các véc tơ trước đó:

$$\varphi_j(u_0) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ji} \varphi_i(u_0).$$

Khi đó với mọi $v \in V$ ta có

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(u_0) \otimes \Big(\sum_{j=p+1}^{r} \alpha_{ji} \psi_j(v) + \psi_i(v) \Big) = 0.$$

Theo Bổ đề 31.6,

$$\sum_{j=p+1}^{r} \alpha_{ji} \psi_j(v) + \psi_i(v) = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của ψ_i. Suy ra $\varphi_1(u_0), ..., \varphi_r(u_0)$ độc lập tuyến tính. Từ Bổ đề 31.6, ta suy ra $\varphi_1(v) = \cdots = \varphi_r(v) = 0$ với mọi v, tức là $\omega = 0$.

Bây giờ ta xét trường hợp $\dim U, \dim V < \infty$. Giả sử $e_1, ..., e_n$ là cơ sở của U và $f_1, ..., f_m$ là cơ sở của V và $\omega \in L(U \otimes V, U' \otimes V')$. Khi đó với mọi i, j ta có

$$\omega(e_i \otimes f_j) = \sum_{k=1}^{p} u'_{ijk} \otimes v'_{ijk}.$$

(Chú ý: ta có thể chọn p chung cho tất cả i, j.) Kí hiệu $\varphi_{ijk} \in L(U, U')$ là ánh xạ tuyến tính có giá trị tại e_i bằng u'_{ijk} và 0 tại e_l, $l \neq i$. Tương tự ta xây dựng $\psi_{ijk} \in L(V, V')$. Bây giờ dễ thấy

$$\omega = \sum_{i,j,k} \varphi_{ijk} \otimes \psi_{ijk}.$$

31.18 Cho $U = V$ là không gian véc tơ với cơ sở là $e_1, e_2, \ldots$ (tập đếm được) và $U' = V' = K$. Nếu $x \in U$, ta kí hiệu $(x_1, x_2, \ldots)$ là tọa độ của nó theo cơ sở đã cho. Chú ý rằng $K \otimes K \cong K$ có cơ sở là $1 \otimes 1$. Xét ánh xạ tuyến tính được xác định bởi

$$\omega(x \otimes y) = \sum_i x_i y_i.$$

Nếu F là toàn ánh thì có thể viết $\omega(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x)\psi_j(y)$. Chú ý rằng $\varphi_j, \psi_j \in L(V, K)$ là các dạng tuyến tính, và $\dim V = \infty$, nên tồn tại $x \neq 0$ để $\varphi_j(x) = \psi_j(x) = 0$. Từ đó $\omega(x \otimes x) = 0$, nhưng điều này không thể có nếu xuất phát từ định nghĩa.

31.19 Câu a) suy ra từ định nghĩa $\varphi \otimes \psi$. Đối với b) ta chỉ cần chứng tỏ $\subseteq$. Giả sử $\sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i \in \mathrm{Ker}(\varphi \otimes \psi)$. Có thể giả thiết $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_p)$ độc lập tuyến tính cực đại và $\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ji}\varphi(u_i)$. Khi đó

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \varphi(u_i) \otimes \psi(\sum_{j=p+1}^{r} \alpha_{ji} v_j + v_i).$$

Theo Bổ đề 31.6 suy ra

$$\sum_{j=p+1}^{r} \alpha_{ji} v_j + v_i = v'_i \in \mathrm{Ker}(\psi);\ i = 1, \ldots, p.$$

Đặt

$$u'_j = u_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ji} u_i;\ j = p+1, \ldots, r.$$

Khi đó $u'_j \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ và

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{p} u_i \otimes v'_i + \sum_{j=p+1}^{r} u'_j \otimes v_j.$$

31.20 Dựa vào Bài 31.19 và Bài 31.17.

31.21 Xét ma trận biểu diễn của $\varphi \otimes \psi$ theo cơ sở $e_i \otimes f_j$ của $U \otimes V$, rồi sử dụng Bài 12.31.

31.22 Bằng qui nạp, ta có thể đưa về trường hợp $n = 2$. Chú ý rằng $K \otimes K \cong K$. Khi đó đây là trường hợp đặc biệt của Bài 31.17.

31.23 Ánh xạ song tuyến tính:

$$U^* \times V \to L(U,V);\ (\varphi, v)(u) = \varphi(u)v$$

xác định một ánh xạ tuyến tính: $F : U^* \otimes V \to L(U,V)$. Nếu $\sum_i \varphi_i \otimes v_i \in \operatorname{Ker} F$, ta có thể chọn sao cho v_i độc lập tuyến tính. Khi đó với mọi u và i sẽ có $\varphi_i(u) = 0$.

Nếu $e_1, ..., e_p$ là một cơ sở của U và $\varphi \in L(U,V)$, thì ta kí hiệu e_i^* là véc tơ đối ngẫu của e_i. Khi đó

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes \varphi(e_i).$$

Khi $\dim U = \infty$ điều này không còn đúng. Chẳng hạn ta lấy $U = V$ có chiều vô hạn và xét $\varphi = \mathrm{id}$. Nếu $\varphi \in \operatorname{Im}(F)$ thì ta có thể viết $\mathrm{id} = \sum_i \varphi_i \otimes v_i$. Chọn u sao cho $\varphi_i(u) = 0$ với mọi i, ta sẽ được $u = \mathrm{id}(u) = 0$. Vô lí.

31.24 Ta nhớ lại rằng nếu V và V^* là cặp không gian đối ngẫu và kí hiệu $\langle v^*, u\rangle = v^*(u)$ $(u \in V,\ v^* \in V^*)$, thì mối liên hệ giữa φ_i và φ_i^* được xác định như sau:

$$\langle v_i^*, \varphi_i(u_i)\rangle = \langle \varphi_i^*(v_i^*), u_i\rangle,$$

trong đó $u_i \in U_i$ và $v_i^* \in V_i^*$ là các phần tử tùy ý. Ta có

$$\begin{aligned}\langle v_1^* \otimes v_2^*, \varphi_1(u_1) \otimes \varphi_2(u_2)\rangle &= v_1^*(\varphi_1(u_1)) \cdot v_2^*(\varphi_2(u_2)) \\ &= \langle v_1^*, \varphi_1(u_1)\rangle\langle v_2^*, \varphi_2(u_2)\rangle \\ &= \langle \varphi_1^*(v_1^*), u_1\rangle\langle \varphi_2^*(v_2^*), u_2\rangle \\ &= \langle \varphi_1^*(v_1^*) \otimes \varphi_2^*(v_2^*), u_1 \otimes u_2\rangle.\end{aligned}$$

Vì $u_1 \otimes u_2$ chạy trên tập sinh của $U_1 \otimes U_2$ và $v_1^* \otimes v_2^*$ chạy trên tập sinh của $V_1^* \otimes V_2^*$, nên từ trên suy ra điều cần chứng minh.

32.1 Giả sử $v_1 + v_2 = x_3 \otimes y_3$ và x_1, x_2 cũng như y_1, y_2 độc lập tuyến tính. Nếu x_1, x_2, x_3 độc lập tuyến tính, thì ta giữ nguyên. Nếu hệ này phụ thuộc

tuyến tính, thì ta biểu diễn x_3 qua x_1, x_2. Tương tự như vậy đối với y_3. Khi đó biểu thức

$$x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 - x_3 \otimes y_3$$

sẽ chứa một số bội của $x_i \otimes y_j$ $(i, j \in \{1, 2\})$ nào đó, nên không thể bằng 0 (theo Bổ đề 31.6).

32.2 Nếu $\dim V = 1$, ta cố định một véctơ $e \neq 0$ trong V. Khi đó $\otimes^p V = K \cdot e^p$, trong đó $e^p = \underbrace{e \otimes \cdots \otimes e}_{p}$. Vì $e^p e^q = e^{p+q} = e^q e^p$ nên đại số này giao hoán.

Khi $\dim V \geq 2$, ta chọn hai véctơ độc lập tuyến tính e_1, e_2 trong V. Khi đó $e_1 \otimes e_2$ và $e_2 \otimes e_1$ độc lập tuyến tính trong $\otimes^2 V$. Nói riêng $e_1 e_2 = e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1 = e_2 e_1$ (theo Bổ đề 31.6).

32.3 Từ Ví dụ 32.1 ta có: $\dim(\otimes^p V) = n^p$. Do đó $P(t) = \sum_p (nt)^p = 1/(1 - nt)$.

32.4 Cố định một cơ sở của V và sử dụng mô tả trong Ví dụ 32.1 ta sẽ có đẳng cấu đại số, trong đó e_i tương ứng với biến t_i của vành đa thức không giao hoán $K\langle t_1, ..., t_n \rangle$.

32.5 Ta cố định hai số nguyên dương $p \neq q$ và đặt $F = \otimes^p V$, $G = \otimes^q V$ là hai không gian con của $\otimes V$. Khi đó $F \cap G = 0$. Chú ý rằng

$$\beta(F \times G) = \beta(G \times F) = \otimes^{p+q} V.$$

Nếu β là tích tenxơ thì ảnh của $\beta(F \times G) \subseteq F \otimes G$ và $\beta(G \times F) \subseteq G \otimes F$. Theo Định lí 31.10, ta có $(F \otimes G) \cap (G \otimes F) = 0$. Suy ra $\otimes^{p+q} V = 0$ và $V = 0$. Vô lí.

32.6 Ta kí hiệu $\pi : \otimes^p V \to S^p(V) = (\otimes^V)/A_p$ là phép chiếu tự nhiên và $\otimes : V^p \to \otimes^V$ là ánh xạ p-tuyến tính tự nhiên. Khi đó tồn tại ánh xạ tuyến tính $h' : \otimes^p V \to U$ sao cho $\psi = h' \circ \otimes$. Do ψ đối xứng, $\mathrm{Ker}(h') \supseteq A_p$. Do đó tồn tại $h : S^p(V) \to U$ sao cho $h' = h \circ \pi$. Từ đó $\psi = h \circ \varphi$.

32.7 Ta chứng minh bằng qui nạp theo p. Khi $p = 1$ bài toán hiển nhiên đúng. Giả sử $p \geq 2$. Cho $u, v \in V$. Với mỗi $i = p, ..., 0$, ta kí hiệu

$$\psi_i(u, v) = \varphi(\underbrace{u, ..., u}_{i}, \underbrace{v, ..., v}_{p-i}).$$

Cho $\alpha \in k$ tùy ý. Từ điều kiện $\varphi(u + \alpha v, ..., u + \alpha v) = 0$ và tính đối xứng

của φ, ta suy ra

$$C_p^1\alpha\psi_{p-1}(u,v) + \cdots + C_p^i\alpha^i\psi_{p-i}(u,v) + \cdots + C_p^{p-1}\alpha^{p-1}\psi_1(u,v) = 0.$$

Cho α nhận $p-1$ giá trị khác nhau, và sử dụng định thức Vandermonde, từ hệ phương trình trên ta suy ra $\psi_i(u,v) = 0$ với mọi i. Nói riêng $\psi_{p-1}(u,v) = 0$ với mọi u, v. Cố định v, ta có thể sử dụng giả thiết qui nạp để suy ra $\varphi(v_1, ..., v_{p-1}, v) = 0$ với mọi $v_1, ..., v_{p-1} \in V$.

32.8 Ta định nghĩa tác động của một hoán vị σ trên $\otimes^p V$ như sau: nếu $u = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$, thì $\sigma(u) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}$. Kí hiệu M_p là không gian con của A_p sinh bởi các tenxơ $u - \tau(u)$, trong đó u chạy trên tập các tenxơ khả qui và τ chạy trên tập các chuyển vị (tức chỉ đổi chỗ 2 chỉ số). Trước hết ta chứng tỏ rằng M_p bất biến dưới tác động của các chuyển vị. Thật vậy, nếu π là một chuyển vị khác thì

$$\pi(u - \tau(u)) = [\pi(u) - u] - [\tau(u) - u] + [\tau(u) - \pi(\tau(u))] \in M_p.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bằng qui nạp theo m là $u - \tau_1 \cdots \tau_m(u) \in M_p$, trong đó u là một tenxơ khả qui và $\tau_1, ..., \tau_m$ là các chuyển vị. Kí hiệu $\sigma = \tau_2 \cdots \tau_m$. Khi đó theo giả thiết qui nạp và tính bất biến của M_p dưới tác động của các chuyển vị, ta có

$$u - \tau_1\sigma(u) = [u - \tau_1(u)] + \tau_1(u - \sigma(u)) \in M_p.$$

Từ đó ta dễ dàng nhận được $M_p = A_p$.

32.9 Rõ ràng $A_p \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_S)$. Với mọi $u \in \otimes^p V$ ta luôn có

$$\pi_S(u) - u = \frac{1}{p}\sum_{\sigma \in S_p}(\sigma(u) - u) \in A_p.$$

Như vậy, nếu $\pi_S(u) = 0$, thì từ đẳng thức trên suy ra $u \in A_p$, tức là $\mathrm{Ker}(\pi_S) \subseteq A_p$.

32.10 Ta có

$$\pi_S^2 = \frac{1}{p}\sum_{\sigma \in S_p}\frac{1}{p}[\sum_{\sigma' \in S_p}\sigma\sigma'] = \frac{1}{p}\sum_{\sigma \in S_p}\frac{1}{p}[\sum_{\sigma' \in S_p}\sigma'] = \pi_S.$$

Từ đó suy ra $u \in \mathrm{Im}(\pi_S)$ khi và chỉ khi $\pi_S(u) = u$. Từ tính chất $\pi_S^2 = \pi_S$ ta cũng suy ra $\otimes^p V = S^p(V) \oplus A_p$.

32.11 Trước hết hãy chứng minh bài toán cho các chuyển vị với lưu ý rằng có thể giả thiết u là các tenxơ khả qui. Bây giờ cho $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_n$ là tích của các chuyển vị. Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp theo n. Chú ý rằng B_p bất biến dưới tác động của các hoán vị. Kí hiệu $\tau = \tau_2 \cdots \tau_n$. Khi đó $u - \text{sign}(\tau)\tau(u) \in B_p$. Suy ra $\tau_1(u) - \text{sign}(\tau)\sigma(u) = \tau_1(u - \text{sign}(\tau)\tau(u)) \in B_p$. Do đó $\text{sign}(\tau_1)\tau_1(u) - \text{sign}(\sigma)\sigma(u) \in B_p$. Vì vậy

$$u - \text{sign}(\sigma)\sigma(u) = [u - \text{sign}(\tau_1)\tau_1(u)] + [\text{sign}(\tau_1)\tau_1(u) - \text{sign}(\sigma)\sigma(u)] \in B_p.$$

32.12 Giải tương tự như Bài 32.9 và Bài 32.10.

32.13 Ánh xạ $f : V^p \times (V^*)^p \to K$ xác định bằng công thức tương tự như F là đa tuyến tính thay phiên khi cố định $\varphi_1, ..., \varphi_p$. Do đó nó được nâng lên thành ánh xạ $f' : V^p \times \wedge^p(V^*) \to K$. Nó đa tuyến tính thay phiên đối với $v_1, ..., v_p$ và tuyến tính đối với biến thứ $p+1$. Cố định biến thứ $p+1$ lại, rồi áp dụng lần nữa tính phổ dụng, ta sẽ được ánh xạ F.

Khi đã có ánh xạ song tuyến tính F, cứ cố định một p-véctơ $\omega \in \wedge^p(V^*)$, ta sẽ được một dạng tuyến tính từ $\wedge^p(V) \to K$. Qua đó ta thiết lập được ánh xạ tuyến tính từ $\wedge^p(V^*)$ vào $(\wedge^p(V))^*$. Ta có thể dễ dàng chứng minh đây là đơn ánh, và so sánh chiều của hai không gian (sử dụng Định lí 32.11) ta sẽ suy ra đó là một đẳng cấu.

32.14 Cho $\sigma = (i, j)$ là một chuyển vị, ta sẽ suy ra φ là ánh xạ thay phiên. Ở đây ta cần điều kiện $\text{char}\, K = 0$.

Ngược lại nếu φ là thay phiên thì với mọi $i < j$, ta có

$$\begin{aligned}&\varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) + \varphi(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p)\\ &= \varphi(v_1, ..., v_i + v_j, ..., v_i + v_j, ..., v_p) - \varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_i, ..., v_p) -\\ &\quad \varphi(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., v_p) = 0.\end{aligned}$$

Do mỗi hoán vị là tích của các chuyển vị, từ đó ta suy ra điều cần chứng minh. Đối với chiều ngược lại, ta không cần điều kiện $\text{char}\, K = 0$.

32.15 Nếu $v_1, ..., v_p$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại j để $v_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $j = p$. Sử dụng tính chất tuyến tính đối với biến thứ p và tính thay phiên ta sẽ được

$$\varphi(v_1, ..., v_p) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \varphi(v_1, ..., v_{p-1}, v_i) = 0.$$

32.16 a) Giả sử $S = (e_1, ..., e_n)$ là cơ sở của V. Đặt $u = \varphi(e_1, ..., e_n)$. Do tính chất thay phiên, ta có

$$\varphi(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma)u = \Delta(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)})u,$$

với mọi $\sigma \in S_n$ và

$$\varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = 0 = \Delta(e_{i_1}, ..., e_{i_n})u,$$

nếu có $p \neq q$ để có $i_p = i_q$. Chú ý rằng ánh xạ $v \mapsto \Delta(v)u$ là ánh xạ đa tuyến tính từ V^n vào U. Theo Định lí 30.2 ta phải có $\varphi(v) = \Delta(v)u$.

b) Ánh xạ $\varphi : V^n \to V$ xác định bởi

$$\varphi(v_1, ..., v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Phi(v_1, ..., \widehat{v_i}, ..., v_n)v_i$$

là n-tuyến tính thay phiên. Do đó theo câu a) ta tìm được véctơ $u \in V$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Phi(v_1, ..., \widehat{v_i}, ..., v_n)v_i = \Delta(v_1, ..., v_n)u.$$

Nói riêng, nếu $(u_1, ..., u_n)$ là tọa độ của u theo S, thì

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Phi(e_1, ..., \widehat{e_i}, ..., e_n)e_i = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n.$$

Suy ra

$$\Phi(e_1, ..., \widehat{e_i}, ..., e_n) = (-1)^i u_i = \Delta(e_1, ..., \widehat{e_i}, ..., e_n, (-1)^n u).$$

Sử dụng Định lí 30.2 ta sẽ được

$$\Phi(v_1, ..., v_{n-1}) = \Delta(v_1, ..., v_{n-1}, x_\Phi),$$

trong đó $x_\Phi = (-1)^n u$.

32.17 Công thức đầu được suy ra trực tiếp từ định nghĩa, còn đối với công thức thứ hai có thể kiểm tra bằng qui nạp.

32.18 Ta xét ánh xạ p-tuyến tính

$$\alpha : V^p \to A;\ \alpha(v_1, ..., v_p) = \varphi(v_1) \cdots \varphi(v_p).$$

Từ điều kiện $(\varphi(v))^2 = 0$ với mọi v ta có $\varphi(u)\varphi(v) = -\varphi(v)\varphi(u)$. Từ đó suy ra α là ánh xạ thay phiên. Do đó nó nâng lên thành ánh xạ tuyến tính: $h_p : \wedge^p(V) \to A$ sao cho

$$h^p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \varphi(v_1) \cdots \varphi(v_p).$$

Đặt $h_1 = \varphi$ và $h_0(1) = e$. Ta định nghĩa h là ánh xạ từ $\wedge(V)$ vào A mà hạn chế của nó trên $\wedge^p(V)$ là h_p. Dễ dàng kiểm tra đây là đồng cấu đại số. Tính duy nhất được suy ra từ tính chất đại số: $\wedge(V)$ được sinh bởi các véctơ của V và 1.

32.19 Nếu $z = u \wedge v$ thì $z \wedge z = u \wedge v \wedge u \wedge v = 0$.

Ngược lại cho $z \neq 0$. Theo Bài 31.1, ta có thể giả thiết $\dim V = n < \infty$ và $(e_1, ..., e_n)$ là cơ sở của V sao cho $z = \sum_{i<j} \alpha_{i,j} e_i \wedge e_j$ sao cho $\alpha_{n-1,n} \neq 0$ (nếu cần ta có thể đổi chỗ các véctơ trong cơ sở của V).

Trước hết xét trường hợp $\alpha_{n-1,n} = 1$. Từ điều kiện $z \wedge z = 0$ và theo Định lí 32.11, Mệnh đề 32.10, suy ra với 4 số $i < j < p < q$ ta phải có

$$2(\alpha_{i,j}\alpha_{p,q} + \alpha_{i,q}\alpha_{j,p} - \alpha_{i,p}\alpha_{j,q}) = 0.$$

Lấy $p = n - 1$, $q = n$ và đặt

$$\lambda_l = \alpha_{l,n-1};\ \beta_l = \alpha_{l,n}\ (l < n-1);\ \lambda_{n-1} = \beta_n = 0,\ \lambda_n = -1,\ \beta_{n-1} = 1.$$

Từ trên suy ra

$$\alpha_{i,j} = \lambda_i\beta_j - \lambda_j\beta_i,$$

với mọi $i < j \leq n$. Do đó

$$z = \sum_{i<j} (\lambda_i\beta_j - \lambda_j\beta_i) e_i \wedge e_j = (\sum \lambda_i e_i) \wedge (\sum \beta_j e_j).$$

Khi $\alpha_{n-1,n} \neq 1$, theo trường hợp trên, tồn tại u, v sao cho $\frac{1}{\alpha_{n-1,n}} z = u \wedge v$. Suy ra $z = \alpha_{n-1,n} u \wedge v = (\alpha_{n-1,n} u) \wedge v$.

32.20 Ánh xạ đa tuyến tính

$$E^p \times E^p \to \mathbb{R};\ (u_1, ..., u_p; v_1, ..., v_p) \mapsto \mathrm{Det}(\langle u_i, v_j \rangle)$$

là ánh xạ thay phiên đối với các cụm véctơ $(u_1, ..., u_p)$ và $(v_1, ..., v_p)$. Do đó nó nâng lên thành một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\wedge^p(E)$ (xem lời giải Bài 32.13). Để chứng tỏ đây là tích vô hướng trên $\wedge^p(E)$, ta cần chứng tỏ $\langle \omega, \omega \rangle > 0$ với mọi $0 \neq \omega \in \wedge^p(E)$. Để cho đơn giản ta giả thiết

$\dim E = n < \infty$, mặc dù trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp này nếu xét không gian con sinh bởi các véctơ xuất hiện trong các p-véctơ khả qui của ω.

Giả sử $e_1, ..., e_n$ là cơ sở trực chuẩn của E. Khi đó dễ dàng kiểm tra cơ sở tự nhiên

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},\ i_1 < \cdots < i_p \leq n,$$

có tính chất như cơ sở trực chuẩn (bởi vì ta còn chưa chứng minh $\wedge^p(E)$ là không gian Oclit, nên ta thêm chữ "như" ở đây). Do đó nếu

$$\omega = \sum \xi_{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

thì

$$\langle \omega, \omega \rangle = \sum \xi^2_{i_1 \ldots i_p} > 0,$$

nếu $\omega \neq 0$. Như vậy tích nêu trong đề bài đúng là tích vô hướng và $\wedge^p(E)$ là không gian Oclit.

Bây giờ rõ ràng ta có thể xác định tích vô hướng trên $\wedge(E)$ một cách tự nhiên sao cho các không gian con $\wedge^p(E)$ và $\wedge^q(E)$ trực giao với nhau khi $p \neq q$.

32.21 Hợp thành của ánh xạ φ và ánh xạ nhúng $\iota : V \to \wedge(V)$ cho ta một ánh xạ tuyến tính $\eta : U \to \wedge(V)$ có tính chất $\eta(u) \cdot \eta(u) = \varphi(u) \wedge \varphi(u) = 0$. Do đó theo Bài 32.18, η có thể mở rộng được duy nhất thành đồng cấu đại số $\varphi_\wedge$.

32.22 Do $\varphi_\wedge$ bảo toàn tích, nên

$$\varphi_\wedge(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \varphi(v_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(v_p).$$

Từ đó suy ra $\varphi_\wedge(\wedge^p(U)) = \wedge^p(\varphi(U))$. Vì vậy $\varphi_\wedge$ là toàn ánh, nếu φ là toàn ánh.

Nếu φ là đơn ánh thì tồn tại ánh xạ $\psi : V \to U$ sao cho $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Khi đó theo Bài 32.21 ta có $\psi_\wedge \circ \varphi_\wedge = \mathrm{id}_\wedge$. Do đó $\varphi_\wedge$ là đơn ánh.

32.23 Sau khi khai triển và sử dụng Mệnh đề 32.10, ta có

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \mathrm{Det}(A)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n).$$

32.24 Theo Mệnh đề 32.9 tồn tại ánh xạ tuyến tính $h : \wedge^r(V) \to U$ sao cho $f = h \circ \wedge^r$. Tuy nhiên $\wedge^r(V) = 0$ vì $r > n$, nên $h = 0$.

32.25 Theo Mệnh đề 32.9 tồn tại ánh xạ tuyến tính $h : \wedge^n(V) \to U$ sao cho

$$\varphi(u_1, ..., u_n) = h(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n).$$

Theo Bài 32.23 ta có

$$\begin{aligned}\varphi(Av_1, ..., Av_n) &= h(Av_1) \wedge \cdots \wedge h(Av_n) = \mathrm{Det}(A)h(v_1) \wedge \cdots \wedge h(v_n)\\ &= \mathrm{Det}(A)\varphi(v_1, ..., v_n).\end{aligned}$$

Cách khác: tính trực tiếp, sử dụng ma trận biểu diễn của A theo một cơ sở nào đó.

Lời giải, chỉ dẫn chương 10

33.1 Nếu $b \in \mathbb{A}$ là một điểm khác, thì

$$\begin{aligned}b + \textstyle\sum_{i=0}^n \alpha_i(a_i - b) &= b + \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i[(a_i - a) + (a - b)]\\ &= b + (\textstyle\sum_{i=0}^n \alpha_i)(a - b) + \textstyle\sum_{i=0}^n \alpha_i(a_i - a)\\ &= b + (a - b) + \textstyle\sum_{i=0}^n \alpha_i(a_i - a)\\ &= a + \textstyle\sum_{i=0}^n \alpha_i(a_i - a).\end{aligned}$$

33.2 Ta dễ dàng kiểm tra vế phải có nghĩa. Lấy a là một điểm tùy ý thuộc không gian. Đặt $u_i = a_i - a$. Khi đó $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = a + \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Đặt $b_j = \sum_{k \in I_j} \frac{\alpha_k}{\beta_j} a_k$. Khi đó

$$b_j = a + \sum_{k \in I_j} \frac{\alpha_k}{\beta_j} u_k.$$

Suy ra $b_j - a = \sum_{k \in I_j} \frac{\alpha_k}{\beta_j} u_k$. Vì vậy

$$\sum_j \beta_j b_j = a + \sum_j \beta_j (b_j - a) = a + \sum_j \beta_j (\sum_{k \in I_j} \frac{\alpha_k}{\beta_j} u_k).$$

Từ đó ta có ngay đẳng thức cần chứng minh.

33.3 Sử dụng Mệnh đề 33.2 và định nghĩa trong Bài 33.1.

33.4 Sử dụng Mệnh đề 33.10.

33.5 Lấy $a \in \mathbb{A}_1$ tùy ý, ta có

$$f(a + \sum_{i=0}^n \alpha_i(a_i - a)) = f(a) + \sum_{i=0}^n \alpha_i Df(a_i - a) = f(a) + \sum_{i=0}^n \alpha_i[f(a) - f(a_i)].$$

33.6 Cố định $a \in \mathbb{A}$ và đặt $v = f(a) - a$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{A}$ ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a + (x - a)) = f(a) + Df(x - a) = f(a) + (x - a) \\ &= x + (f(a) - a) = x + v = t_v(x). \end{aligned}$$

33.7 Rõ ràng ánh xạ $h(x) = O + \lambda\overrightarrow{Ox}$ là một phép biến đổi afin với $Dh = \lambda \,\mathrm{id}$ và ánh xạ ngược là $g(x) = O + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{Ox}$.

Ngược lại, ta cố định một điểm $a \in \mathbb{A}$ và đặt

$$O = a + \frac{1}{1-\lambda}(f(a) - a)) \quad (*).$$

Khi đó

$$(f(a) - a) - \frac{1}{1-\lambda}(f(a) - a)) = -\frac{\lambda}{1-\lambda}(f(a) - a)).$$

Suy ra

$$f(a) = a + \frac{1}{1-\lambda}(f(a) - a)) - \frac{\lambda}{1-\lambda}(f(a) - a)).$$

Từ đẳng thức (*) và $Df = \lambda \,\mathrm{id}$, ta có

$$f(O) = f(a) + \frac{\lambda}{1-\lambda}(f(a) - a)) = a + \frac{1}{1-\lambda}(f(a) - a)) = O.$$

Như vậy O là điểm bất định. Với mọi $x \in \mathbb{A}$, ta có

$$\overrightarrow{Of(x)} = \overrightarrow{f(O)f(x)} = Df(\vec{Ox}) = \lambda\overrightarrow{Ox}.$$

33.8 Chú ý rằng với mọi $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ ta có

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(a_i - a_0) = [1 - (\sum_{i=1}^{n} \beta_i)]a_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i,$$

trong đó $\alpha_0 = 1 - (\sum_{i=1}^{n} \beta_i)$ và $\alpha_i = \beta_i$ (hãy sử dụng Bài 33.1 với $a = a_0$ để kiểm tra đẳng thức này). Khi đó $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Ngược lại, khi $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ thì ta cũng biểu diễn được

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i - a_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(a_i - a_0).$$

Như vậy, nếu $a_0 - a_1, ..., a_0 - a_n$ là cơ sở của V, thì với mỗi $a \in \mathbb{A}$ tồn tại duy nhất một biểu diễn $a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$ với $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$.

Ngược lại vì mọi véc tơ của V có thể viết duy nhất dưới dạng $v = a - a_0$, nên nếu a được biểu diễn duy nhất dưới dạng trên, thì v biểu diễn duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $a_0 - a_1, ..., a_0 - a_n$, tức hệ này lập thành cơ sở của V.

33.9 Chú ý rằng $a_i - a_j = (a_0 - a_j) - (a_0 - a_i)$ và $a_0 - a_j = (a_i - a_j) - (a_i - a_0)$. Từ đó suy ra nếu một hệ phụ thuộc tuyến tính thì hệ kia cũng phụ thuộc tuyến tính.

33.10 Vì $a_0, ..., a_n$ là một hệ trọng tâm của $\mathbb{A}_1$, nên $a_0 - a_1, ..., a_0 - a_n$ độc lập tuyến tính (xem Bài 33.8). Vì vậy tồn tại duy nhất một ánh xạ afin sao cho $f(a_0) = b_0$ và $(Df)(a_0 - a_i) = b_0 - b_i$ với mọi $i = 1, ..., n$. Từ đó suy ra $f(a_i) = f(a_0 + (a_i - a_0) = b_i$. Dễ dàng kiểm tra ánh xạ này là duy nhất.

33.11 Ta cố định một điểm $a \in \mathbb{A}$ và đặt $v = a - f(a)$. Đặt $g = t_v \circ f$. Khi đó $g(a) = a$. Suy ra $f = t_{-v} \circ g$.

33.12 Ta cố định một hệ tọa độ afin $(O, e_1, ..., e_n)$ của không gian afin. Giả sử Df có ma trận biểu diễn theo $(e_1, ..., e_n)$ là A và $f(O)$ có tọa độ là $(b_1, ..., b_n)^T$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{A}$, $f(x)$ có tọa độ là $A(x_1, ..., x_n)^T + (b_1, ..., b_n)^T$. Như vậy $f(x) = x$ khi và chỉ khi các tọa độ $(x_1, ..., x_n)$ của x là nghiệm của hệ phương trình

$$(A - I)(x_1, ..., x_n)^T = (b_1, ..., b_n)^T.$$

Vì 1 không là giá trị riêng của A nên ma trận $A - I$ khả nghịch. Do đó hệ trên luôn có đúng một nghiệm.

34.1 Gọi không gian afin ban đầu là $(\mathbb{A}, V)$. Lấy $b_1 \in \mathbb{B}_1$ và $b_2 \in \mathbb{B}_2$. Ta có $b_1, b_2 \in \mathbb{B}$, nên $v = b_1 - b_2 \in U$. Gọi U' là không gian con của không gian véc tơ V sinh bởi v, U_1, U_2. Khi đó dễ dàng chứng minh $b_1 + U'$ là không gian con bé nhất chứa $\mathbb{B}_1$ và $\mathbb{B}_2$, tức là trùng với $\mathbb{B}$. Do đó $U = U'$.

Ta thấy $v \in U_1 + U_2$ khi và chỉ khi $v = u_2 - u_1$ với $u_i \in U_i$. Khi đó $b_1 + u_1 = b_2 + u_2 \in \mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2$. Từ đó suy ra a) và b).

34.2 Ta có

$$U_1 = \{b - b';\ b, b' \in \mathbb{B}_1\} \subseteq \{b - b';\ b, b' \in \mathbb{B}_2\} = U_2.$$

Cố định $b \in \mathbb{B}_1$. Khi đó $\mathbb{B}_1 = b + U_1$ và $\mathbb{B}_2 = b + U_2$. Suy ra $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$ khi và chỉ khi $U_1 = U_2$.

34.3 Bao afin của n điểm này là một siêu phẳng. Mọi siêu phẳng đi qua các điểm này phải chứa bao afin của nó, và do đó theo Bài 34.2, phải trùng với bao afin.

Cho x là một điểm với tọa độ $(x_1, ..., x_n)$. Điểm x thuộc siêu phẳng này khi và chỉ khi các véctơ $P_1 - x, ..., P_n - x$ phụ thuộc tuyến tính, hay tương đương với

$$\begin{vmatrix} p_{11} - x_1 & p_{12} - x_2 & \cdots & p_{1n} - x_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} - x_1 & p_{n2} - x_2 & \cdots & p_{nn} - x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Kể từ dòng thứ 2 của định thức trong bài lần lượt trừ đi dòng thứ nhất, ta sẽ thấy sự triệt tiêu của nó tương đương với đẳng thức nêu trên.

34.4 Phương trình đã cho cho ta một siêu phẳng. Rõ ràng P_i thuộc siêu phẳng này. Do các điểm này độc lập afin, nên từ tính chất duy nhất nêu trong Bài 34.3 suy ra đó là phương trình cần tìm.

34.5 Gọi 2 không gian đã cho là $(\mathbb{B}_1, U_1)$ và $(\mathbb{B}_2, U_2)$. Nếu hai không gian này không song song với nhau thì $U_2 \not\subseteq U_1$. Do đó $\dim(U_1 + U_2) > \dim U_1 = n - 1$. Suy ra $\dim(U_1 + U_2) = n$. Theo Bài 34.1 phải có $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \neq \emptyset$. Theo Mệnh đề 34.5 không gian chỉ phương của giao là $U_1 \cap U_2$. Ta có

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2) &= \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) \\ &= 2(n-1) - n = n - 2. \end{aligned}$$

34.6 Trong (K^4, K), ta lấy

$$\mathbb{B}_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0);\ x_1, x_2 \in K\};\ \mathbb{B}_2 = \{(0, x_1, x_2, 1);\ x_1, x_2 \in K\}.$$

34.7 Theo Mệnh đề 34.8, nếu $(\mathbb{B}, U)$ là không gian con afin và f là ánh xạ afin, thì ảnh $f(\mathbb{B})$ cũng là không gian con. Dễ thấy không gian chỉ phương của nó là $Df(U)$. Ta có $\dim f(\mathbb{B}) = \dim Df(U) \leq \dim U = m$.

34.8 Rõ ràng đây là điều kiện cần. Để chứng minh điều kiện đủ, ta có thể giả thiết $\mathbb{B}$ chứa ít nhất hai điểm. Kí hiệu

$$U = \{b_1 - b_2;\ b_1, b_2 \in \mathbb{B}\}.$$

Cho $v = b_1 - b_2 \in U$. Đường thẳng đi qua b_1, b_2 là bao afin của hai điểm này, và chính là tập các điểm có dạng $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, trong đó $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Như vậy $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \in \mathbb{B}$. Với mọi $\alpha \in K$ ta có

$$\alpha v = \alpha(b_1 - b_2) = [\alpha b_1 + (1 - \alpha) b_2] - b_2 \in U.$$

Cho $u = c_1 - c_2 \in U$ là một véc tơ thứ hai trong U. Vì $\mathbb{B}$ chứa đường thẳng đi qua b_1, c_1 và đường thẳng đi qua b_2, c_2, nên

$$u + v = (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) = (\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}c_1) - (\frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}c_2) \in U.$$

Vậy U là không gian véc tơ.

Cho $b \in B$ tùy ý. Ta có $c := \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b_1 \in \mathbb{B}$ (như là điểm nằm trên đường thẳng qua b, b_1). Do đó

$$t_v(b) = b + (b_1 - b_2) = 2(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b_1) - b_2 = 2c - b_2 \in \mathbb{B}.$$

Vậy $\mathbb{B}$ là không gian con.

34.9 Trước hết ta phải giải

Bài toán 1: Tìm hệ phương trình xác định không gian con afin khi biết biểu diễn tham số của nó.

Một không gian con $\mathbb{B}$ có biểu diễn tham số nghĩa là có thể ta đồng nhất không gian afin ban đầu với K^n và $\mathbb{B}$ được viết dưới dạng

$$\mathbb{B} = (\beta_1, ..., \beta_n) + K \cdot (\alpha_{11}, ..., \alpha_{1n}) + \cdots + K \cdot (\alpha_{m1}, ..., \alpha_{mn}).$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n & = 0, \\ \cdots & \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n & = 0, \end{cases}$$

ta tìm được hệ $k = n - m$ nghiệm cơ sở $(\gamma_{i1}, ..., \gamma_{in})$; $i = 1, ..., k$. Khi đó $\mathbb{B}$ được cho bởi k phương trình sau:

$$\begin{cases} \gamma_{11}x_1 + \cdots + \gamma_{1n}x_n & = \gamma_{11}\beta_1 + \cdots + \gamma_{1n}\beta_n, \\ & \cdots \\ \gamma_{k1}x_1 + \cdots + \gamma_{kn}x_n & = \gamma_{k1}\beta_1 + \cdots + \gamma_{kn}\beta_n. \end{cases}$$

Áp dụng đối với bài toán tìm giao: trước hết ta tìm hệ phương trình của từng không gian con. Sau đó lập hệ phương trình mới gồm các phương trình của hai hệ vừa tìm được. Đây chính là hệ phương trình của giao.

Bây giờ ta chỉ cần giải bài toán ngược của Bài toán 1:

Bài toán 2: Tìm biểu diễn tham số của một không gian con afin khi biết hệ phương trình xác định nó.

Để giải bài toán này, ta phải tìm một nghiệm riêng, chẳng hạn a, và một hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết, chẳng hạn $u_1, ..., u_k$. Khi đó ta được biểu diễn tham số

$$\mathbb{B} = \{a + t_1u_1 + \cdots + t_ku_k;\ t_1, ..., t_k \in K\}.$$

Chẳng hạn đối với $\mathbb{B}_1$ trong đầu bài ta sẽ tìm được nghiệm $(1, 2, 0)$ và do đó phương trình của $\mathbb{B}_1$ là

$$x_1 + 2x_2 = 2.$$

Tương tự, phương trình của $\mathbb{B}_2$ là

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 = -3.$$

Từ đó

$$\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = (0, 1, -2/3) + \mathbb{R} \cdot (6, -3, -7).$$

34.10 Trước hết tìm nghiệm chung của hai hệ phương trình xác định hai không gian con. Có hai trường hợp:

1. Hai hệ có nghiệm chung. Khi đó hai không gian con giao nhau. Gọi a là một điểm (tương ứng với một nghiệm). Giải từng hệ để tìm biểu diễn tham số của hai không gian con này dưới dạng:

$$\mathbb{B}_1 = a + Ku_1 + \cdots + Ku_n;\ \mathbb{B}_2 = a + Kv_1 + \cdots + Kv_m,$$

trong đó u_i và v_j là các véc tơ của hệ nghiệm cơ sở của các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng. Từ hệ véc tơ $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m$ ta tìm một tập độc lập tuyến tính cực đại, chẳng hạn không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_k$. Khi đó bao afin của hai không gian con này được cho bởi tham số như sau:

$$\mathbb{B} = a + Ku_1 + \cdots + Ku_n + Kv_1 + \cdots + Kv_k.$$

Từ dạng biểu diễn này có thể dễ dàng tìm hệ phương trình xác định nó (xem Bài 34.9).

2. Hai hệ không có nghiệm chung. Khi đó hai không gian con không giao nhau. Giải từng hệ để tìm biểu diễn tham số của hai không gian con này dưới dạng:

$$\mathbb{B}_1 = b_1 + Ku_1 + \cdots + Ku_n;\ \mathbb{B}_2 = b_2 + Kv_1 + \cdots + Kv_m,$$

trong đó b_1, b_2 là các nghiệm riêng của mỗi hệ, và u_i và v_j là các véc tơ của hệ nghiệm cơ sở của các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng. Theo Bài 34.1 $b_1 - b_2 \notin Ku_1 + \cdots + Ku_n + Kv_1 + \cdots + Kv_m$. Tìm một tập độc lập tuyến tính cực đại, chẳng hạn không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là $u_1, ..., u_n, b_1 - b_2, v_1, ..., v_k$. Khi đó bao afin của hai không gian con này được cho bởi tham số như sau:

$$\mathbb{B} = b_1 + Ku_1 + \cdots + Ku_n + K(b_1 - b_2) + Kv_1 + \cdots + Kv_k.$$

Từ dạng biểu diễn này có thể dễ dàng tìm hệ phương trình xác định nó.

Đối với ví dụ trong bài, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \end{cases}$$

ta được một nghiệm chung là $a = (-\frac{4}{7}, \frac{9}{7}, 0)$. Giải hệ phương trình thuần nhất của hệ thứ nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

ta được một nghiệm cơ sở là $u = (-6, 3, 7)$. Giải hệ phương trình thuần nhất của hệ thứ hai:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

ta được một nghiệm cơ sở là $(-2, 1, 0)$. Như vậy bao afin có biểu diễn tham số là

$$\mathbb{B} = (-\frac{4}{7}, \frac{9}{7}, 0) + \mathbb{R}(-6, 3, 7) + \mathbb{R}(-2, 1, 0).$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -6y_1 + 3y_2 + 7y_3 = 0. \\ -2y_1 + y_2 = 0, \end{cases}$$

ta được nghiệm cơ sở $(1, 2, 0)$. Vậy phương trình của bao afin là mặt phẳng

$$x_1 + 2x_2 = 2.$$

34.11 Ta sử dụng cách giải Bài toán 2 trong Bài 34.9. Giải hệ phương trình ta được

$$x_1 = 1 - \frac{2x_3 + x_4}{3},\ x_2 = \frac{5x_3 - 5x_4}{3},\ x_3, x_4 \text{ tùy ý.}$$

Ta cũng có thể cho biểu diễn tham số dưới dạng

$$x_1 = 12u + v,\ x_2 = 5u - 5v,\ x_3 = 3u,\ x_4 = 3v.$$

34.12 Ta sử dụng cách giải Bài toán 1 trong Bài 34.9. Để tìm các hệ số của hệ phương trình, ta lập hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 - 2y_3 + 3y_4 - y_5 = 0, \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 - 3y_5 = 0. \end{cases}$$

Ba nghiệm cơ sở của hệ này là $(8,2,7,0,0)$, $(-4,0,-1,2,0)$, $(-4,0,-5,0,2)$. Từ đó ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 35, \\ -4x_1 - x_3 + 2x_4 = -17, \\ -4x_1 - 5x_3 + 2x_5 = -21. \end{cases}$$

34.13 Kí hiệu A là ma trận liên kết và B là ma trận bổ sung của hệ tạo bởi ba phương trình đã cho.

- Nếu $\operatorname{rank} A = 3$ thì hệ có nghiệm duy nhất. Khi đó ba mặt phẳng đôi một cắt nhau và có chung một điểm.

- Nếu $\operatorname{rank} A = 2$ thì có ít nhất hai mặt phẳng cắt nhau (theo một đường thẳng). Ta có các trường hợp sau:

  + $\operatorname{rank} B = 3$: Mặt phẳng thứ ba song song với một trong hai mặt cắt nhau nói trên.

  + $\operatorname{rank} B = 2$: Ba mặt phẳng có chung một đường thẳng.

- Nếu $\operatorname{rank} A = 1$ thì ba mặt phẳng song song với nhau

34.14 Chú ý rằng hai hệ véc tơ $\{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\}$ và $\{(a_3, b_3, c_3), (a_4, b_4, c_4)\}$ là độc lập tuyến tính. Gọi A là ma trận tạo bởi 4 véctơ này, tức là ma trận liên kết của hệ tạo bởi 4 phương trình đã cho, và B là ma trận bổ sung. Ta có các trường hợp sau:

- $\operatorname{rank} A = 3$: nếu $\operatorname{rank} B = 3$ thì hai đường thẳng cắt nhau; nếu $\operatorname{rank} B = 4$ thì hai đường thẳng chéo nhau (hệ không có nghiệm).

- rank $A = 2$. Khi đó rank $B \leq 3$ (xét theo các véc tơ cột), nhưng không thể bằng 2, vì như thế hai đường thẳng trùng nhau. Trong trường hợp này hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng, nhưng không giao nhau, tức là song song với nhau.

34.15 Vì các đường thẳng và các điểm nêu trong bài nằm trong bao afin của A, B, C, nên ta có thể hạn chế xét trong mặt phẳng chứa 3 điểm này. Do đó có thể giả thiết không gian đã cho có chiều là 2. Giả thiết A, B, C không thẳng hàng dẫn đến các véc tơ $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$ độc lập tuyến tính. Xét hệ tọa độ afin $(A; e_1, e_2)$. Khi đó tọa độ của các điểm là $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $A'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B'(0, \frac{1}{2})$, $C'(\frac{1}{2}, 0)$. Hệ gồm các phương trình của 3 đường thẳng là

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 &= 1. \end{cases}$$

Hệ này có một nghiệm duy nhất $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ - điểm chung của 3 đường. Ta có thể dễ kiểm tra $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$.

Phương pháp này có thể sử dụng để chứng minh nhiều định lí hình học sơ cấp không liên quan đến độ dài hay góc.

34.16 Gọi G là trọng tâm của n điểm $A_1, ..., A_n$, tức là $G = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} A_i$. Khi đó

$$G = \frac{1}{n} A_i + \frac{n-1}{n} \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{n-1} A_j \right) = \frac{1}{n} A_i + \frac{n-1}{n} A_i'.$$

Như vậy G nằm trên đường thẳng $A_i A_i'$ với mọi i.

34.17 Giả sử $\dim \mathbb{A} = n$ (không gian ban đầu) và $\dim \mathbb{B}_i = n_i$ $(i = 1, 2)$. Khi đó $\mathbb{B}_i$ được cho bởi $n - n_i$ phương trình. Gọi A là ma trận liên kết của hệ gồm $2n - (n_1 + n_2)$ phương trình này, còn B là ma trận bổ sung. Vì hai không gian con không giao nhau, theo Định lí Kronecker-Kapelli, rank $A <$ rank $B \leq n$. Như vậy nếu U_i là các không gian véc tơ chỉ phương, thì $\dim(U_1 + U_2) =$ rank $A < n$. Do đó có thể chọn được một không gian véc tơ con U chiều $n - 1$ chứa $U_1 + U_2$. Siêu mặt có không gian chỉ phương là U sẽ song song với hai không gian con afin đã cho.

Cách khác: Để kết luận $\dim(U_1 + U_2) < n$ ta có thể sử dụng Bài 34.1.

34.18 Ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Gọi U, U' là các không gian chỉ phương của $\mathbb{B}$ và $\mathbb{B}'$. Ta có $\dim U = \dim U'$. Chú ý rằng mọi đẳng cấu $g_0 : U \to U'$ luôn mở rộng được thành tự đẳng cấu của V - không gian véc tơ của $\mathbb{A}$.

Nếu $b \in \mathbb{B}$ và $b' \in \mathbb{B}'$ thì theo Định lí 33.6, tồn tại đẳng cấu $G : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ sao cho $f^*(b) = b'$. Gọi $g_0 : U \to U'$ là phần tuyến tính của ánh xạ này. Mở rộng nó thành tự đẳng cấu g của V và kí hiệu f là ánh xạ afin với $f(b) = b'$ và $Df = g$ ta sẽ được tự đẳng cấu afin cần tìm.

Cho $b \notin \mathbb{B}$ và $b' \notin \mathbb{B}'$. Lấy $a \in \mathbb{B}$ và $a' \in \mathbb{B}'$ tùy ý. Khi đó $b - a \notin U$ và $b' - a' \notin U'$. Xây dựng đẳng cấu G tương tự như trên, nhưng $G(a) = a'$. Ta cũng mở rộng g_0 thành tự đẳng cấu g, nhưng với thêm yêu cầu $g(b - a) = b' - a'$. Ta cũng xây dựng ánh xạ f như trên. Khi đó

$$f(b) = f(a + b - a) = f(a) + g(b - a) = a' + (b' - a') = b'.$$

35.1 a) Cho $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ là một điểm tùy ý trên mặt phẳng. Ta phải tìm x sao cho véctơ $h = \overrightarrow{ax} = (x_1 - 4, x_2 - 2, x_3 + 5, x_4 - 1)$ vuông góc với mặt phẳng đã cho, tức là tồn tại u, v để

$$h = (x_1 - 4, x_2 - 2, x_3 + 5, x_4 - 1) = u(2, -2, 1, 2) + v(2, -4, 2, 3).$$

Thế $x_1, x - 2, x_3, x_4$ qua u, v vào hệ ban đầu, ta được một hệ phương trình của u, v. Giải hệ này ra ta được $u = -4, v = 3$. Từ đó $h = (-2, -4, 2, 1)$. Do đó khoảng cách cần tìm là $| h | = 5$.

b) Giải tương tự, ta được khoảng cách là 2.

35.2 Do $\dim \pi = n - m$, nên các véctơ $(c_{i1}, ..., c_{in})$, $i = 1, ..., m$ là độc lập tuyến tính. Chú ý rằng các véc tơ này là cơ sở của $V^{\perp}$, trong đó V là không gian véc tơ chỉ phương của π. Nếu $X \in \pi$ là một điểm có tọa độ $(x_1, ..., x_n)$, thì điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AX}$ vuông góc với π là: tồn tại $u_1, ..., u_m \in \mathbb{R}$ để

$$\overrightarrow{AX} = \sum_{i=1}^{m} u_i(c_{i1}, ..., c_{in}).$$

Do đó $(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)$ phải là nghiệm của hệ thứ hai trong đề bài. Hệ này có nghiệm duy nhất, vì theo Bổ đề 24.4, véc tơ độ cao được xác định duy nhất.

35.3 Nếu gọi X và Y tương ứng có các tọa độ $(x_1, ..., x_n)$ và $(y_1, ..., y_n)$ thì hai họ phương trình đầu tương ứng với $X \in \alpha$ và $Y \in \beta$, còn hai họ phương trình sau nghĩa là $\overrightarrow{XY}$ vuông góc với cả hai phẳng. Ta sẽ chứng tỏ véc tơ này luôn tồn tại. Thật vậy, ta lấy $A \in \alpha$, $B \in \beta$ tùy ý và gọi các không gian chỉ phương của α, β là U và V. Theo Bổ đề 24.4 ta tìm được

véc tơ độ cao h của $\overrightarrow{AB}$ lên tổng $U+V$. Khi đó $h \perp (U+V)$ và tồn tại $u \in U$, $v \in V$ sao cho

$$h = \overrightarrow{AB} - (u+v) = \overrightarrow{A'B'},$$

trong đó $A' = A+u \in \alpha$ và $B' = B+(-v) \in \beta$. Do đó $\overrightarrow{A'B'}$ là đường vuông góc chung. Như vậy hệ phương trình thứ hai trong bài luôn có nghiệm. Theo Mệnh đề 35.3, ta có $d(\alpha,\beta) = \mid h \mid$.

35.4 Sử dụng quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt đối với hệ véctơ $e_1,...,e_k,a-b$ ta sẽ nhận được một hệ trực giao $f_1,...,f_k,h$, trong đó $f_1,...,f_k$ là cơ sở trực giao của V và h là véc tơ độ cao của $a-b$. Do đó sử dụng Mệnh đề 35.3 và Bài 24.13 ta sẽ được công thức cần chứng minh.

35.5 Bài toán này tương đương với tìm khoảng cách từ điểm a tới không gian con được cho bởi (tại sao?)

$$\pi = b + t_1b_1 + t_2b_2 + u_1a_1 + u_2a_2.$$

Vì $b_1 - b_2 = a_1$, nên $\pi = b + t_1b_1 + u_1a_1 + u_2a_2$ là một siêu phẳng. Để xác định phương trình của siêu phẳng này, ta xét hệ phương trình (xem Bài 34.9):

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 0, \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 = 0, \\ 2y_1 + 2y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(c_1,c_2,c_3,c_4) = (2,1,-2,0)$. Do đó phương trình của siêu phẳng là

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0.$$

Theo Ví dụ 35.1, ta được $d(\alpha,\beta) = d(a,\pi) = 3$.

35.6 Chỉ cần chứng minh điều kiện cần. Nếu $\lambda = 1$ thì nó là phép dời hình. Giả sử $\lambda \neq 1$. Cố định một điểm $O \in \mathbb{E}$. Khi đó ánh xạ được xác định bởi

$$g(a) = f(O) + \frac{1}{\lambda}(f(a) - f(O))$$

có tính chất

$$d(g(a),g(b)) = \mid \frac{1}{\lambda}[f(a) - f(b)] \mid = \frac{1}{\lambda}d(f(a),f(b)) = d(a,b).$$

Như vậy g là ánh xạ đẳng cự. Do đó theo Định lí 35.5, g là ánh xạ afin, tức là có ánh xạ tuyến tính Dg của không gian véc tơ E để $g(a) - g(b) =$

$(Dg)(a-b)$. Từ công thức trên ta thấy $f(a)-f(b)=\lambda(Dg)(a-b)$, tức là f cũng là ánh xạ afin với $Df=\lambda(Dg)$. Vì Dg là toán tử trực giao nên mọi giá trị riêng của nó có môđun bằng 1. Vì $\lambda\neq 1$, nên mọi giá trị riêng của Df đều khác 1. Theo Bài 33.12, f có duy nhất một điểm bất động. Ta kí hiệu lại điểm đó là O. Xét phép vị tự ρ tâm O hệ số λ, tức là

$$\rho(x)=(1-\lambda)O+\lambda x.$$

Từ trên suy ra $f(a)=(1-\lambda)O+\lambda g(a)$, tức là $f=\rho\circ g$.

35.7 Theo Bài 35.6 ta chỉ cần chứng tỏ tồn tại $\lambda>0$ để $\mid Df(v)\mid=\lambda\mid v\mid$ với mọi v. Cho $e_1,...,e_n$ là một cơ sở trực chuẩn của E. Ta đặt $\lambda_i=\mid(Df)(e_i)\mid>0$. Với $i\neq j$, ta có $0=\langle e_i+e_j,e_i-e_j\rangle$. Suy ra

$$0=\langle Df(e_i+e_j),Df(e_i-e_j)\rangle=\langle Df(e_i),Df(e_i)\rangle-\langle Df(e_j),Df(e_j)\rangle=\lambda_i^2-\lambda$$

Suy ra $\lambda_i=\lambda_j=:\lambda$ với mọi i,j. Khi đó với mọi $v=\sum\alpha_ie_i$, ta có

$$\langle Df(v),Df(v)\rangle=\sum\alpha_i^2\langle Df(e_i),Df(e_i)\rangle=\lambda^2\mid v\mid^2.$$

35.8 Để cho tiện, ta kí hiệu $A',B',...$ là ảnh của các điểm $A,B,...$; AB, $CD,...$ là các véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},....$ Ta cũng kí hiệu các đoạn thẳng nối A,B bởi $[AB]$. Theo Bài 35.7, ta chỉ cần chứng minh f là ánh xạ afin. Ta chứng minh mấy nhận xét sau:

Nhận xét 1: Nếu tập con $X\subset\mathbb{E}$ thuộc không gian con π chiều m, thì ảnh của nó X' cũng thuộc không gian con chiều m. Thật vậy, ta lấy $v_1,...,v_m$ là một cơ sở trực giao của không gian chỉ phương của π và mở rộng nó thành một cơ sở trực giao $v_1,...,v_n$ của E. Cố định một điểm $A\in X$ và đặt $A_i=A+e_i$. Khi đó các véc tơ $AA_1,...,AA_n$ lập thành một cơ sở trực giao của E. Các véc tơ Ax, $x\in X$, vuông góc với các véc tơ AA_i, $i>m$, nên $A'x'$ vuông góc với $A'A_i'$, $i>m$, tức là thuộc không gian con chứa $A',A_1',...,A_m'$. Nói riêng ánh xạ này bảo toàn tính đồng phẳng, tính thẳng hàng. Từ đây bài toán trở thành bài hình học sơ cấp trên mặt phẳng! Có thể vẽ hình để theo dõi lời giải!

Nhận xét 2: Nếu $AB\parallel CD$ thì $A'B'\parallel C'D'$. Thật vậy theo nhận xét 1 các ảnh của các điểm cũng đồng phẳng, và cùng vuông góc với một đường thẳng. Nói riêng ảnh của một hình bình hành là một hình bình hành. Từ đó ta suy ra nếu $u,v\in E$, $B=A+u$, $C=A+v$, $D=A+u+v$ và u,v độc lập tuyến tính, thì $A'D'=A'B'+A'C'$.

Nhận xét 3: Nếu A,B,C,D là bốn điểm tạo thành hình thoi thực sự, thì $A'B'C'D'$ cũng là hình thoi (suy ra từ 2 nhận xét trên). Như vậy nếu

$|\ AB\ | = |\ AC\ |$ thì $|\ A'B'\ | = |\ A'C'\ |$ và từ nhận xét 1 ta suy ra điểm giữa của $[AB]$ biến thành điểm giữa của $[A'B']$ (như là giao điểm của 2 đường chéo).

Nhận xét 4: Cho A, B, C là 3 điểm thẳng hàng sao cho C nằm giữa A, B. Khi đó C' cũng nằm trong đoạn thẳng $[A'B']$. Thật vậy xét một mặt phẳng tùy ý chứa đường thẳng này. Ta gọi E và F là giao điểm của đường tròn đường kính $[AB]$ và đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB. Khi đó theo nhận xét 1, C' là giao điểm của đường thẳng đi qua A', B' và đường thẳng đi qua E', F'. Nhưng E', F' nằm trên đường tròn đường kính $[A'B']$ và $E'F'$ vuông góc với $A'B'$ nên C' nằm ở giữa.

Bây giờ ta sẽ chứng minh nếu $\alpha \in \mathbb{R}$, A, B, C thẳng hàng mà $AC = \alpha AB$, thì $A'C' = \alpha A'B'$. Do f là song ánh nên ta chỉ cần xét $B \neq A$ và $\alpha \neq 0$. Theo nhận xét 1, $A'C' = \beta A'B'$. Nếu $\alpha \neq \beta$ thì ta có thể chọn được số tự nhiên m để $2^m < |\ \alpha - \beta\ |$. Kí hiệu $B_k = A + k/2^{m+1}v$, trong đó $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó sử dụng nhiều lần nhận xét 3 là trung điểm của một đoạn lại biến thành trung điểm của đoạn nối hai ảnh đầu mút, ta suy ta

$$f(B_k) = B'_k = A' + \frac{k}{2^{m+1}} A'B'.$$

Từ đó với $k = [2^{m+1}]\alpha$ ta có $C \in [B_k B_{k+1}]$, nhưng $C' \notin [B'_k B'_{k+1}]$. Mâu thuẫn với nhận xét 4. Vậy $\alpha = \beta$. Như vậy kết hợp với nhận xét 2 ta suy ra f là ánh xạ afin.

(Chứng minh trên có vẻ kĩ thuật vì bài toán không đúng khi $\dim \mathbb{E} = 1$).

35.9 Ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $b_0, ..., b_m$ là tập độc lập afin cực đại. Đặt $e_i = b_i - b_0$ và $e'_i = b'_i - b'_0$. Theo Bài 33.10 ta có thể xây dựng được một ánh xạ afin (G, g) từ bao afin của $b_0, ..., b_n$ vào không gian Oclit ban đầu $\mathbb{E}$ sao cho $G(b_i) = b'_i$ với $i = 0, ..., m$.

Trước hết ta chứng minh $e'_1, ..., e'_m$ độc lập tuyến tính. Giả sử $\sum \alpha_i e'_i = 0$. Khi đó ta có hệ phương trình tuyến tính sau đối với $\alpha_1, ..., \alpha_m$

$$\alpha_1 \langle e'_1, e'_j \rangle + \cdots + \alpha_m \langle e'_m, e'_j \rangle = 0;\ j = 1, ..., m.$$

Theo Định lí cosin (Bổ đề 24.2), các tích vô hướng $\langle e'_i, e'_j \rangle$ chỉ phụ thuộc vào các độ dài $|\ e'_i\ | = d(b'_i, b'_0) = d(b_i, b_0) = |\ e_i\ |$, $|\ e'_j\ | = d(b'_j, b'_0) = d(b_j, b_0) = |\ e_j\ |$ và $|\ e'_i - e'_j\ | = d(b'_i, b'_j) = d(b_i, b_j) = |\ e_i - e_j\ |$, nên từ hệ phương trình trên ta nhận được hệ phương trình

$$\alpha_1 \langle e_1, e_j \rangle + \cdots + \alpha_m \langle e_m, e_j \rangle = 0;\ j = 1, ..., m.$$

Do $e_1, ..., e_m$ độc lập tuyến tính, nên định thức vế trái - chính là ma trận Gram của hệ véc tơ - khác 0 (Định lí 24.8(iii)). Suy ra $\alpha_1 = \cdots = \alpha_i = 0$.

Đổi vai trò hai cấu hình cho nhau, ta suy ra $e'_1, ..., e'_m$ cũng độc lập tuyến tính cực đại.

Bây giờ nếu $j > m$ và $e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i$ thì đặt $e_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Lý luận tương tự như trên ta thấy α_i và β_i cùng thỏa mãn hai hệ phương trình như nhau, nên chúng bằng nhau, tức là $g(e_j) = e'_j$. Do đó

$$G(b_j) = G(b_0 + e_j) = G(b_0) + g(e_j) = b'_0 + e'_j = b'_j.$$

Bây giờ dễ dàng chứng tỏ G là ánh xạ đẳng cự. Nếu bao afin của $b_0, ..., b_n$ trùng với $\mathbb{E}$ thì bài toán đã được chứng minh. Nếu không, ta gọi U, V là các không gian chỉ phương của bao afin này và của $b'_0, ..., b'_n$. Kí hiệu $U^\perp$ và $V^\perp$ là các phần bù trực giao của chúng trong không gian véc tơ E của $\mathbb{E}$. Khi đó có một đẳng cự $g^\perp : U^\perp \to V^\perp$. Mở rộng g thành Df sao cho $(Df)\,|_{U^\perp} = g^\perp$. Khi đó ánh xạ afin f mở rộng G với phần tuyến tính là Df sẽ là đẳng cự cần tìm.

35.10 Chỉ cần cải tiến chút ít lời giải của Bài 34.18 với lưu ý trong trường hợp thứ hai thì chọn $a \in \mathbb{B}$ và $a' \in \mathbb{B}'$ là các chân đường vuông góc hạ từ b và b'.

35.11 Gọi hai cấu hình đó là (a, a') và (b, b'). Kí hiệu đường vuông góc chung của a và a' là AA'. Nếu có đẳng cự biến hai cấu hình vào nhau, thì ta cũng có $B = f(A) \in b$ và $B' = f(A') \in a'$, và BB' cũng là đường vuông góc chung của b và b' (do phần tuyến tính của ánh xạ đẳng cự bảo toàn tích vô hướng). Do đó $d(a, a') = |\ AA'\ | = |\ BB'\ | = d(b, b')$. Cũng do phần tuyến tính của ánh xạ đẳng cự bảo toàn tích vô hướng, nên góc giữa hai cặp đường thẳng như nhau.

Ngược lại, ta lấy hai đường vuông góc chung AA' và BB' của hai cặp đường thẳng. Trên a, a' ta cố định hai véc tơ định chuẩn e, e', và trên b, b' lấy hai véc tơ định chuẩn u_1, u_2 sao cho $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$. Khi đó có thể dễ dàng xây dựng tự đẳng cấu đẳng cự f của $\mathbb{E}$ sao cho $Df(e_1) = u_1$, $Df(e_2) = u_2$, $Df(\overrightarrow{AA'}) = Df(\overrightarrow{BB'})$ và $f(A) = B$ (thực ra chỉ cần xét các bao afin của a, a' và của b, b', rồi mở rộng thành tự đẳng cấu đẳng cự).

35.12 Kí hiệu đường vuông góc chung trong các cấu hình là BB' và CC' (chúng luôn tồn tại: xem lời giải Bài 35.3). Khi đó $|\ \overrightarrow{BB'}\ | = |\ \overrightarrow{CC'}\ |$. Từ đó suy ra điều kiện cần.

Ta chứng tỏ điều kiện đủ. Lấy u' là véc tơ định chuẩn chỉ phương của b và u_1 là véc tơ định chuẩn của véc tơ chiếu của b lên không gian chỉ phương

U của $\mathbb{B}$. Tương tự ta xây dựng các véc tơ v', v_1 sao cho $\langle u_1, u'\rangle = \langle v_1, v'\rangle$ (chú ý là $u_1 = u'$ và $v_1 = v'$ nếu $b \in \mathbb{B}$ và $c \in \mathbb{C}$). Kí hiệu V là không gian chỉ phương của $\mathbb{C}$. Từ $\{u_1\}$ ta mở rộng thành một cơ sở định chuẩn $u_1, ..., u_m$ của U và từ $\{v_1\}$ ta mở rộng thành một cơ sở định chuẩn $v_1, ..., v_m$ của V. Bây giờ ta xây dựng đẳng cự (G, g) từ bao afin của b và $\mathbb{B}$ vào bao afin của c và $\mathbb{C}$ sao cho $G(B) = C$, $g(u_i) = v_i$, $g(u') = v'$ và $g(\overrightarrow{BB'}) = g(\overrightarrow{CC'})$. Mở rộng G một cách chính tắc lên toàn bộ không gian ta được tự đẳng cấu cần tìm.

35.13 Với mọi $\alpha_i, \beta_j, \gamma \geq 0$ sao cho $\sum \alpha_i = 1$, $\sum \beta_j = 1$, và với mọi $a_i, b_j \in A$ ta có

$$\gamma(\sum \alpha_i a_i) + (1-\gamma)(\sum \beta_j b_j) = \sum(\gamma\alpha_i a_i + (1-\gamma)\beta_j b_j) \in \text{conv}(A).$$

(Xem Bài 33.2. Tổng cuối cùng chỉ có nghĩa khi ta xét toàn bộ tổng, chứ không phải từng nhóm 2 số hạng!)

35.14 Ta có thể xem hình lập phương đó có các đỉnh là gốc tọa độ và các điểm có các thành phần tọa độ hoặc là 0, hoặc là 1 trong không gian Oclit $\mathbb{R}^n$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết đường chéo cho trước nối gốc tọa độ $(0, ..., 0)$ và đỉnh $(1, ..., 1)$. Véc tơ chỉ phương của đường chéo này là $(1, ..., 1)$. Nhận xét rằng véc tơ chỉ phương của một đường chéo tùy ý có dạng $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$, trong đó $\epsilon_i = \pm 1$. Để cho nó vuông góc với đường chéo ban đầu ta phải có $\sum \epsilon_i = 0$. Suy ra phải có đúng một nửa số ϵ_i bằng -1. Do đó khi n lẻ không có đường nào, còn khi $n = 2k$ thì số đường chéo vuông góc với đường ban đầu là C_{2k}^k.

35.15 Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc, ta có thể xét đường chéo với véc tơ chỉ phương là $(1, ..., 1)$, và véc tơ chỉ phương của một cạnh là $(0, ..., 1, ..., 0)$ (một véc tơ đơn vị). Góc giữa chúng có cos $= 1/\sqrt{n}$.

35.16 Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc, ta có thể xét đường chéo với véc tơ chỉ phương là $(1, ..., 1)$. Giả sử độ dài cạnh là a. Khi đó độ dài đường chéo là $d = a\sqrt{n}$ (theo Định lí Pitago). Phương trình của đường chéo này là

$$x_1 = \cdots = x_n.$$

Nếu $(b_1, ..., b_n)$ là tọa độ một điểm tùy ý trong không gian, thì hình chiếu của nó lên đường chéo này là điểm $(y_1, ..., y_n)$ sao cho

$$\langle (y_1 - b_1, ..., y_n - b_n), (1, ..., 1)\rangle = 0.$$

Suy ra $y_1 = \cdots = y_n = (\sum b_i)/n$. Bây giờ nếu PQ là một cạnh hình lập phương thì tọa độ $(p_1, ..., p_n)$ và $(q_1, ..., q_n)$ thỏa mãn hệ thức $|\sum q_i - \sum p_i| = a$. Do đó véc tơ giữa hai hình chiếu là $(a/n, ..., a/n)$. Độ dài của nó là $a/n\sqrt{n} = d/n$.

35.17 Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc, ta có thể xét đường chéo với véc tơ chỉ phương là $d = (1, ..., 1)$. Không gian chỉ phương của mặt k chiều sinh bởi k véc tơ đơn vị $e_{i_1}, ..., e_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$. Theo Bổ đề 24.4 véc tơ chiếu của d lên không gian véc tơ này là $d' = (0, 1, 0, ..., 1, ..., 0)$ (1 ở các vị trị $i_1, ..., i_k$). Do đó góc α cần tìm có $\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{kn}}$.

35.18 Vì $U^* \cap V^* = 0$, nên chỉ cần chứng minh nếu $U \cap V = 0$ thì α xác định và khác 0. Trên U và V ta lấy hai cơ sở định chuẩn e_i và f_j. Véc tơ định chuẩn tùy ý $u = \sum x_i e_i \in U$ thỏa mãn $\sum x_i^2 = 1$, và véc tơ định chuẩn tùy ý $v = \sum y_j f_j$ thỏa mãn $\sum y_j^2 = 1$. Ta cần chứng tỏ tồn tại hai véc tơ định chuẩn u và v sao cho

$$|\langle u, v\rangle| = |\sum \langle e_i, f_j\rangle x_i y_j|$$

lớn nhất. Chú ý rằng hàm số bên phải là ánh xạ liên tục trên tập compăc, nên nó đạt cực trị tại một điểm nào đó. Góc $\alpha = 0$ khi và chỉ khi $u = v$, tức là $u \in U \cap V = 0$, vô lí.

35.19 Trước hết ta xét trường hợp các điểm A_i có tọa độ là $(0, ..., b, ..., 0)$ (b ở vị trí thứ i) và tìm A_0 với tọa độ $(x, ..., x)$ sao cho ta có đơn hình đều n-chiều. Từ đó ta được $x = \frac{1+\sqrt{n+1}}{n} b$ và $b = a/\sqrt{2}$. Ta có thể chứng minh (không mấy khó khăn) hoặc sử dụng Bài 35.9 rằng mọi đơn hình đều đều có thể đưa về dạng này.

Ta cũng có thể xem mặt k-chiều là bao lồi của $A_0, ..., A_k$ và mặt $(n - k - 1)$-chiều là bao lồi của các điểm còn lại (việc đổi lại thứ tự không làm ảnh hưởng tới kết quả). Kí hiệu

$$M = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} A_i = \frac{1}{k+1}(\underbrace{x + b, ..., x + b}_{k}, x, ..., x),$$

và

$$N = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n-k} A_i = \frac{1}{n-k}(\underbrace{0, ..., 0}_{k}, b, ..., b),$$

tức là M, N là trọng tâm của các mặt biên. Ta có thể dễ dàng kiểm tra

$$\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A_0 A_i}\rangle = \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A_{k+1} A_j}\rangle = 0,$$

với mọi $i \leq k$ và $j \geq k+1$. Do đó MN là đường vuông góc chung của hai phẳng và khoảng cách giữa hai mặt là

$$| MN | = \sqrt{\frac{n+1}{2(n-k)(k+1)}}a.$$

35.20 a) Cho T_i là các mặt và $T = \cap T_i$. Kí hiệu $[a,b]$ là đoạn thẳng có 2 đầu mút a và b. Khi đó nếu $T \cap [a,b]$ chứa điểm trong c, thì T_i cũng có tính chất đó. Vì vậy $[a,b] \subseteq T_i$ và $[a,b] \subseteq T$.

Nếu $T \subset T' \subseteq S$ và $T \cap [a,b]$ chứa điểm trong c (với $a,b \in S$), thì $T' \cap [a,b]$ cũng chứa c. Do T' là mặt của S, nên $[a,b] \subseteq T'$. Nói riêng $a,b \in T'$. Nhưng bây giờ T lại là mặt của T', nên $[a,b] \subseteq T$.

b) Giả sử $S_i \neq \emptyset$ và $S_i \cap [a,b]$ chứa điểm trong $c = t_0 a + (1-t_0)b$. Hàm số $g(t) = f_i(ta + (1-t)b)$, $t \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ là hàm bậc nhất theo t. Ta có $g(t_0) = f_i(c) = 0$, còn $g(1) = f_i(a) \geq 0$, $g(0) = f_i(b) \geq 0$. Điều này chỉ có thể xảy ra nếu $g(t) = 0$ với mọi t. Suy ra $[a,b] \subseteq \{x;\ f_i(x) = 0\}$. Nhưng do S là tập lồi, nên $[a,b] \subseteq S$. Từ đó $[a,b] \subseteq S_i$.

35.21 Cho $v \neq 0$ là một véc tơ tùy ý trong $\mathbb{E}$. Khi đó với mọi i ta có $f_i(a+\epsilon v) = f_i(a) + \epsilon(Df_i)(v)$. Do $f_i(a) > 0$ nên có thể chọn ϵ_0 đủ bé để $f_i(a+\epsilon v) > 0$ với mọi i và mọi $| \epsilon | \leq \epsilon_0$. Nói riêng tất cả các điểm này thuộc S. Bây giờ vì f khác hằng trên S nên tồn tại $b \in S$ để $f(b) \neq f(a)$. Do đó nếu đặt $v = b - a$, thì $(Df)(v) \neq 0$. Lấy ϵ cùng dấu với $(Df)(v)$ và $| \epsilon | < \epsilon_0$, ta sẽ có $a + \epsilon v \in S$ và $f(a+\epsilon v) > f(a)$, tức là a không phải là điểm cực đại của f trong S.

35.22 a) Ta chứng minh phần 1 bằng qui nạp theo $\dim \mathbb{E}$. Khi $\dim \mathbb{E} = 0$, tức là $\mathbb{E}$ chỉ gồm một điểm: hiển nhiên. Giả sử $\dim \mathbb{E} = n > 0$ và bài toán đã đúng với chiều bé hơn. Cho S là tập nghiệm của các bất phương trình $f_1(x) \geq 0, ..., f_m(x) \geq 0$. Tập S rõ ràng là đóng. Vì f bị chặn trên trên S, nên nó phải nhận giá trị lớn nhất (cực đại) tại một điểm $a \in S$ nào đó. Theo Bài 35.21 hoặc f là hàm hằng trên S, hoặc tồn tại i để $f_i(a) = 0$. Trường hợp đầu bài toán đã được chứng minh vì toàn bộ S là mặt của S. Đối với trường hợp thứ 2 thì đặt S_i như Bài 35.20(b), ta có f đạt giá trị lớn nhất tại $a \in S_i$, và do đó bị chặn. S_i là một mặt của S và nằm trong không gian Oclit chiều $n-1$. Theo giả thiết qui nạp, tồn tại mặt $T \subseteq S_i$ tại đó f nhận giá trị cực đại tại mọi điểm. Theo Bài 35.20(a), T cũng là một mặt của S.

b) Bây giờ ta giả sử S bị chặn và cần chứng minh là f đạt cực đại tại một đỉnh của S. Từ phần (a) ta thấy chỉ cần chứng minh nếu S là một đa

diện bị chặn thì S có ít nhất một đỉnh. Ta cũng chứng minh bằng qui nạp theo $\dim \mathbb{E}$. Khi $\dim \mathbb{E} = 0$, tức là $\mathbb{E}$ chỉ gồm một điểm: hiển nhiên. Giả sử $\dim \mathbb{E} = n > 0$ và bài toán đã đúng với chiều bé hơn. Có thể giả thiết bao afin của S trùng với toàn bộ $\mathbb{E}$. Lấy một hàm tuyến tính afin g tùy ý khác hằng trên $\mathbb{E}$. Khi đó vì S đóng và bị chặn, nên g đạt cực đại trên S. Theo chứng minh phần (a), tồn tại mặt T của S sao cho g nhận giá trị hằng trên T. Nhưng T nằm trên một siêu mặt có chiều $n-1$, T cũng bị chặn, nên theo giả thiết qui nạp T có một đỉnh x. Theo Bài 35.20(a) điểm x cũng là đỉnh của S.

35.23 (ii) $\Rightarrow$ (i): Đặt

$$\begin{aligned} S_0 &:= S, \\ S_1 &= S \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_{i_1}(x) = b_{i_1}\}, \\ &\cdots \\ S_n &= S_{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_{i_n}(x) = b_{i_n}\} = \{p\}. \end{aligned}$$

Theo Bài 35.20 các S_i là các mặt của S, nên nói riêng p là đỉnh.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Qui nạp theo n. Ta có thể giả thiết bao afin của S là $\mathbb{R}^n$ và $f_i \neq 0$ với mọi i. Tương tự lời giải Bài 35.21, ta thấy p phải thỏa mãn ít nhất một phương trình, tức là tồn tại i_1 để $f_{i_1}(p) = b_{i_1}$. Đặt

$$S_1 = S \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_{i_1}(x) = b_{i_1}\}.$$

Vì $f_{i_1} \neq 0$. ta dễ dàng suy ra bao afin $\mathbb{E}_1$ của S_1 có chiều đúng bằng $n-1$, S_1 lại là đa diện và p vẫn là đỉnh. Xét hạn chế của các f_i trên không gian chỉ phương E_1, rồi loại bỏ những hàm tuyến tính thừa, theo giả thiết qui nạp ta tìm được $f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}$ độc lập tuyến tính trên E_1 để

$$f_{i_2}(p) - b_{i_2} = \cdots = f_{i_n}(p) - b_{i_n} = 0.$$

$f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}$ độc lập tuyến tính trên E_1 nghĩa là nếu $\alpha_2 f_{i_2} + \cdots + \alpha_n f_{i_n} \equiv 0$ trên E_1, hay tương đương, $\alpha_2 f_{i_2} + \cdots + \alpha_n f_{i_n} = \beta f_{i_1}$, thì $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Điều đó tương đương với $f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}$ độc lập tuyến tính. Như vậy tổng hợp lại ta có

$$f_{i_1}(p) - b_{i_1} = \cdots = f_{i_n}(p) - b_{i_n} = 0.$$

36.1 Theo giả thiết siêu mặt bậc hai F chứa nhiều hơn một điểm. Theo Bài 34.8, có hai điểm $a, b \in F$ sao cho đường thẳng đi qua hai điểm này

không chứa trong F. Xét một tọa độ afin $(a; e_1, ..., e_n)$ tùy ý với $e_n = b - a$. Ta viết $F_1(x)$ trong hệ tọa độ này dưới dạng tam thức bậc hai theo x_n:

$$F_1(x_1, ..., x_n) = \lambda x_n^2 + l'_1(x_1, ..., x_{n-1})x_n + l"_1(x_1, ..., x_{n-1}) = 0,$$

trong đó $l'_1, l"_1$ là các hàm tuyến tính afin. Vì đường thẳng đi qua $a = (0, ..., 0)$ và $b = (0, ..., 0, 1)$ không nằm trong F, nên $\lambda \neq 0$ và

$$l'_1(0, ..., 0)^2 - 4\lambda l"_1(0, ..., 0)^2 > 0.$$

Chia F_1 cho λ, ta có thể giả thiết $\lambda = 1$. Tương tự, ta có thể viết F_2 dưới dạng tam thức bậc hai theo x_n:

$$F_2(x_1, ..., x_n) = x_n^2 + l'_2(x_1, ..., x_{n-1})x_n + l"_2(x_1, ..., x_{n-1}) = 0,$$

trong đó $l'_2(0, ..., 0)^2 - 4l"_2(0, ..., 0)^2 > 0$. Ta cần chứng minh $F_1(x) = F_2(x)$.

Cố định một véc tơ $c = (c_1, ..., c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ và xét véc tơ $tc = (tc_1, ..., tc_{n-1})$, $t \in \mathbb{R}$. Khi t có trị tuyệt đối nhỏ, các biệt thức của các tam thức bậc hai $F_1(x)$ và $F_2(x)$ vẫn còn dương, và do đó có các nghiệm thực phân biệt. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua điểm $(tc_1, ..., tc_{n-1}, 0)$ với véc tơ chỉ phương e_n. Nếu x_n^0 là một trong 4 nghiệm thực này thì $(tc_1, ..., tc_{n-1}, x_n^0)$ nằm trên d và cũng thuộc F. Như vậy các điểm này nằm trên giao của F và d. Nhưng vì tam thức bậc hai F_1 (theo x_n) có biệt thức dương, nên giao của F và d chỉ gồm đúng hai điểm. Do vậy hai cặp giao điểm tạo bởi hai phương trình bậc hai trên phải trùng nhau. Theo Định lí Vi-ét suy ra $l'_1(tc) = l'_2(tc)$ và $l"_1(tc) = l"_2(tc)$. Do c tùy ý và các hàm này là tuyến tính afin, ta dễ dàng suy ra chúng phải bằng nhau. Do đó $F_1(x) = F_2(x)$.

36.2 Chú ý rằng phương trình đường thẳng đi qua hai điểm (x_0, y_0) và (x_1, y_1) được cho bởi

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}.$$

(Nếu $y_0 = y_1$ thì ta đảo ngược phân số.) Như vậy nếu cả hai điểm cùng nằm trên đường bậc 2 có phương trình $Rx^2 + Sy^2 = T$ thì thay x_i, y_i vào và trừ cho nhau, ta sẽ suy ra

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = -\frac{S(y_1 + y_0)}{R(x_1 + x_0)} \to -\frac{Sy_0}{Rx_0}$$

khi điểm (x_1, y_1) tiến tới (x_0, y_0). Từ đó ta nhận được phương trình tiếp tuyến là

$$Rxx_0 + Syy_0 = T.$$

Điều này giải quyết trường hợp ellip và hyperbol. Đối với parabol ta cũng làm tương tự.

36.3 Chọn hệ tọa độ Đề-các vuông góc sao cho hai điểm F', F cố định có tọa độ $(-c, 0)$ và $(c, 0)$. Nếu tổng khoảng cách là $2a$ $(a > c > 0)$ thì từ điều kiện $d(P, F) + d(P, F') = 2a$ ta suy ra tọa độ (x, y) của P thỏa mãn phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó $b^2 = a^2 - c^2$.

36.4 Chọn hệ tọa độ như lời giải Bài 36.3. Giả sử $P = (x_0, y_0)$ nằm trên ellip. Khi đó ta có thể chứng minh

a) Phương trình của tiếp tuyến T tại P là (xem Bài 36.2)

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

b) $d(F, T) = \frac{b}{b'}(a - ex_0)$, $d(F', T) = \frac{b}{b'}(a + ex_0)$, trong đó

$$e = \frac{c}{a} < 1,\ b' = \sqrt{\frac{x_0^2 b^2}{a^2} + \frac{y_0^2 a^2}{b^2}}.$$

c) $d(F, P) = a - ex_0$, $d(F', P) = a + ex_0$.

d) Từ b) và c) suy ra góc giữa FP và T bằng góc giữa $F'P$ và T (chúng có sin bằng nhau), tức FP là tia phản xạ của $F'P$ (và ngược lại).

36.5 Gọi P là điểm cần tìm. Đặt $e = d(P, F)/d(P, L)$. Quĩ tích của P là ellip nếu $e < 1$ và là một nhánh của hyperbol nếu $e > 1$. Còn khi $e = 1$ thì đó là parabol (xem Bài 36.7). Để thiết lập phương trình, ta chọn hệ tọa độ Đề-các vuông góc sao cho F có tọa độ là $(c, 0)$ và L song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $(l, 0)$, $l \neq c$.

36.6 Với a), ta chỉ việc chú ý rằng ánh xạ afin f biến điểm giữa của đoạn thẳng thành điểm giữa của ảnh. Đối với b) và c) ta có thể tính trực tiếp dựa vào các tọa độ của P và P'.

36.7 Nếu ta chọn hệ tọa độ Đề-các vuông góc sao cho F có tọa độ là $(c, 0)$ và L song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $(-c, 0)$ $(c > 0)$, thì phương trình của parabol là $y^2 = 4cx$. Đây là trường hợp riêng của Bài 36.5.

36.8 Ta sử dụng kí hiệu như lời giải của Bài 36.7. Gọi P là một điểm trên parabol, P' là chân đường vuông góc của nó trên L và $Q = (0, y/2)$. Khi đó tam giác FPP' cân tại P, nhận PQ là đường trung tuyến. Bây giờ chỉ còn phải kiểm tra PQ là đường tiếp tuyến.

36.9 Chọn hệ tọa độ Đề-các vuông góc sao cho hai điểm F', F cố định có tọa độ $(-c, 0)$ và $(c, 0)$. Nếu hiệu khoảng cách là $2a$ $(c > a > 0)$, thì từ điều kiện $d(P, F) - d(P, F') = 2a$ ta suy ra tọa độ (x, y) của P thỏa mãn phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó $b^2 = c^2 - a^2$. Khi quay thước, hiệu khoảng cách luôn bằng chênh lệch giữa độ dài sợi dây và FF'.

36.10 Làm tương tự như Bài 36.4.

36.11 Nếu P có tọa độ (x, y), thì C có đường tiệm cận chỉ khi tồn tại $\lim_{P \in C,\ P \to \infty} \frac{y}{x}$ hoặc $\lim_{P \in C,\ P \to \infty} \frac{x}{y}$. Từ đó suy ra chỉ có hyperbol. Nếu hyperbol có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

thì ta dễ kiểm tra nó có hai đường tiệm cận với phương trình là $y = \pm \frac{b}{a} x$.

36.12 Đối với ellip ta đã tính hai khoảng cách này trong phần b) của Bài 36.4. Đối với hyperbol ta có thể làm tương tự.

36.13 Theo Bài 36.7, nếu parabol có phương trình là $y^2 = 2px$ thì tiêu điểm F của nó có tọa độ $(p/2, 0)$. Bây giờ sử dụng phương trình đường tiếp tuyến trong Bài 36.2, ta thấy tọa độ chân đường vuông góc thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} yy_0 - p(x + x_0) &= 0 \\ y_0(x - \frac{p}{2}) + py &= 0. \end{cases}$$

Từ đó tọa độ các điểm cần tìm là $(0, y_0/2)$. Như vậy quỹ tích là trục hoành.

Có thể giải bài này bằng hình học sơ cấp (xem lời giải Bài 36.8).

36.14 Ta có thể giả thiết phương trình của hyperbol là

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Theo Bài 36.2 và Bài 36.11, phương trình của các đường tiệm cận và tiếp tuyến là

$$y = bx/a,\ y = -bx/a,\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Từ đó suy ra hai giao điểm của tiếp tuyến với các đường tiệm cận là

$$A = (\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0});\ B = (\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}, -\frac{ab^2}{bx_0 + ay_0}).$$

Cho nên $AB = 2c/(ab)$, trong đó $c = \sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}$. Tính đường cao hạ từ gốc tọa độ xuống AB, ta được $h = a^2b^2/c$. Do đó diện tích tam giác là ab.

36.15 Sử dụng tọa độ của các tiêu điểm nêu trong các bài 36.3, 36.7, 36.9, ta có thể tính được tọa độ của điểm B thông qua tọa độ của A. Từ đó tính được tổng các nghịch đảo của các khoảng cách.

36.16 Ta có thể xem mặt nón tròn xoay có phương trình là

$$x^2 + y^2 = a^2z^2,\ a \neq 0.$$

Phương trình mặt phẳng tổng quát có hai dạng: $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ hoặc $y = \alpha x + \gamma$. Thay vào phương trình của mặt nón ta sẽ được phương trình của đường bậc hai.

36.17 Kí hiệu e_1, e_2 là các véc tơ đơn vị trên trục hoành và trục tung.

a) Theo thuật toán tìm dạng chính tắc trục chính, trước hết ta thực hiện phép đổi tọa độ sau

$$u_1 = \frac{e_1}{\sqrt{5}} + \frac{2e_2}{\sqrt{5}},\ u_2 = -\frac{2e_1}{\sqrt{5}} + \frac{e_2}{\sqrt{5}}.$$

Khi đó vế trái trở thành

$$-2(x')^2 + 3(y')^2 + 4x' - 8y' + 8 = -2(x' - 1)^2 + 3(y' - \frac{4}{3})^2 + \frac{14}{3}.$$

Do đó ta có phương trình hyperbol:

$$\frac{3}{7}(x' - 1)^2 - \frac{9}{14}(y' - \frac{4}{3})^2 = 1.$$

Như vậy trước hết ta phải quay trục tọa độ thành các trục đi qua u_1 và u_2, rồi tịnh tiến gốc tọa độ tới điểm $(1, \frac{4}{3})$. Trong tọa độ mới này ta vẽ hyperbol với phương trình

$$\frac{3}{7}X^2 - \frac{9}{14}Y^2 = 1.$$

b) Cơ sở mới là

$$u_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2}{\sqrt{2}},\ u_2 = -\frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình mới là

$$\frac{2\sqrt{2}}{7}(X + \frac{9}{4\sqrt{2}})^2 = Y + \frac{81\sqrt{2}}{112}.$$

Đây là một parabol. Để vẽ ta cần quay trục tọa độ một góc 45^0 và tịnh tiến gốc tọa độ tới điểm $(-\frac{9}{4\sqrt{2}}, -\frac{81\sqrt{2}}{112})$.

c) Cơ sở mới là

$$u_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2}{\sqrt{2}},\ u_2 = -\frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình mới là

$$\frac{(X + \frac{1}{7})^2}{3/\sqrt{7})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.$$

Đây là một ellip. Để vẽ ta cần quay trục tọa độ một góc 45^0 và tịnh tiến gốc tọa độ mới tới điểm $(-\frac{1}{7}, 0)$.

36.18 a) Dạng chính tắc là

$$\frac{Z^2}{5} - \frac{X^2}{10} - \frac{Y^2}{10} = 1$$

Đây là hyperboloid hai tầng. Phép đổi tọa độ không duy nhất, và có thể chọn là

$$\begin{aligned} x &= -\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1, \\ y &= \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1, \\ z &= \frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 2. \end{aligned}$$

b) Dạng chính tắc là

$$\frac{X^2}{21} + \frac{Y^2}{21} + \frac{2Z^2}{21} = 1.$$

Đây là một ellipsoid. Có thể chọn phép đổi tọa độ

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{3}} - \frac{Z}{\sqrt{6}}, \\ y &= \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{3}} + \frac{Z}{\sqrt{6}}, \\ z &= \frac{Y}{\sqrt{3}} + \frac{2Z}{\sqrt{6}} - 3. \end{aligned}$$

c) Dạng chính tắc là $X^2 - Y^2 + Z^2 = 0$. Đây là một paraboloid hyperbolic. Phép chuyển tọa độ là

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} - 5, \\ y &= \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} + 3, \\ z &= Z + 1. \end{aligned}$$

36.19 Trước hết ta chú ý rằng dáng điệu của một siêu mặt bậc hai chủ yếu phụ thuộc vào phần toàn phương. Phần tuyến tính chỉ đồng nghĩa với việc thay đổi gốc tọa độ (hoặc tịnh tiến siêu mặt, nếu giữ nguyên gốc tọa độ) và thay đổi giá trị của hệ số tự do. Hệ số tự do quyết định tập đó có khác rỗng hay không, hoặc chính xác hóa dáng điệu của nó (ví dụ giữa hyperboloid hai tầng và một tầng).

Bây giờ ta xét mặt phẳng π có tọa độ

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Thay vào phương trình của ellipsoid ta được ma trận của phần toàn phương tương ứng là

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{1}{a^2} & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \frac{\beta^2}{c^2} + \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Để cho tiết diện là hình tròn thì phải tồn tại phép biến đổi trực giao trong $\mathbb{R}^2$ sao cho kết quả là bội của ma trận đơn vị: dI. Nếu $P \in O(2, \mathbb{R})$ là ma trận đổi cơ sở thì $A = P(dI)P^{-1} = dI$. Do đó ta chỉ có 2 trường hợp

$\alpha = 0$ và $\frac{\beta^2}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2}$. Điều này chỉ xảy ra nếu $a = b$ và khi đó $\beta = 0$.

$\beta = 0$ và $\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$. Từ đó $\alpha = \pm\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{ab}$. Trường hợp này cũng bao gồm trường hợp trên. Bây giờ ta chỉ còn phải xét sao cho tiết diện khác rỗng. Thay các giá trị α, β này vào, ta được phương trình tiết diện là

$$\frac{1}{b^2}(x - \frac{\alpha\gamma b^2}{c^2})^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\alpha^2\gamma^2 b^2}{c^4} - \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Như vậy ta phải có

$$c^4 \geq \gamma^2(c^2 - \alpha^2 b^2) = \gamma^2 \frac{b^2 c^2}{a^2}.$$

Suy ra $|\gamma| \leq ca/b$.

Tương tự, ta chỉ còn phải xét các mặt phẳng dạng $x = \alpha y + \gamma$ và $y = \gamma$. (Trong trường hợp cuối cùng, $y = \gamma$, để có tiết diện là đường tròn, ta phải có $a = c$. Từ đó $a = b = c$ và ta được một mặt cầu bán kính a).

36.20 Nếu một mặt bậc hai nào đó chứa một đoạn thẳng thì khi thay $x = \alpha t + x_0$, $y = \beta t + y_0, z = \gamma t + z_0$ vào trong phương trình của nó ta phải được vô số nghiệm, trong đó α, β, γ không đồng thời bằng 0.

36.21 Ta có thể giả thiết $a, b, c > 0$. Đặt $M = \max\{a, b, c, 1\}$. Cho $1 > \epsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước. Giả sử $P = (x, y, z)$ là một điểm trên hyperboloid H có $| OP | > 3M^2/\epsilon$. Khi đó hoặc $| x | > \max\{a, a^2/\epsilon\}$ hoặc $| y | > \max\{b^2/\epsilon, b\}$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $| x | > \max\{a, a^{3/2}/\epsilon\}$. Khi đó

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mp 1 + \frac{x^2}{a^2} > 0.$$

Do vậy có thể chọn được x' cùng dấu với x sao cho

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x')^2}{a^2}.$$

Điểm $P' = (x', y, z)$ nằm trên mặt nón C trong đề bài và

$$d(P, C) \leq d(P, P') = | x - x' | = \frac{a^2}{| x + x' |} < \frac{a^2}{| x |} < \epsilon.$$

36.22 Ta xét hyperboloid một tầng H với phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}.$$

Giả sử điểm M trên H có toạ độ (x_0, y_0, z_0). Đường thẳng đi qua M có dạng

$$x = x_0 + \alpha t, \ y = y_0 + \beta t, \ z = z_0 + \gamma t,$$

trong đó một trong ba hệ số α, β, γ bằng 1. Nó nằm trên H khi và chỉ khi

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0 \text{ và } \frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2} = 0.$$

Từ đó lần lượt xét các trường hợp $\alpha = 1$, $\beta = 1$ hay $\gamma = 1$ ta sẽ tìm được đúng hai đường thẳng.

Đối với paraboloid hyperbolic ta cũng làm tương tự.

Lời giải, chỉ dẫn chương 11

38.1 Ý tưởng xây dựng như sau: Ta lấy $B \in M(3;K)$ là ma trận tam giác dưới, và $A \in M(3,4;K)$ là ma trận dạng hình thang trên, sao cho các phần tử trên đường chéo chính của cả hai ma trận khác 0. Khi đó ta có $\operatorname{rank}(BA) = 3$, tức là các véc tơ dòng của tích luôn độc lập tuyến tính. Bây giờ có thể cho A cố định, còn B phụ thuộc tham số, ta sẽ được một họ như vậy. Chẳng hạn, ta dùng các lệnh sau:

```
> A:=<<1|-1|0|1>,<0|1|-1|2>,<0|0|1|-1>>;
>B:=<<n,1,-2>|<0,m,-1>|<0,0,p>>;
>C:=Multiply(B,A);
```

Ma trận C bây giờ không còn dạng tam giác nữa, và ta không thể biết ngay $\operatorname{rank} C = 3$. Mỗi ma trận C sẽ cho 3 dòng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^4$.

38.2 Xét tích của một họ ma trận tam giác trên A_i, $i \in I$ với các phần tử đường chéo cố định và một (hoặc một họ) ma trận tam giác dưới B cùng cấp có các phần tử đường chéo khác 0 (chẳng hạn bằng 1 cả).

38.3 Tương tự như Bài 38.1 ta có thể xây dựng một họ ma trận vuông A_i, $i \in I$, không suy biến cấp 3. Ta có thể cố định một véc tơ $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ nào đó. Với mỗi $i \in I$ ta tính $b_i = Av$. Khi đó tất cả các hệ phương trình

$$A_i X = b_i$$

đều có một nghiệm duy nhất là $X = v$. Không những thế, ta có thể chọn sao cho các hệ phương trình đều có hệ số nguyên, và không lớn lắm! Hãy thực hiện ý tưởng trên bằng các lệnh của MAPLE!

38.4 Lấy $C \in M(3,\mathbb{Z})$ là ma trận tam giác dưới với đường chéo chỉ là 1 hoặc -1, còn $A_i \in M(3,\mathbb{Z})$, $i \in I$, là họ ma trận tam giác trên với các phần tử đường chéo cố định. Khi đó có thể dễ dàng tính C^{-1} và $C^{-1}A_iC$, $i \in I$, là họ cần tìm.

38.5 Làm như Bài 38.4, nhưng bây giờ lấy các phần tử trên đường chéo chính của A là khác nhau. Khi đó bản thân A luôn chéo hóa được, vì các giá trị riêng của chúng là khác nhau.

Nếu muốn xây dựng họ không chéo hóa được, thì ta coi C là phụ thuộc tham số, còn chọn A là một ma trận cố định không chéo hoá được.

38.6 Lấy $P \in O(3,\mathbb{Z})$ là một ma trận trực giao tùy ý, còn $A_i \in M(3,\mathbb{Z})$, $i \in I$, là họ ma trận đường chéo có dấu của các phần tử trên mỗi vị trí như

nhau. Khi đó $P^T A_i P$ là họ cần tìm.

38.7 Chẳng hạn ta xét trường hợp 4 biến. Cho P_i, $i \in I$, là một họ ma trận vuông và $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3, \lambda)$ (quan trọng là ma trận đường chéo). Khi đó các dạng toàn phương với ma trận biểu diễn $A_i = P^T D P$ đáp ứng yêu cầu của đề bài.

Tài liệu tham khảo

[1] E. Brieskorn, *Linear Algebra und Analytiscke Geometrie I* (Tiếng Đức). Vieweg, Braunschweig, 1986.

[2] H. Derksen, The Fundamental Theorem of Algebra and Linear Algebra (Tiếng Anh). *Amer. Math. Monthly* **110**(2003), 620-623.

[3] P. H. Điển, T. D. Phượng và Đ. T. Lục, *Hướng dẫn thực hành tính toán trên chương trình MAPLE V.* NXB Giáo dục, 1998.

[4] Nguyễn Hữu Điển, *LATEX với gói lệnh và phần mềm công cụ.* NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.

[5] G. Fischer, *Analytische Geometrie* (Tiếng Đức). Vieweg, Braunschweig, 1983.

[6] W. Greub, *Linear Algebra*, 4th Edition (Tiếng Anh). Graduate Texts Math. , Springer-Verlag, 1981.

[7] W. Greub, *Multilinear Algebra*, 2nd Edition (Tiếng Anh). Springer-Verlag, 1978.

[8] Trần Văn Hạo và Hoàng Kỳ, *Bài tập Đại số.* NXB Bộ ĐHTHCN, 1980.

[9] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính.* NXB ĐHQG Hà Nội, 2001.

[10] S. Lang, *Linear Algebra* (Tiếng Anh). Addison-Wesley Publ. Comp., 1968

[11] G. Lefort, *Bài tập Giải tích và Đại số, Tập 1, 2* (dịch từ tiếng Pháp). NXB Bộ ĐHTHCN, 1982.

[12] S. Lipschutz, *Theory and problems of Linear Algebra* (Tiếng Anh). McGraw-Hill Book Comp., 1968.

[13] A.I. Kostrikin và Yu. I. Manin, *Linheinaia algebra i geometria - Đại số tuyến tính và Hình học* (Tiếng Nga). MGU, 1980.

[14] I. V. Proskuryakov, *Sbornik zadatr po linheinoi algebre - Tuyển tập bài tập Đại số tuyến tính* (Tiếng Nga). Nauka, 1978.

[15] Đoàn Quỳnh (chủ biên), Khu Quốc Anh, Nguyễn Anh Kiệt, Tạ Mân và Nguyễn Doãn Tuấn , *Giáo trình Toán đại cương. Phần 1: đại số tuyến tính và Hình học giải tích.* NXB ĐHQG Hà Nội, 1998.

[16] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh và Nguyễn Hồ Quỳnh, *Bài tập Toán cao cấp. Tập 1: Đại số và Hình học giải tích.* NXB Giáo dục, 1997.

[17] Ngô Việt Trung, *Giáo trình Đại số tuyến tính.* NXB ĐHQG Hà Nội, 2001.

Tra cứu

A

ánh xạ afin 222
– – đa tuyến tính 203
– – hạn chế 205
– – nhúng 83
– – song tuyến tính 203
– – tuyến tính 83
ảnh, Im 85

B

bao afin 228
bao lồi 236
bao tuyến tính 23
biểu diễn tham số 227
biểu diễn tuyến tính 20

C

cấu hình 231
chéo hóa được 120
chỉ số quán tính âm 189
– – – – dương 189
chiều 29
chuẩn 147
chuyển vị 58, ??
công thức Binê-Côsi 74
Cosi-Bunhiakovski 148
cơ sở 29
– – đối ngẫu 102
– – trực chuẩn 148

D

dạng chính tắc 183, 239
– – – trục chính 190, 241
dạng chuẩn tắc 99, 189
dạng chuẩn tắc Jordan 140
dạng cực 182
dạng đa tuyến tính 203
dạng Hermite 199
dạng song tuyến tính 179
– – – – đối xứng 181
– – – – đối xứng lệch 181
– – – – liên hợp 197
– – – – thay phiên 179
dạng toàn phương 182
– – – Hermite 199
– – – liên hợp 198
– – – thực 189
– – – tương đương 193
– – – xác định âm 189
– – – xác định dương 189
dạng tuyến tính 83
dãy khớp 94
– – ngắn 88
dấu (của hoán vị) 58
dời hình 233

Đ

đa thức cực tiểu 54, 128
đa thức đặc trưng 54, 194
– – – – của toán tử tuyến tính 118

– – Legendre 153
đại số đối xứng 214
đại số ngoài 215
đại số tenxơ 213
đẳng cự 161, 233
điểm 221
định lí chiều giao 32
– – cosin 156
– – cơ bản của Đại số 249
– – Hamilton-Cayley 54, 128
– – hạng ánh xạ 86
– – Kronecker-Capelli 107
– – phổ 173
– – Pitago 148
– – Steinitz 29
– – Sylvester 190
– – về đồng cấu 92
định thức 60, 102
– – chu trình 73
– – – – lệch 74
– – con 60
– – – bù 60
– – – chính 53
– – – góc 188
– – Gram 156
– – phụ hợp 79
– – Vandermonde 63
độ dài 147
độc lập afin 226
độc lập tuyến tính 20
đường thẳng 221

G

giá trị riêng 117
góc 155, 236, 236
gốc tọa độ 223

H

hạch, Ker 85
hàm tuyến tính afin 224
hạng của ánh xạ tuyến tính 85
hạng của dạng song tuyến tính 181
hạng ma trận 51
hệ nghiệm cơ sở 106
hệ phương trình tuyến tính 105
– – – – – không suy biến 112
– – – – – suy biến 112
– – – – – thuần nhất 105
hệ sinh 23
– – tối tiểu 23
hệ tọa độ Đề-các vuông góc 231
hệ tọa độ afin 223
– – – trọng tâm 226
hệ trực chuẩn 148
hệ trực giao 148
hình hộp 157
hoán vị 57
– – chẵn, lẻ 58

K

khoảng cách 231
khối Jordan 137
không gian afin 221
– – chỉ phương 221
– – con (afin) 226
– – con (véctơ) 16
– – – bất biến 124
– – – bất khả qui 125
– – đối ngẫu 102
– – hữu hạn chiều 23
– – hữu hạn sinh 23
– – Oclit 145
– – Oclit afin 231
– – riêng 118
– – thương 91
– – unita 146
– – véc tơ 13

– – xích 126, 135
kí hiệu Knonecker 102
kí số 189

L

lớp kề 90
luật quán tính Sylvester-Jacobi 189
lũy thừa đối xứng 214
lũy thừa ngoài 215
lũy thừa tenxơ 212

M

ma trận 39
– – biểu diễn 96, 180
– – bổ sung 105
– – chéo hóa được 120
– – chuyển cơ sở 97
– – chuyển vị 39
– – con 60
– – – bù 45, 60
– – đa thức 54
– – đối xứng 43
– – đối xứng lệch 43
– – đồng dạng 55
– – đồng hành 135, 137,
– – đơn vị 40
– – đường chéo 45
– – Gram 156
– – Hermite 44, 89
– – hệ số 105
– – hệ số mở rộng 105
– – hình thang 51
– – Jordan 139
– – khả nghịch 40
– – khối 43
– – liên hợp 40
– – liên kết 105
– – lũy linh 44
– – nghịch đảo 40
– – phụ hợp 79
– – tam giác trên, dưới 47
– – trực giao 75, 163
– – tương đẳng 181
– – unita 163
– – vô hướng 42
– – vuông 39
mặt phẳng 221
milnor 60

N

nghịch thế 58
nghiệm 105
– riêng 106
– tầm thường 105
– tổng quát 106
nhóm trực giao 163
nhóm unita 163
nửa xác định âm 189
nửa xác định dương 189

P

phần bù đại số 45, 60
– – trực giao 150
phần tuyến tính của ánh xạ afin 222
phần tử sinh 135
phép biến đổi afin 222
– – – sơ cấp 46
– – – trục chính 190
phép chiếu 84
phép thế 57
– – sơ cấp 58
phép tịnh tiến 222
phép vị tự 226
phổ 117
phụ thuộc tuyến tính 20
p-dạng ngoài 218

p-véctơ 215

Q

qui tắc Cramer 112

S

siêu mặt bậc hai 239
siêu phẳng 221

T

tâm (đối xứng) 239
tập lồi 236
tenxơ cơ bản 207
– đối xứng 214
– khả qui 212
thay phiên 215
thể tích 157
thuật toán Gauss 62
– – Gram-Schmidt 149
– – Lagrange 183
tích Đềcác 16
tích đối xứng 214
tích Kronecker 80
tích ngoài 215
tích tenxơ 207, 208
– – của hai ánh xạ 211
tích vô hướng 145, 146
tiêu điểm 246, 246, 247
tính thay phiên 62
tọa độ 29, 223

toán tử chuẩn tắc 177
– – đa thức 128, 101
– – đối xứng 172
– – Hermite 172
– – liên hợp 171
– – – – lệch 176
– – thay phiên hóa 217
– – trực giao 162
– – tuyến tính 83, 117
– – tự liên hợp 172
– – unita 162
tổ hợp afin 224
– – trọng tâm 224
– – tuyến tính 20
tổng 19
tổng trực tiếp ngoài 17
tổng trực tiếp trong 36
trục chính 190
trực giao 148
tự đồng cấu 83
tương đẳng afin 231
tương đẳng metric 236
tương đương trực giao 165, 194
tương đương unita 165

V

véc tơ 14
– – chiếu 156
– – định chuẩn 147
– – độ cao 156
– – đối 13
– – không 13
– – riêng 117
vết của ma trận 42

X

xác định âm 189
xác định dương 189
xích 58

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899

E-mail: nxb@ vnu.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:

Biên tập: HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP BỘ SÁCH TOÁN CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

Biên tập kỹ thuật: LAN HƯƠNG

Trình bày bìa: PHẠM HUY ĐIỂN

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH QUA CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

Mã số: 1L-80 ĐH2005

In 3000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Nhà in Viện Toán học

Số xuất bản: 162-2005/CXB/2-260/ĐHQGHN, ngày 05/12/2005.

Quyết định xuất bản số: 16 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2006.